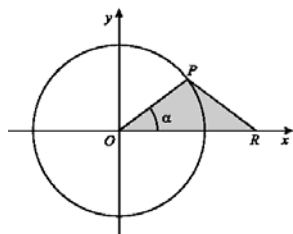


Exercícios de 11.º ano nos Testes Intermédios

TRIGONOMETRIA

1. Na figura está representado o círculo trigonométrico e um triângulo [OPR].



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante. O ponto R desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que o triângulo [OPR] sempre isósceles. Sendo  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo ROP, qual das expressões seguintes dá a área do triângulo [OPR], em função de  $\alpha$ ?

- (A)  $\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$  (B)  $2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$   
 (C)  $\frac{1 + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$  (D)  $\frac{(1 + \cos \alpha) \cdot \text{sen } \alpha}{2}$   
 (Teste Intermédio 2006)

2. Da amplitude  $\alpha$  de um certo ângulo orientado sabe-se que  $\cos \alpha < 0$  e  $\text{tg } \alpha > 0$ . Qual das expressões seguintes dá o valor de  $\text{sen } \alpha$ ?

- (A)  $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  (B)  $-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$   
 (C)  $\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$  (D)  $-\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$   
 (Teste Intermédio 2006)

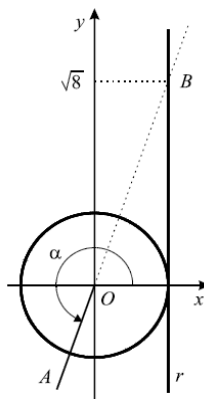
3. Sabe-se que  $\beta \in \mathbb{R}$  é uma solução da equação  $\text{sen } x = \frac{1}{5}$ . Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação  $\cos x = -\frac{1}{5}$ ?

- (A)  $\pi + \beta$  (B)  $\frac{\pi}{2} + \beta$  (C)  $-\beta$  (D)  $\frac{\pi}{2} - \beta$   
 (Teste Intermédio 2006)

4. Indique as soluções da equação  $5 + 2\cos x = 6$  que pertencem ao intervalo  $[0, 2\pi]$

- (A)  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3}$   
 (C)  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{7\pi}{6}$  (D)  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{11\pi}{6}$   
 (Teste Intermédio 2007)

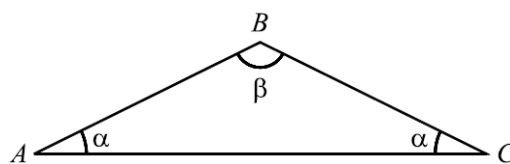
5. Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy: • o círculo trigonométrico; • a recta r, de equação  $x=1$ ; • o ângulo, de amplitude  $\alpha$ , que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta  $\hat{O}A$ ; • o ponto B, intersecção do prolongamento da semi-recta  $\hat{O}A$  com a recta r. Como a figura sugere, a ordenada de B é  $\sqrt{8}$ . Sem recorrer à calculadora, determine o valor de



$5 \text{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \cos(3\pi - \alpha)$

(Teste Intermédio 2007)

6. Na figura está representado um triângulo [ABC] com dois ângulos de amplitude  $\alpha$  e um ângulo de amplitude  $\beta$ .



Qual das igualdades seguintes é verdadeira, para qualquer triângulo nestas condições?

- (A)  $\cos \beta = \text{sen}(2\alpha)$  (B)  $\cos \beta = \cos(2\alpha)$   
 (C)  $\cos \beta = -\text{sen}(2\alpha)$  (D)  $\cos \beta = -\cos(2\alpha)$   
 (1.º Teste Intermédio 2008)

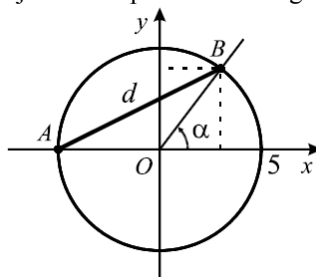
7. Seja  $\theta$  um valor pertencente ao intervalo  $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ . Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

- (A)  $\cos \theta - \text{sen } \theta$  (B)  $\text{sen } \theta \times \cos \theta$   
 (C)  $\text{sen } \theta \times \text{tg } \theta$  (D)  $\text{sen } \theta - \text{tg } \theta$   
 (1.º Teste Intermédio 2008)

8. Considere a equação  $1 + 3\text{tg}(2x) = 4$ . Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

- (A)  $-\frac{\pi}{8}$  (B)  $\frac{3\pi}{8}$  (C)  $\frac{5\pi}{8}$  (D)  $\frac{7\pi}{8}$   
 (1.º Teste Intermédio 2008)

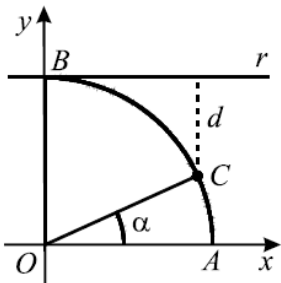
9. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy, uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O ponto A também pertence ao eixo das abcissas. Admita agora que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante. Para cada posição do ponto B, seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta  $\hat{O}B$ . Seja  $d$  o comprimento do segmento [AB].



- a) Mostre que  $d^2 = 50 + 50 \cos \alpha$   
 b) Para uma certa posição do ponto B, tem-se  $\text{tg } \alpha = \sqrt{24}$ . Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de  $d$ .

(1.º Teste Intermédio 2008)

10. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial e raio igual a 1. A recta r tem equação  $y = 1$ . O ponto C pertence ao arco AB. Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo AOC.



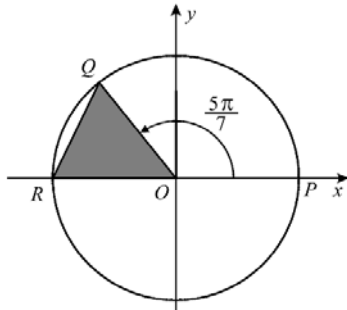
Qual das expressões seguintes dá a distância  $d$  do ponto  $C$  à recta  $r$ ?

- (A)  $1+\sin(\alpha)$  (B)  $1-\sin(\alpha)$  (C)  $1+\cos(\alpha)$  (D)  $1-\cos(\alpha)$   
(2.º Teste Intermédio 2008)

11. Seja  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

- (A)  $\cos(\pi-x)$  (B)  $\sin(\pi-x)$   
(C)  $\cos(\frac{3\pi}{2}-x)$  (D)  $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)$   
(2.º Teste Intermédio 2008)

12. Na figura está representado o círculo trigonométrico.



Tal como a figura sugere,  $O$  é a origem do referencial,  $Q$  pertence à circunferência,  $P$  é o ponto de coordenadas  $(1,0)$  e  $R$  é o ponto de coordenadas  $(-1,0)$ . A amplitude, em radianos, do ângulo  $POQ$  é  $\frac{5\pi}{7}$ . Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo  $[OQR]$ ?

- (A) 0,39 (B) 0,42 (C) 0,46 (D) 0,49  
(2.º Teste Intermédio 2008-12.º ano)

13. Considere a equação trigonométrica  $\cos x = 0,3$ . Num dos intervalos seguintes, esta equação tem apenas uma solução. Em qual deles?

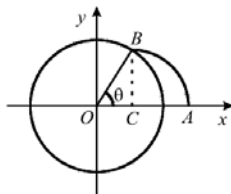
- (A)  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (B)  $[0, \pi]$  (C)  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  (D)  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$   
(1.º Teste Intermédio 2009)

14. Na figura estão representados, em referencial o.n.  $xOy$ :

- o círculo trigonométrico
- o raio  $[OB]$  deste círculo
- o arco de circunferência  $AB$ , de centro no ponto  $C$

Tal como a figura sugere, o ponto  $B$  pertence ao primeiro quadrante, os pontos  $A$  e  $C$  pertencem ao eixo  $Ox$  e a recta  $BC$  é perpendicular a este eixo. Seja  $\theta$  a amplitude do ângulo  $AOB$ . Qual é a abcissa do ponto  $A$ ?

- (A)  $1+\sin\theta$  (B)  $1+\cos\theta$  (C)  $\cos\theta+\sin\theta$  (D)  $1+\cos\theta+\sin\theta$   
(1.º Teste Intermédio 2009)



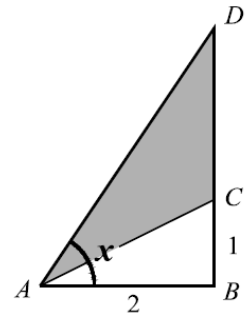
15. Relativamente à figura junta, sabe-se que:

- o triângulo  $[ABD]$  é rectângulo
- o ponto  $C$  pertence ao cateto  $[BD]$
- $x$  designa a amplitude, em radianos, do ângulo  $BAD$
- $\overline{AB} = 2$  e  $\overline{BC} = 1$

a) Mostre que a área do triângulo  $[ACD]$  é dada por  $2\text{tg}(x)-1$

b) Determine o valor de  $x$  para o qual a área do triângulo  $[ACD]$  é igual a 1.

c) Sabendo que  $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + a) = \frac{5}{13}$  e que  $a \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , determine o valor de  $2\text{tg}(a)-1$



(1.º Teste Intermédio 2009)

16. Na figura 1 está representado, em referencial o.n.  $xOy$ , o círculo trigonométrico. Os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem à circunferência, sendo a recta  $PQ$  paralela ao eixo  $Ox$ . O ponto  $R$  pertence ao eixo  $Ox$ . O ângulo  $ROP$  tem  $53^\circ$  de amplitude. Qual é o perímetro do triângulo  $[OPQ]$  (valor aproximado às décimas)?

- (A) 3,2 (B) 3,4 (C) 3,6 (D) 3,8

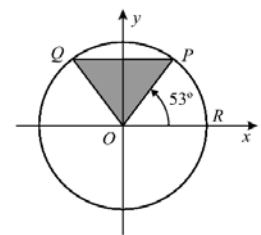


Figura 1

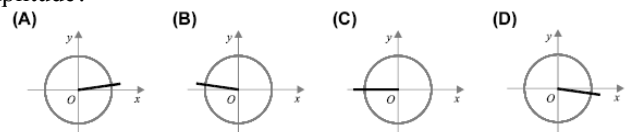
(2.º Teste Intermédio 2009)

17. A Inês olhou para o seu relógio quando este marcava 10 h e 45 min. Passado algum tempo, ao ver novamente as horas, a Inês concluiu que o ponteiro dos minutos tinha rodado  $-3\pi$  radianos. Que horas marcava o relógio da Inês, neste último instante?

- (A) 11 h e 15 min (B) 11 h e 45 min  
(C) 12 h e 15 min (D) 13 h e 45 min

(2.º Teste Intermédio 2009)

18. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$ . Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?



(1.º Teste Intermédio 2010)

19. Considere a equação trigonométrica  $\text{sen}x = 0,1$ . Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

- (A)  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (B)  $[0, \pi]$   
(C)  $[0, \frac{\pi}{6}]$  (D)  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

(1.º Teste Intermédio 2010)

20. Na figura 1, está representado o quadrado  $[ABCD]$  de lado 2.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do lado [CD], nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto D. Para cada posição do ponto P, seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo BAP ( $x \in ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ )

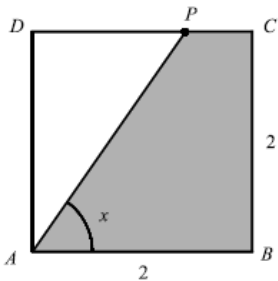


Figura 1

Resolva os três itens seguintes, sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

a) Mostre que a área da região sombreada é dada por  $4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$

b) Determine o valor de  $x$  para o qual a área da região sombreada é  $\frac{12-2\sqrt{3}}{3}$

c) Para um certo valor de  $x$ , sabe-se que  $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{15}{17}$

Determine, para esse valor de  $x$ , a área da região sombreada. (1.º Teste Intermédio 2010)

21. Considere, em  $\mathbb{R}$ , a equação trigonométrica  $\cos x = 0,9$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

- (A)  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (B)  $[0, \pi]$  (C)  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$  (D)  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

(1.º Teste Intermédio 2011)

22. Na Figura 2, está representado o círculo trigonométrico. Sabe-se que:

- a recta  $r$  é tangente à circunferência no ponto A(1,0)
  - a recta  $s$  passa na origem e intersecta a recta  $r$  no ponto P, cuja ordenada é 2
  - o ponto Q, situado no terceiro quadrante, pertence à recta  $s$
- Seja  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo  $Ox$  e por lado extremidade a semi-recta OQ

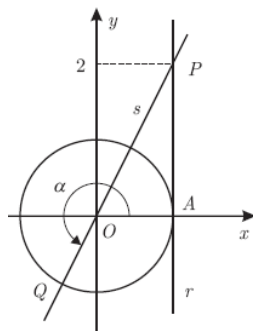


Figura 2

Qual é o valor de  $\alpha$ , arredondado às centésimas?

- (A) 4,23 (B) 4,25 (C) 4,27 (D) 4,29

(1.º Teste Intermédio 2011)

23. Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\theta$  três números reais. Sabe-se que:

- $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{4}[$
- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\alpha + \theta = 2\pi$

Qual das expressões seguintes é equivalente a  $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta$ ?

- (A)  $2 \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cos}\alpha$  (B)  $2 \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{cos}\alpha$   
(C)  $-\operatorname{cos}\alpha$  (D)  $\operatorname{cos}\alpha$

(1.º Teste Intermédio 2011)

24. Determine o valor de  $3 - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$  sabendo que  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  e que  $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\frac{4}{5}$ . Resolva este item sem recorrer à calculadora.

(2.º Teste Intermédio 2011)

25. Seja  $\theta$  um número real. Sabe-se que  $\theta$  é uma solução da equação  $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$ . Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ ?

- (A)  $\pi - \theta$  (B)  $\pi + \theta$  (C)  $\frac{\pi}{2} - \theta$  (D)  $\frac{\pi}{2} + \theta$

(Teste Intermédio 2012)

26. Considere o triângulo [ABC] representado na Figura 2.

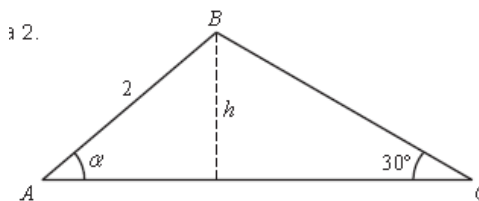


Figura 2

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2$
- $\hat{A}CB = 30^\circ$

Seja  $\alpha = \hat{BAC} = 30^\circ$ . Qual das expressões seguintes representa  $\overline{BC}$ , em função de  $\alpha$ ?

- (A)  $4 \operatorname{sen} \alpha$  (B)  $6 \operatorname{sen} \alpha$  (C)  $4 \operatorname{cos} \alpha$  (D)  $6 \operatorname{cos} \alpha$

(Teste Intermédio 2012)

27. Na Figura 5, está representado, num referencial o.n.  $xOy$ , o círculo trigonométrico.

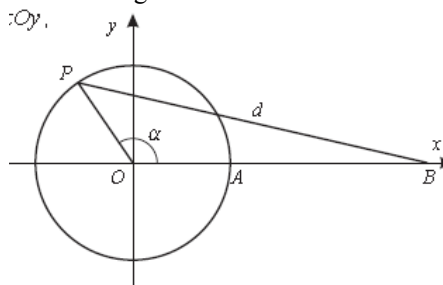


Figura 5

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (1, 0)
- o ponto B tem coordenadas (3, 0)

Considere que um ponto P se move sobre a circunferência.

Para cada posição do ponto P, seja  $d = \overline{PB}$  e seja  $\alpha \in [0, 2\pi[$  a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cujo lado extremidade é a semi-recta  $\hat{OP}$ . Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Mostre que  $d^2 = 10 - 6 \operatorname{cos} \alpha$

Sugestão: Exprima as coordenadas do ponto P em função de  $\alpha$  e utilize a fórmula da distância entre dois pontos.

b) Resolva os dois itens seguintes tendo em conta que  $d^2 = 10 - 6 \operatorname{cos} \alpha$

b<sub>1</sub>) Determine os valores de  $\alpha \in [0, 2\pi[$  para os quais  $d^2 = 7$   
 b<sub>2</sub>) Para um certo valor de  $\alpha$  pertencente ao intervalo  $[0, \pi]$ ,  
 tem-se  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{35}$ . Determine  $d$ , para esse valor de  $\alpha$   
 (Teste Intermédio 2012)

28. Considere o intervalo  $[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}]$ . Qual das equações seguintes não tem solução neste intervalo?  
 (A)  $\cos x = -0,5$  (B)  $\sin x = -0,5$   
 (C)  $\cos x = -0,9$  (D)  $\sin x = -0,9$   
 (Teste Intermédio 2013)

29. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n.  $xOy$ , o círculo trigonométrico. Os pontos A, B, C e D são os pontos de intersecção da circunferência com os eixos do referencial. Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q. Seja  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta  $\hat{OP}$  ( $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ )

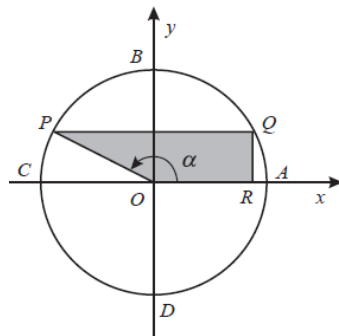


Figura 3

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.  
 a) Mostre que a área do trapézio [OPQR] é dada por  $-\frac{3}{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$   
 b) Para uma certa posição do ponto P, a reta OP intersecta a reta de equação  $x = 1$  num ponto de ordenada  $-\frac{7}{24}$ .  
 Determine, para essa posição do ponto P, a área do trapézio [OPQR]. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

(Teste Intermédio 2013)

30. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer  $x$  pertencente ao intervalo  $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ ?  
 (A)  $\sin x + \cos x$  (B)  $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$  (C)  $\operatorname{tg} x - \sin x$  (D)  $\sin x \times \operatorname{tg} x$   
 (Teste Intermédio 2014)

31. Considere, em  $\mathbb{R}$ , a equação trigonométrica  $\sin x = 0,3$ . Quantas soluções tem esta equação no intervalo  $[-20\pi, 20\pi[$ ?  
 (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80  
 (Teste Intermédio 2014)

32. Na Figura 3, estão representados:  
 • o retângulo [ABCD], em que  $\overline{DC} = 1$  e  $\overline{BC} = 2$   
 • o ponto O, ponto médio do segmento [AD]  
 • uma semicircunferência de centro no ponto O e raio 1

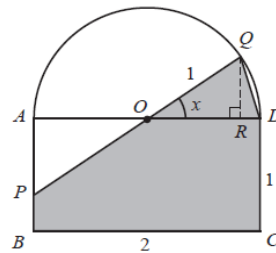


Figura 3

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta [AB], nunca coincidindo com A, mas podendo coincidir com B. Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto de intersecção da reta PO com a semicircunferência. Seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo DOQ ( $x \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ )

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.  
 a) Mostre que a área do polígono [BCDQP], representado a sombreado, é dada, em função de  $x$ , por

$$2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

b) Para uma certa posição do ponto P, tem-se  $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\frac{3}{5}$ . Determine, para essa posição do ponto P, a área do polígono [BCDQP]. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

(Teste Intermédio 2014)

<b>Soluções:</b> 1.. A	2. B	3. B	4. B	5. -1	6. D	7. D	8. C	9. $\sqrt{60}$	10. B	11. B	12. A	13. B
14. C	15. $\pi/4; 19/5$	16. A	17. C	18. D	19. C	20. $\pi/3; 38/3$	21. C	22. B	23. D	24. $9/4$	25. B	
26. A	27. $\pi/3 \vee 5\pi/3; \sqrt{11}$	28. D	29. $252/625$	30. C	31. B	32. $77/40$						

