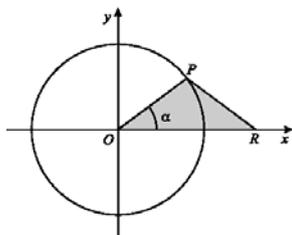


Exercícios de 11.º ano nos Testes Intermédios

TRIGONOMETRIA

1. Na figura está representado o círculo trigonométrico e um triângulo [OPR].



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante. O ponto R desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que o triângulo [OPR] sempre isósceles. Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ROP, qual das expressões seguintes dá a área do triângulo [OPR], em função de α ?

- (A) $\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$ (B) $2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$
 (C) $\frac{1 + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$ (D) $\frac{(1 + \cos \alpha) \cdot \text{sen } \alpha}{2}$
 (Teste Intermédio 2006)

2. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que $\cos \alpha < 0$ e $\text{tg } \alpha > 0$. Qual das expressões seguintes dá o valor de $\text{sen } \alpha$?

- (A) $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ (B) $-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
 (C) $\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$ (D) $-\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$
 (Teste Intermédio 2006)

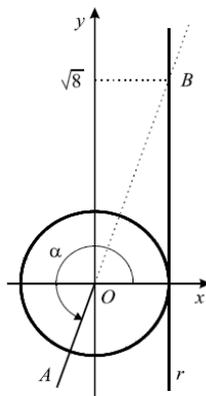
3. Sabe-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação $\text{sen } x = \frac{1}{5}$. Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$?

- (A) $\pi + \beta$ (B) $\frac{\pi}{2} + \beta$ (C) $-\beta$ (D) $\frac{\pi}{2} - \beta$
 (Teste Intermédio 2006)

4. Indique as soluções da equação $5 + 2\cos x = 6$ que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$

- (A) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$
 (C) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$
 (Teste Intermédio 2007)

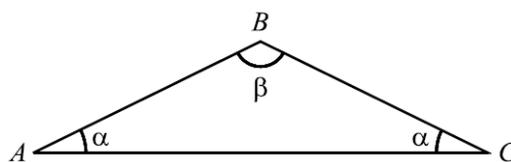
5. Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy: • o círculo trigonométrico; • a recta r, de equação $x=1$; • o ângulo, de amplitude α , que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta $\hat{O}A$; • o ponto B, intersecção do prolongamento da semi-recta $\hat{O}A$ com a recta r. Como a figura sugere, a ordenada de B é $\sqrt{8}$. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de



$5 \text{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \cos(3\pi - \alpha)$

(Teste Intermédio 2007)

6. Na figura está representado um triângulo [ABC] com dois ângulos de amplitude α e um ângulo de amplitude β .



Qual das igualdades seguintes é verdadeira, para qualquer triângulo nestas condições?

- (A) $\cos \beta = \text{sen}(2\alpha)$ (B) $\cos \beta = \cos(2\alpha)$
 (C) $\cos \beta = -\text{sen}(2\alpha)$ (D) $\cos \beta = -\cos(2\alpha)$
 (1.º Teste Intermédio 2008)

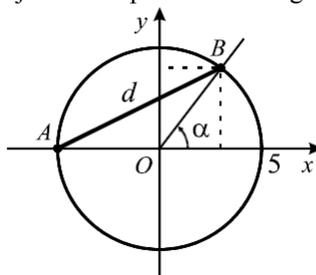
7. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

- (A) $\cos \theta - \text{sen } \theta$ (B) $\text{sen } \theta \times \cos \theta$
 (C) $\text{sen } \theta \times \text{tg } \theta$ (D) $\text{sen } \theta - \text{tg } \theta$
 (1.º Teste Intermédio 2008)

8. Considere a equação $1 + 3\text{tg}(2x) = 4$. Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

- (A) $-\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{3\pi}{8}$ (C) $\frac{5\pi}{8}$ (D) $\frac{7\pi}{8}$
 (1.º Teste Intermédio 2008)

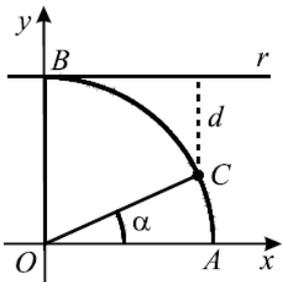
9. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy, uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O ponto A também pertence ao eixo das abcissas. Admita agora que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante. Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\hat{O}B$. Seja d o comprimento do segmento [AB].



- a) Mostre que $d^2 = 50 + 50 \cos \alpha$
 b) Para uma certa posição do ponto B, tem-se $\text{tg } \alpha = \sqrt{24}$. Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d.

(1.º Teste Intermédio 2008)

10. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial e raio igual a 1. A recta r tem equação $y = 1$. O ponto C pertence ao arco AB. Seja α a amplitude do ângulo AOC.



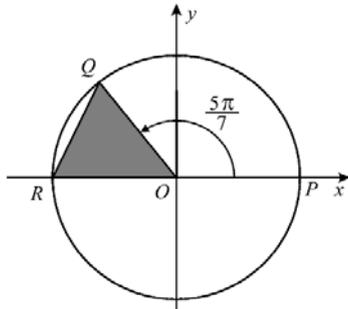
Qual das expressões seguintes dá a distância d do ponto C à recta r ?

- (A) $1+\sin(\alpha)$ (B) $1-\sin(\alpha)$ (C) $1+\cos(\alpha)$ (D) $1-\cos(\alpha)$
(2.º Teste Intermédio 2008)

11. Seja $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

- (A) $\cos(\pi-x)$ (B) $\sin(\pi-x)$
(C) $\cos(\frac{3\pi}{2}-x)$ (D) $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)$
(2.º Teste Intermédio 2008)

12. Na figura está representado o círculo trigonométrico.



Tal como a figura sugere, O é a origem do referencial, Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas $(1,0)$ e R é o ponto de coordenadas $(-1,0)$. A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$. Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo $[OQR]$?

- (A) 0,39 (B) 0,42 (C) 0,46 (D) 0,49
(2.º Teste Intermédio 2008-12.º ano)

13. Considere a equação trigonométrica $\cos x = 0,3$. Num dos intervalos seguintes, esta equação tem apenas uma solução. Em qual deles?

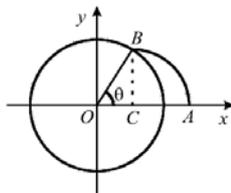
- (A) $[0, \frac{\pi}{2}]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (D) $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
(1.º Teste Intermédio 2009)

14. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy :

- o círculo trigonométrico
- o raio $[OB]$ deste círculo
- o arco de circunferência AB , de centro no ponto C

Tal como a figura sugere, o ponto B pertence ao primeiro quadrante, os pontos A e C pertencem ao eixo Ox e a recta BC é perpendicular a este eixo. Seja θ a amplitude do ângulo AOB . Qual é a abcissa do ponto A ?

- (A) $1+\sin\theta$ (B) $1+\cos\theta$ (C) $\cos\theta+\sin\theta$ (D) $1+\cos\theta+\sin\theta$
(1.º Teste Intermédio 2009)



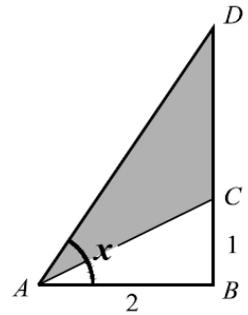
15. Relativamente à figura junta, sabe-se que:

- o triângulo $[ABD]$ é rectângulo
- o ponto C pertence ao cateto $[BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAD
- $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BC} = 1$

a) Mostre que a área do triângulo $[ACD]$ é dada por $2\text{tg}(x)-1$

b) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ACD]$ é igual a 1.

c) Sabendo que $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + a) = \frac{5}{13}$ e que $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, determine o valor de $2\text{tg}(a)-1$



16. Na figura 1 está representado, em referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico. Os pontos P e Q pertencem à circunferência, sendo a recta PQ paralela ao eixo Ox . O ponto R pertence ao eixo Ox . O ângulo ROP tem 53° de amplitude. Qual é o perímetro do triângulo $[OPQ]$ (valor aproximado às décimas)?

- (A) 3,2 (B) 3,4 (C) 3,6 (D) 3,8

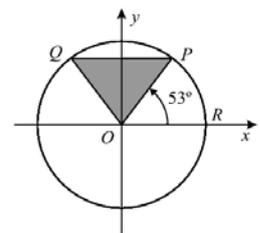


Figura 1

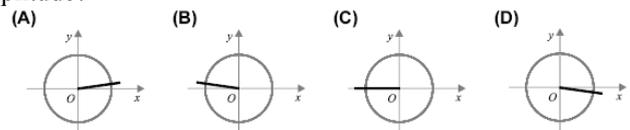
(2.º Teste Intermédio 2009)

17. A Inês olhou para o seu relógio quando este marcava 10 h e 45 min. Passado algum tempo, ao ver novamente as horas, a Inês concluiu que o ponteiro dos minutos tinha rodado -3π radianos. Que horas marcava o relógio da Inês, neste último instante?

- (A) 11 h e 15 min (B) 11 h e 45 min
(C) 12 h e 15 min (D) 13 h e 45 min

(2.º Teste Intermédio 2009)

18. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox . Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?



(1.º Teste Intermédio 2010)

19. Considere a equação trigonométrica $\text{sen}x = 0,1$. Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

- (A) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (B) $[0, \pi]$
(C) $[0, \frac{\pi}{6}]$ (D) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

(1.º Teste Intermédio 2010)

20. Na figura 1, está representado o quadrado $[ABCD]$ de lado 2.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do lado [CD], nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto D. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP ($x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$)

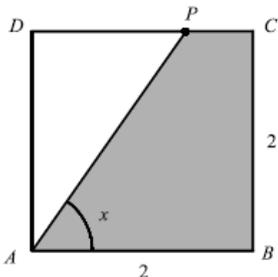


Figura 1

Resolva os três itens seguintes, sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

a) Mostre que a área da região sombreada é dada por $4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$

b) Determine o valor de x para o qual a área da região sombreada é $\frac{12-2\sqrt{3}}{3}$

c) Para um certo valor de x , sabe-se que $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{15}{17}$

Determine, para esse valor de x , a área da região sombreada. (1.º Teste Intermédio 2010)

21. Considere, em \mathbb{R} , a equação trigonométrica $\cos x = 0,9$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

- (A) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ (D) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

(1.º Teste Intermédio 2011)

22. Na Figura 2, está representado o círculo trigonométrico. Sabe-se que:

- a recta r é tangente à circunferência no ponto A(1,0)
 - a recta s passa na origem e intersecta a recta r no ponto P, cuja ordenada é 2
 - o ponto Q, situado no terceiro quadrante, pertence à recta s
- Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta OQ

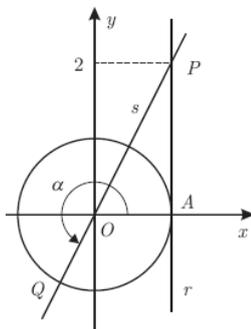


Figura 2

Qual é o valor de α , arredondado às centésimas?

- (A) 4,23 (B) 4,25 (C) 4,27 (D) 4,29

(1.º Teste Intermédio 2011)

23. Sejam α , β e θ três números reais. Sabe-se que:

- $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$
- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\alpha + \theta = 2\pi$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta$?

- (A) $2 \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cos}\alpha$ (B) $2 \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{cos}\alpha$
(C) $-\operatorname{cos}\alpha$ (D) $\operatorname{cos}\alpha$

(1.º Teste Intermédio 2011)

24. Determine o valor de $3 - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ sabendo que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e que $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\frac{4}{5}$. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

(2.º Teste Intermédio 2011)

25. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$. Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$?

- (A) $\pi - \theta$ (B) $\pi + \theta$ (C) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (D) $\frac{\pi}{2} + \theta$

(Teste Intermédio 2012)

26. Considere o triângulo [ABC] representado na Figura 2.

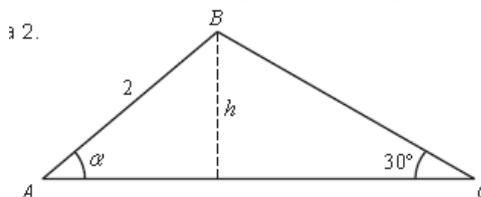


Figura 2

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2$
- $\hat{A}CB = 30^\circ$

Seja $\alpha = \hat{BAC} = 30^\circ$. Qual das expressões seguintes representa \overline{BC} , em função de α ?

- (A) $4 \operatorname{sen} \alpha$ (B) $6 \operatorname{sen} \alpha$ (C) $4 \operatorname{cos} \alpha$ (D) $6 \operatorname{cos} \alpha$

(Teste Intermédio 2012)

27. Na Figura 5, está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico.

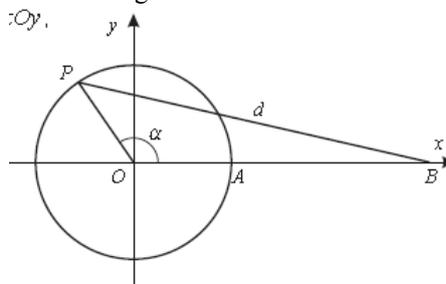


Figura 5

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (1, 0)
- o ponto B tem coordenadas (3, 0)

Considere que um ponto P se move sobre a circunferência.

Para cada posição do ponto P, seja $d = \overline{PB}$ e seja $\alpha \in [0, 2\pi[$ a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta \hat{OP} . Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Mostre que $d^2 = 10 - 6 \operatorname{cos} \alpha$

Sugestão: Exprima as coordenadas do ponto P em função de α e utilize a fórmula da distância entre dois pontos.

b) Resolva os dois itens seguintes tendo em conta que $d^2 = 10 - 6 \operatorname{cos} \alpha$

b₁) Determine os valores de $\alpha \in [0, 2\pi[$ para os quais $d^2 = 7$
 b₂) Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $[0, \pi]$,
 tem-se $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{35}$. Determine d , para esse valor de α
 (Teste Intermédio 2012)

28. Considere o intervalo $[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}]$. Qual das equações seguintes não tem solução neste intervalo?
 (A) $\cos x = -0,5$ (B) $\sin x = -0,5$
 (C) $\cos x = -0,9$ (D) $\sin x = -0,9$
 (Teste Intermédio 2013)

29. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico. Os pontos A, B, C e D são os pontos de intersecção da circunferência com os eixos do referencial. Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta \vec{OP} ($\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$)

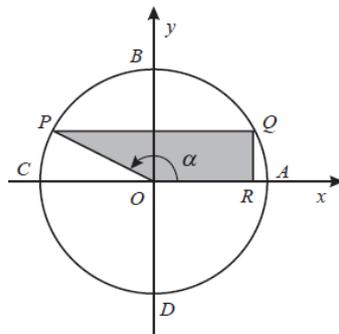


Figura 3

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.
 a) Mostre que a área do trapézio [OPQR] é dada por $-\frac{3}{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
 b) Para uma certa posição do ponto P, a reta OP intersecta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$. Determine, para essa posição do ponto P, a área do trapézio [OPQR]. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
 (Teste Intermédio 2013)

30. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao intervalo $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$?
 (A) $\sin x + \cos x$ (B) $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$ (C) $\operatorname{tg} x - \sin x$ (D) $\sin x \times \operatorname{tg} x$
 (Teste Intermédio 2014)

31. Considere, em \mathbb{R} , a equação trigonométrica $\sin x = 0,3$. Quantas soluções tem esta equação no intervalo $[-20\pi, 20\pi[$?
 (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80
 (Teste Intermédio 2014)

32. Na Figura 3, estão representados:
 • o retângulo [ABCD], em que $\overline{DC} = 1$ e $\overline{BC} = 2$
 • o ponto O, ponto médio do segmento [AD]
 • uma semicircunferência de centro no ponto O e raio 1

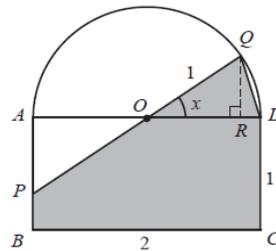


Figura 3

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta [AB], nunca coincidindo com A, mas podendo coincidir com B. Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto de intersecção da reta PO com a semicircunferência. Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo DOQ ($x \in]0, \frac{\pi}{4}[$)

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.
 a) Mostre que a área do polígono [BCDQP], representado a sombreado, é dada, em função de x , por $2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}$
 b) Para uma certa posição do ponto P, tem-se $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\frac{3}{5}$. Determine, para essa posição do ponto P, a área do polígono [BCDQP]. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
 (Teste Intermédio 2014)

Soluções: 1.. A	2. B	3. B	4. B	5. -1	6. D	7. D	8. C	9. $\sqrt{60}$	10. B	11. B	12. A	13. B
14. C	15. $\pi/4; 19/5$	16. A	17. C	18. D	19. C	20. $\pi/3; 38/3$	21. C	22. B	23. D	24. $9/4$	25. B	
26. A	27. $\pi/3 \vee 5\pi/3; \sqrt{11}$	28. D	29. $252/625$	30. C	31. B	32. $77/40$						

