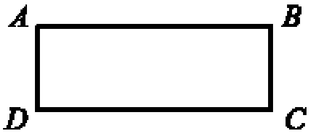
Exercícios de 11.º ano nos Testes Intermédios (e em exames nacionais)

GEOMETRIA

1. Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 160 hectares. Pretende semear pelo menos 50 hectares de trigo e pelo menos 30 hectares de milho.
Sabe-se que: • o custo de produção de um hectare de trigo é 1500 euros; • o custo de produção de um hectare de milho é 1000 euros; e que: • cada hectare de trigo dá um lucro de 600 euros; • cada hectare de milho dá um lucro de 500 euros.
Sabendo ainda que o agricultor não pode investir mais do que 200000 euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear
de modo que tenha um lucro máximo?

(Teste intermédio 2006)

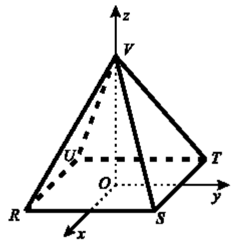
2. Na figura está representado um rectângulo [ABCD].



Mostre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ é igual a $\overline{AB}^2$

(Teste intermédio 2006)

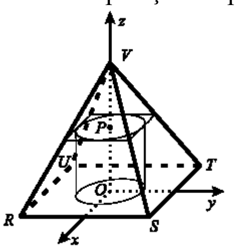
3. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide regular. Sabe-se que:



• a base [RSTU] é um quadrado de área 4 com centro na origem do referencial;
• a aresta [RS] é paralela ao eixo Oy;
• o vértice V tem coordenadas (0,0,2).

a) Mostre que a recta definida pela condição
$x=0 \wedge y=2z$ é perpendicular ao plano STV e escreva uma equação deste plano.

b) Considere agora um ponto P que se desloca ao longo do segmento [OV], nunca coincidindo com o ponto O, nem com o ponto V.
Para cada posição do ponto P considere o cilindro tal que:



• a base inferior do cilindro tem centro na origem do referencial e está contida no plano xOy; • a base superior do cilindro tem centro no ponto P e está inscrita no quadrado que é a secção produzida na pirâmide pelo plano
paralelo ao plano xOy que passa no ponto P.
Seja z a cota do ponto P e seja f a função que dá o volume do cilindro, em função de z.

b_1) Justifique que o domínio da função f é o intervalo $]0,2[$

e que $f(z) = \pi\left(\frac{z^3}{4} - z^2 + z\right)$

b_2) Considere o seguinte problema: *Entre que valores deve variar a cota do ponto P de tal modo que o volume do cilindro seja superior à quinta parte do volume da pirâmide*? Traduza o problema por meio de uma inequação e, utilizando a sua calculadora, resolva-a <u>graficamente</u>. Apresente os valores pedidos arredondados às milésimas. Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

(Teste intermédio 2006)

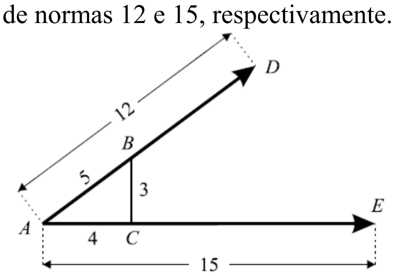
4. A turma da Isabel decidiu fazer arranjos florais, utilizando flores do horto da escola, para vender no Dia dos Namorados. Idealizaram arranjos formados por margaridas, rosas e violetas. Dispõem de: 192 margaridas, 88 rosas e 112 violetas. Pensaram formar dois tipos de arranjos: A e B. Cada arranjo do tipo A:
• será composto por 16 margaridas, 4 rosas e 8 violetas;
• dará um lucro de 3 euros.
Cada arranjo do tipo B:
• será composto por 8 margaridas, 8 rosas e 8 violetas;
• dará um lucro de 2 euros.

a) A Isabel sugeriu que se fizessem 7 arranjos de cada tipo. O Dinis sugeriu que se fizessem 10 arranjos do tipo A e 5 do tipo B. Averigúe se cada uma destas propostas é, ou não, viável, tendo em conta as flores disponíveis.

b) Determine o número de arranjos de cada tipo que os alunos devem produzir, para obterem o maior lucro possível (admitindo que vendem todos os arranjos).

(Exame de Matemática B 1.ª fase-2006)

5. Na figura estão representados dois vectores, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$, de normas 12 e 15, respectivamente.



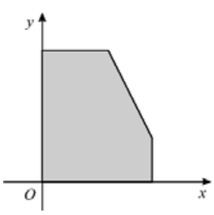
No segmento de recta [AD] está assinalado um ponto B. No segmento de recta [AE] está assinalado um ponto C. O triângulo [ABC] é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Indique o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$

(A) 108 (B) 128 (C) 134 (D) 144

(Teste intermédio 2007)

6. Na figura junta está representada a região admissível de um problema de Programação Linear. Esta região corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 6 \\ 2x + y \leq 12 \end{cases}$$



Qual é o valor máximo que a função objectivo, definida por $z=x+y$, pode alcançar nesta região?
(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13

(Teste intermédio 2007)

7. Considere, em referencial o.n. Oxyz, o ponto P(0,4,3). Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à recta de equação vectorial $(x,y,z)=(0,1,-3)+k(1,0,2),\ k\in\mathbb{R}$

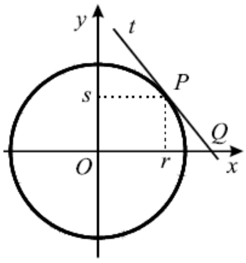
Determine a área da secção produzida pelo plano α na esfera definida pela condição $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\leq 3$.

***Sugere-se que**:*

- *Determine uma equação do plano α.*
- *Mostre que o centro da esfera pertence ao plano α.*
- *Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.*

(Teste intermédio 2007)

8. Considere um ponto P, do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.



Sejam (r,s) as coordenadas do ponto P. Seja t a recta tangente à circunferência no ponto P. Seja Q o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox. Prove que a abcissa do ponto Q é $\dfrac{1}{r}$

(Teste intermédio 2007)

9. Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia eléctrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: energia de origem convencional, maioritariamente resultante da combustão de fuel, ou, em alternativa, energia eólica. Para uma cobertura razoável de iluminação, no período nocturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a 40 Mwh. Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida. Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:• o preço por cada Mwh é de 80 euros. Relativamente à energia eólica, tem-se:
• o preço por cada Mwh é de 90 euros;• o fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os 40 Mwh.
Represente por x a quantidade de energia de origem convencional e por y a quantidade de energia eólica consumidas pela autarquia. Determine que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.
Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique as restrições do problema;
- indique a função objectivo;
- represente graficamente a região admissível (referente ao sistema das
restrições);
- indique os valores de x e y para os quais é mínima a função objectivo.

(Exame de Matemática B 1ªfase-2007)

10. Num referencial o. n. *Oxyz*, sejam α e β os planos definidos pelas equações: α: $x+y-z=1$ e
β: $2x+2y-2z=1$.

A intersecção dos planos α e β é
(A) o conjunto vazio (B) um ponto
(C) uma recta (D) um plano

(1.º Teste intermédio 2008)

11. Considere o seguinte problema: *Uma frutaria confecciona dois tipos de bebidas com sumo de laranja e sumo de manga.*
Bebida X : com um litro de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.
Bebida Y : com dois litros de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.
Para confeccionar estas bebidas, a frutaria dispõe diariamente de 12 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga. Cada litro de bebida X dá um lucro de 4 euros e cada litro de bebida Y dá um lucro de 5 euros. Supondo que a frutaria vende diariamente toda a produção destas bebidas, quantos litros de bebida X e quantos litros de bebida Y deve confeccionar por dia, para maximizar o lucro? Sendo x o número de litros de bebida X e sendo y o número de litros de bebida Y, qual das opções seguintes traduz correctamente este problema?

(A) Maximizar $4x+5y$ sujeito a

$$\begin{cases} x\geq 0\\ y\geq 0\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}\leq 12\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\leq 10\end{cases}$$

(B) Maximizar $12x+10y$ sujeito a

$$\begin{cases} x\geq 0\\ y\geq 0\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}\leq 5\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\leq 4\end{cases}$$

(C) Maximizar $4x+5y$ sujeito a

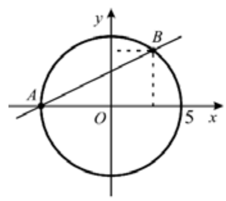
$$\begin{cases} x\geq 0\\ y\geq 0\\ x+2y\leq 12\\ x+y\leq 10\end{cases}$$

(D) Maximizar $12x+10y$ sujeito a

$$\begin{cases} x\geq 0\\ y\geq 0\\ x+2y\leq 5\\ x+y\leq 4\end{cases}$$

(1.º Teste intermédio 2008)

12. Na figura estão representadas, em referencial o. n. *xOy*, uma recta *AB* e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5. Os pontos *A* e *B* pertencem à circunferência. O ponto *A* também pertence ao eixo das abcissas. Admitindo que o declive da recta *AB* é igual ½, resolva as três alíneas seguintes:



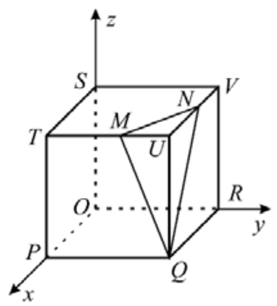
a). Mostre que uma equação da recta *AB* é $x-2y+5=0$

b) Mostre que o ponto *B* tem coordenadas (3,4)

c) Seja *C* o ponto de coordenadas (–3,16). Verifique que o triângulo [*ABC*] é rectângulo em *B*.

(1.º Teste intermédio 2008)

13. Na figura está representado, em referencial o. n. *Oxyz*, um cubo [*OPQRSTUV*] de aresta 5. O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial.



Os vértices P, R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente. O triângulo escaleno $[MNQ]$ é a secção produzida no cubo pelo plano α de equação $10x + 15y + 6z = 125$

a) Escreva uma condição que defina a recta que passa por U e é perpendicular ao plano α

b) Seja β a amplitude, em graus, do ângulo MQN. Determine β. Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Sugestão: comece por determinar as coordenadas dos pontos M e N

(1.º Teste intermédio 2008)

14. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta r?

(A) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (0, 0, 1) + k(1, 2, 3), k \in \mathbb{R}$

(C) $x = 2 \wedge y = 1$

(D) $x = 2 \wedge z = 1$

(2.º Teste intermédio 2008)

15. Numa determinada região do interior, as chuvas torrenciais causaram inundações, e a região foi considerada zona de catástrofe. Os prejuízos acentuaram-se muito nas actividades agrícolas. Para enfrentar esta situação, os organismos ligados aos serviços agro-pecuários decidiram adquirir rações para animais. Foram pedidos, com urgência, dois tipos de ração: FarX e FarY.

A FARJO é uma fábrica especializada na produção destes tipos de ração. Estas rações contêm três aditivos: vitaminas, sabores e conservantes. Por cada tonelada de ração do tipo FarX, são necessários dois quilogramas de vitaminas, um quilograma de sabores e um quilograma de conservantes. Por cada tonelada de ração do tipo FarY, são necessários um quilograma de vitaminas, dois quilogramas de sabores e três quilogramas de conservantes. A FARJO dispõe, diariamente, de 16 quilogramas de vitaminas, 11 quilogramas de sabores e 15 quilogramas de conservantes. Estas são as únicas restrições na produção destas rações.

Represente por x a quantidade de ração FarX produzida diariamente, expressa em toneladas, e por y a quantidade de ração FarY produzida diariamente, expressa em toneladas.

a) É possível a FARJO fabricar, num só dia, 4 toneladas de FarX e 3 toneladas de FarY? Justifique.

b) Quais são as quantidades de ração de cada tipo que devem ser produzidas, de modo que a quantidade total de ração produzida diariamente seja máxima?

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

• indique as restrições do problema;
• indique a função objectivo;
• represente graficamente a região admissível, referente ao sistema de restrições;
• indique os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

(Exame de Matemática B 2.ª fase-2008)

16. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

A intersecção desta superfície com o plano xOy é

(A) o conjunto vazio (B) um ponto

(C) uma circunferência (D) um círculo

(1.º Teste intermédio 2009)

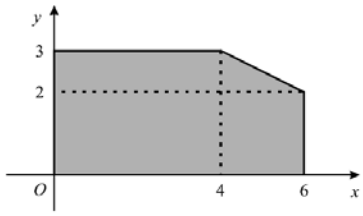
17. Considere, num referencial o. n. xOy, a recta r de equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$. Seja s a recta perpendicular a r que passa no ponto de coordenadas (1,4). Qual é a equação reduzida da recta s?

(A) $y = 2x + 2$ (B) $y = -2x + 6$

(C) $y = -2x + \frac{5}{3}$ (D) $y = 2x + \frac{3}{5}$

(1.º Teste intermédio 2009)

18. Num certo problema de Programação Linear, pretende-se maximizar a função objectivo, a qual é definida por $L = 3x + y$. Na figura está representada a região admissível.



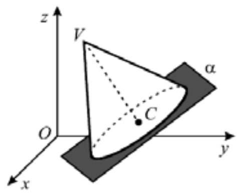
Qual é a solução desse problema?

(A) $x = 6$ e $y = 3$ (B) $x = 4$ e $y = 2$

(C) $x = 4$ e $y = 3$ (B) $x = 6$ e $y = 2$

(1.º Teste intermédio 2009)

19. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cone de revolução. Sabe-se que:



• a base do cone está contida no plano α de equação $x + 2y - 2z = 11$
• o vértice V do cone tem coordenadas (1,2,6)
• o ponto C é o centro da base do cone

a) Determine uma equação do plano γ que contém o vértice do cone e que é paralelo ao plano α

b) Seja β o plano definido pela equação $2x - y + z = 3$. Averigúe se os planos α e β são perpendiculares.

c) Seja W o ponto simétrico do ponto V, em relação ao plano xOy. Indique as coordenadas do ponto W e escreva uma condição que defina o segmento de recta $[VW]$.

d) Sabendo que o raio da base do cone é igual a 3, determine o volume do cone.

Sugestão: comece por escrever uma condição que defina a recta que contém o vértice do cone e que é perpendicular ao plano α e utilize-a para determinar as coordenadas do

ponto C.

(1.º Teste intermédio 2009)

20. Na figura está representada uma circunfe-rência de centro O e raio r.

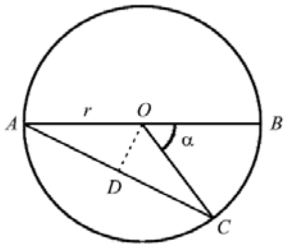
Sabe-se que:

• $[AB]$ é um diâmetro da circunferência
• O ponto C pertence à circunferência
• α é a amplitude do ângulo COB

• $[OD]$é perpendicular a $[AC]$

Prove que

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4r^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})$



<u>Sugestão</u>

Percorra as seguintes etapas:

• *Justifique que o triângulo [OAC]é isósceles*

• *Justifique que* $\overline{AC} = 2\overline{AD}$

• *Justifique que a amplitude do ângulo CAB é* $\frac{\alpha}{2}$

• *Escreva* $\overline{AD}$*, em função de* $\frac{\alpha}{2}$ *e de* r

• *Conclua que* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4r^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})$

(1.º Teste intermédio 2009)

21. Seja $[AB]$ o diâmetro de uma esfera de centro C e raio 5. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$?

(A) -25 (B) $-5\sqrt{2}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 25

(2.º Teste intermédio 2009)

22. A BRUGÁS é uma empresa que processa uma variedade de gás usada na confecção de um produto para aquecimento. Este produto é classificado em dois tipos: PPremium e PRegular. Em cada semana, a BRUGÁS recebe 24m^3 de gás e dispõe de 45 horas para os processar. Por motivos técnicos, as variedades de gás não podem ser processadas em simultâneo. A produção de cada tonelada de PPremium:

• requer 3 m^3 de gás;
• demora 5 horas;
• gera um lucro de 1600 euros.

A produção de cada tonelada de PRegular :

• requer 2 m^3 de gás;
• demora 5 horas;
• gera um lucro de 1200 euros.

Devido a problemas relacionados com o armazenamento, a empresa só pode produzir até 5 toneladas de PRegular. Represente por x o número de toneladas de PPremium produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS. Represente por y o número de toneladas de PRegular produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS. Quantas toneladas de PPremium e de PRegular devem ser produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS, para que o lucro semanal seja máximo? Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

• indique a função objectivo;
• indique as restrições do problema;
• represente, graficamente, a região admissível, referente ao sistema de restrições;
• calcule os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

(Exame de Matemática B 2.ª fase-2009)

23. Considere, num referencial o.n. xOy, as rectas r e s, definidas, respectivamente, por:

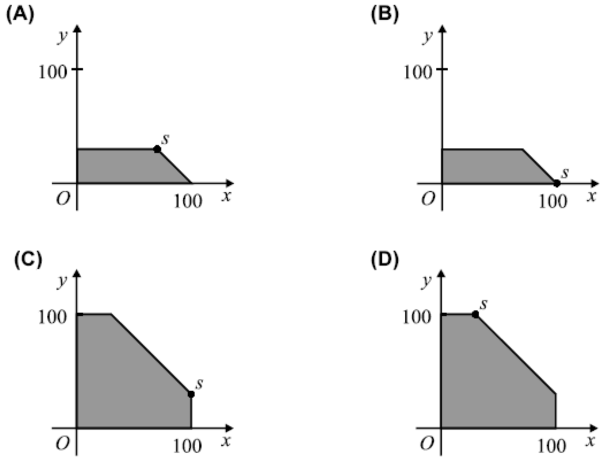
$r : (x, y) = (1, 3) + k(2, 0), k \in \mathbb{R}$ $\qquad s : y = \frac{4}{5}x + 1$

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo destas duas rectas (valor arredondado às unidades)?

(A) 37° (B) 39° (C) 41° (D) 43°

(1.º Teste intermédio 2010)

24. Considere o seguinte problema de Programação Linear: *Um agricultor tem um terreno com 100 hectares, onde pretende semear centeio e tomate. Devido a problemas de regadio, não pode semear mais do que 30 hectares de tomate. Cada hectare de centeio dá um lucro de 800 euros e cada hectare de tomate dá um lucro de 1000 euros. Quantos hectares de centeio e quantos hectares de tomate deve o agricultor semear, de modo a obter o maior lucro possível?* Seja x o número de hectares de centeio e seja y o número de hectares de tomate. Em qual das figuras seguintes está representada a região admissível deste problema e nela assinalado o vértice S correspondente à solução?



(1.º Teste intermédio 2010)

25. Considere, num referencial o.n. xOy, a recta r e o plano α, definidos, respectivamente, por:

$r : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z \qquad \alpha : y - 2z = 0$

Qual é a intersecção da recta r com o plano α?

(A) É o ponto (3,2,0) (B) É o ponto (0,0,0)
(C) É a recta r (D) É o conjunto vazio.

(1.º Teste intermédio 2010)

26. Na figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de equação

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

O ponto C é o centro da circunferência.

a) O ponto A, de coordenadas $(0,-3)$, pertence à circunferência. A recta t é tangente à circunferência no ponto A. Determine a equação reduzida da recta t

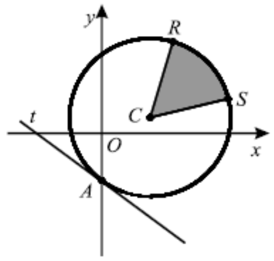


Figura 2

b) R e S são dois pontos da circunferência. A área da região sombreada é $\frac{25\pi}{6}$. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CR} \cdot \overrightarrow{CS}$

(1.º Teste intermédio 2010)

27. Na figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDV] cuja base está contida no plano xOy. Sabe-se que:

• o ponto D pertence ao eixo Oy
• o ponto A tem coordenadas (3,2,0)

• o ponto V pertence ao plano de equação $z = 6$
• $6x + 18y - 5z = 54$ é uma equação do plano DAV
• $18x - 6y - 5z = -18$ é uma equação do plano DCV
a) Determine o volume da pirâmide.
b) Determine as coordenadas do ponto V, <u>sem recorrer à calculadora</u>.

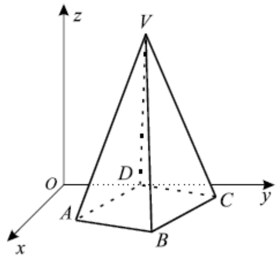


Figura 3

c) Seja S o ponto de coordenadas $(-15,8,5)$. Seja r a recta que contém o ponto S e é perpendicular ao plano DCV. Averigúe se a recta r contém o ponto A

(1.º Teste intermédio 2010)

28. Seja [AB] um diâmetro de uma esfera de centro C e raio 4. Qual é o valor do produto escalar $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$?
(A) 16 (B) −16 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $-4\sqrt{2}$

(2.º Teste intermédio 2010)

29. Na figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, parte de um plano ABC. Cada um dos pontos A, B e C pertence a um eixo coordenado. O plano ABC é definido pela equação
$6x + 3y + 4z = 12$

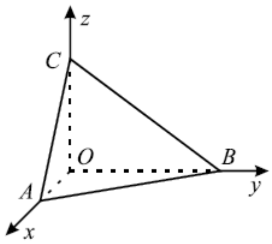


Figura 4

Seja r a recta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC.
Determine uma equação vectorial da recta r

(2.º Teste intermédio 2010)

30. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica E, de equação $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, o ponto P, de coordenadas (tgα,senα,2+cosα), pertence à superfície esférica E. Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto P.

(2.º Teste intermédio 2010)

31. A CADTEL é uma cadeia de grandes hotéis e possui dois hotéis, numa certa região, distanciados alguns quilómetros um do outro: o VISTASERRA e o VISTAMAR. Estes dois grandes hotéis diferem no modo de funcionamento e na especificidade dos serviços que prestam aos seus clientes. A disponibilidade de quartos é a seguinte:
• VISTASERRA: 500 quartos;
• VISTAMAR: 600 quartos.
Cada hotel tem a sua equipa fixa de trabalhadores. Além destes, a CADTEL dispõe de uma bolsa comum de recursos humanos, formada por trabalhadores que desempenham funções em qualquer dos dois hotéis, de acordo com as necessidades de serviço de cada hotel. Admita que, por cada dezena de quartos ocupados, por noite, em cada hotel, é necessário recrutar, na bolsa comum, os seguintes trabalhadores:

	Recepcionistas	Empregados de bar	Funcionários do serviço de quartos
VISTASERRA	2	1	4
VISTAMAR	1	2	3

Entretanto, uma epidemia fez adoecer alguns trabalhadores da bolsa comum da CADTEL e, nestas circunstâncias, a disponibilidade de recursos humanos desta bolsa é a seguinte:
• 100 recepcionistas;
• 120 empregados de bar;
• 210 funcionários do serviço de quartos.
Designe por x o número, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA, e por y o número, em dezenas, de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR. Qual deverá ser, nas condições referidas, face aos recursos humanos disponíveis, o número de quartos ocupados, por noite, no VISTASERRA e o número de quartos ocupados, por noite, no VISTAMAR, de modo a que seja máximo o número total de quartos ocupados, por noite, no conjunto dos dois hotéis? Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:
• indicar a função objectivo;
• indicar as restrições do problema;
• representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
• determinar o número de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTASERRA e o número de quartos ocupados, por noite, no hotel VISTAMAR correspondentes à solução do problema.

(Exame de Matemática B 2.ª fase-2010)

32. Num certo problema de programação linear pretende-se minimizar a função objectivo, a qual é definida por L= $2x+y$
Na Figura 1, está representada a região admissível. Numa das opções seguintes está a solução desse problema.
Em qual delas?
(A) x = 1 e y = 1
(B) x = 0 e y = 2
(C) x = 3 e y = 1
(D) x = 0 e y = 1

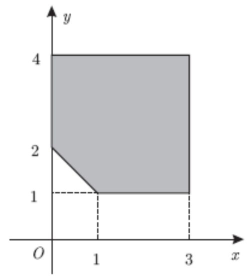


Figura 1

(1.º Teste intermédio 2011)

33. De um triângulo isósceles [ABC] sabe-se que:
• os lados iguais são [AB] e [AC], tendo cada um deles 8 unidades de comprimento;
• cada um dos dois ângulos iguais tem 30º de amplitude.
Qual é o valor do produto escalar $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$?
(A) $-32\sqrt{3}$ (B) −32 (C) 64 (D) $64\sqrt{3}$

(1.º Teste intermédio 2011)

34. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy , a circunferência de centro em O e raio 5. Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy, respectivamente.

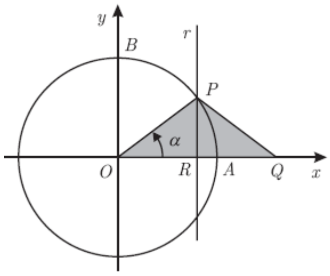


Figura 3

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B. Para cada posição do ponto P, sabe-se que:

- o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- a recta r é a mediatriz do segmento [OQ]
- o ponto R é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

Seja f a função, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por

$f(x) = 25 \operatorname{sen} x \cos x$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Mostre que a área do triângulo [OPQ] é dada por $f(\alpha)$

b) Determine o valor de α, pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, para o qual se tem $f(\alpha) = 25 \cos^2\alpha$

c) Seja θ um número real, pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, tal que $f(\theta) = 5$. Determine o valor de $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2$

d) Considere agora o caso em que a abcissa do ponto P é 3. Determine a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P

(1.º Teste Intermédio 2011)

35. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. Oxyz , o poliedro [VNOPQURST], que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

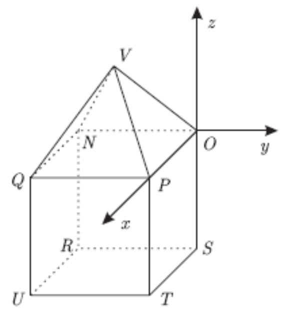


Figura 4

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto U tem coordenadas (4, –4, –4)
- o plano QTV é definido pela equação $5x+2y+2z=12$

a) Para cada um dos seguintes conjuntos de pontos, escreva uma condição cartesiana que o defina.

a_1) Plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial.

a_2) Plano perpendicular à recta QN e que passa no ponto V

a_3) Recta perpendicular ao plano QTV e que passa no ponto U

a_4) Superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T

b) Considere um ponto A, com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto U. Sabe-se que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OT} = 8$ Determine a cota do ponto A

c) Determine o volume do poliedro [VNOPQURST]

(1.º Teste Intermédio 2011)

36. Na Figura 5, está representado o quadrado [ABCD]. Sabe-se que:

- o ponto I é o ponto médio do lado [DC]
- o ponto J é o ponto médio do lado [BC]

Prove que

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$

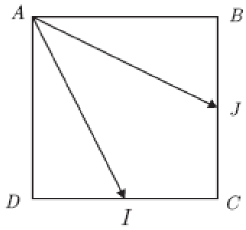


Figura 5

Sugestão: comece por exprimir cada um dos vectores $\overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{AJ}$ como soma de dois vectores.

(1.º Teste Intermédio 2011)

37. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a recta r definida por $(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$. Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta r?

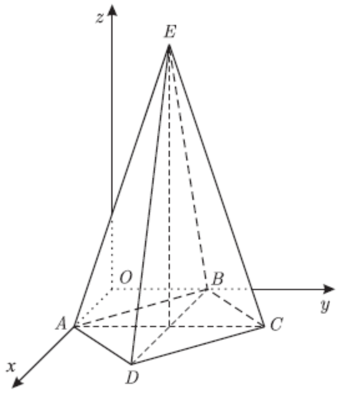
(A) $y=5 \wedge z=6$ (B) $x=3 \wedge y=4$

(C) $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(3, 4, 5), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(2.º Teste Intermédio 2011)

38. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDE] cuja base está contida no plano xOy.



Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas (1,0,0)
- o vértice B tem coordenadas (0,1,0)
- o plano DCE é perpendicular à recta definida pela condição $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = z$. Determine o volume da pirâmide.

Nota – Pode ser-lhe útil determinar uma equação do plano DCE

(2.º Teste Intermédio 2011)

39. A Jalur é uma empresa que produz, artesanalmente, janelas de estilo antigo para o mercado de uma certa região. O gestor da Jalur sabe que a empresa consegue vender, nesse mercado, todas as janelas que produzir. As janelas de estilo antigo produzidas pela Jalur são de dois tipos: Tipo I e Tipo II. Sabe-se que:

– para produzir uma janela do Tipo I, são necessárias uma hora na secção de corte, três horas na secção de polimento e duas horas na secção de acabamentos;

– para produzir uma janela do Tipo II, são necessárias uma hora na secção de corte, duas horas na secção de polimento e uma hora na secção de acabamentos;

– as secções de produção da Jalur têm, semanalmente, a seguinte disponibilidade:

• secção de corte: 16 horas;
• secção de polimento: 36 horas;
• secção de acabamentos: 22 horas.

O lucro que a Jalur obtém ao vender uma janela do Tipo I é 30 euros, e o que obtém ao vender uma janela do Tipo II é 25 euros. Designe por x o número de janelas do Tipo I produzidas, semanalmente, pela Jalur, e designe por y o número de janelas do Tipo II produzidas, semanalmente, pela Jalur.

a) É possível a Jalur produzir um total de 15 janelas de estilo antigo, numa semana? Justifique a sua resposta.

b) Determine quantas janelas do Tipo I e quantas janelas do Tipo II deve a Jalur produzir, semanalmente, para, nas condições referidas, obter o lucro máximo. Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

• indicar a função objectivo;
• indicar as restrições do problema;
• representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
• calcular o número de janelas do Tipo I e o número de janelas do Tipo II que a Jalur deve produzir, semanalmente, correspondentes à solução do problema.

(Exame de Matemática B 1.ª fase-2011)

40. Num referencial o.n. xOy, considere a circunferência definida por $x^2 + y^2 = 5$. A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas (1, 2). Qual é o declive da reta r ?

(A) –2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

(Teste Intermédio 2012)

41. Seja a um número real. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a reta s e o plano β definidos, respetivamente, por $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{R}$ e $3x + 3y + az = 1$. Sabe-se que a reta s é paralela ao plano β. Qual é o valor de a ?

(A) –3 (B) 1 (C) 3 (D) 6

(Teste Intermédio 2012)

42. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. Oxyz , a pirâmide quadrangular regular [ABCDE]

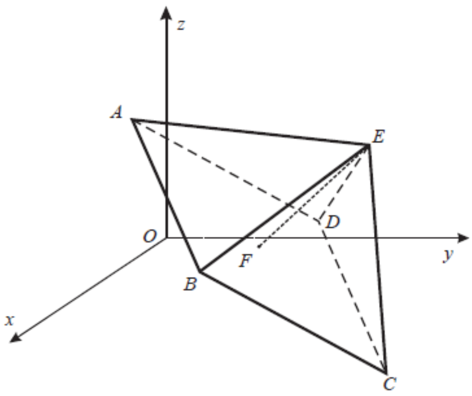


Figura 4

Seja F o centro da base da pirâmide. Sabe-se que:

• o ponto F tem coordenadas (–2,1,–1)
• o vetor $\overline{FE}$ tem coordenadas (–1,2,2)
• a reta EA é definida pela condição $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + k(1, -5, 1), k \in \mathbb{R}$

a) Escreva uma condição cartesiana que defina a reta EA

Nota – Não necessita de apresentar cálculos.

b) Mostre que o plano ABC pode ser definido pela equação x - 2y - 2z + 2 = 0

c) Sabe-se que a condição $\begin{cases} x - y = -6 \\ y - z = 2 \end{cases}$ define a reta ED. Determine, <u>sem recorrer à calculadora</u>, as coordenadas do ponto D.

(Teste Intermédio 2012)

43. No referencial o.n. xOy da Figura 6, estão representados o quadrado [OABC] e o retângulo [OPQR]. Os pontos A e P pertencem ao semieixo positivo Ox e os pontos C e R pertencem ao semieixo positivo Oy. O ponto Q pertence ao interior do quadrado [OABC].

Sabe-se que:

• $\overline{OA} = a$
• $\overline{OP} = b$
• $\overline{RC} = b$

Prove que as retas QB e RP são perpendiculares.

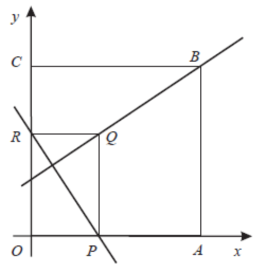


Figura 6

(Teste Intermédio 2012)

44. Numa certa empresa de suinicultura, é necessário fornecer a cada animal adulto, diariamente, além da alimentação padrão, um suplemento de Granulado e Farinha. Sabe-se que:

• cada quilograma de Granulado contém 30 gramas de hidratos de carbono, 75 gramas de vitaminas e 45 gramas de proteínas;
• cada quilograma de Farinha contém 75 gramas de hidratos de carbono, 15 gramas de vitaminas e 45 gramas de proteínas;

300 gramas de hidratos de carbono, pelo menos 225 gramas de vitaminas e pelo menos 315 gramas de proteínas;

• o suplemento diário dado a cada animal adulto não deve conter mais de 10 quilogramas de Granulado nem mais de 15 quilogramas de Farinha.
• o suplemento diário de Granulado e Farinha dado a cada animal adulto, para ser adequado, deve conter pelo menos
Sabe-se ainda que cada quilograma de Granulado custa 5 euros e que cada quilograma de Farinha custa 2,5 euros. Designe por x o número de quilogramas de Granulado que o suplemento diário dado a cada animal adulto contém e por y o número de quilogramas de Farinha que o suplemento diário dado a cada animal adulto contém. Determine quantos quilogramas de Granulado e quantos quilogramas de Farinha deve conter o suplemento diário dado a cada animal adulto, de modo que, nas condições referidas, o custo desse suplemento seja
mínimo.
Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:
• indicar a função objetivo;
• indicar as restrições do problema;
• representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
• calcular o número de quilogramas de Granulado e o número de quilogramas de Farinha que o suplemento diário dado a cada animal adulto deve conter, correspondentes à solução do problema.

(Exame Matemática B 1.ª fase-2012)

45. Num referencial o.n. Oxyz, considere um ponto P que tem ordenada igual a -4 e cota igual a 1. Considere também o vetor $\vec{u}$ de coordenadas (2, 3, 6). Sabe-se que os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares. Qual é a abcissa do ponto P ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(Teste Intermédio 2013)

46. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a reta definida por $\begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$. Qual das equações seguintes define um plano perpendicular a esta reta?
(A) $x + y - z = 5$ (B) $x + y + 2z = 5$
(C) $x - y = 5$ (D) $x + y = 5$

(Teste Intermédio 2013)

47. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. Oxyz , o cubo [ABCDEFGH] (o ponto E não está representado na figura).

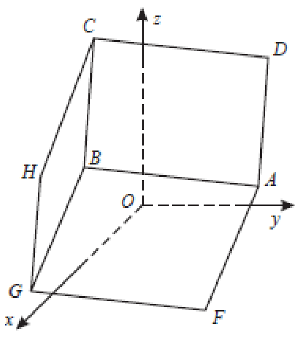


Figura 2

Sabe-se que:
• o ponto F tem coordenadas (1, 3,–4)
• o vetor $\overrightarrow{FA}$ tem coordenadas (2,3,6)
a) Escreva uma condição cartesiana que defina cada um dos seguintes conjuntos de pontos.
a_1) Plano FGH
a_2) Reta AF
a_3) Superfície esférica de centro no ponto F à qual pertence o ponto G.
b) Sabe-se ainda que a equação $6x + 2y - 3z + 25 = 0$ define o plano HCD. Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto E (vértice do cubo, não representado na figura).

(Teste Intermédio 2013)

48. Na Figura 4, está representado um quadrado [ABCD] de lado igual a 4. Admita que o ponto E pertence ao segmento [AB] e que o triângulo [ADE] tem área igual a 6. Determine o valor exato de $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC}$, sem recorrer à calculadora.

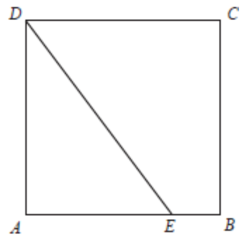


Figura 4

(Teste Intermédio 2013)

49. Uma empresa de produtos agrícolas vende azeite no mercado interno e no mercado externo. Relativamente ao ano de 2014, admita que:
• a empresa poderá vender, no total, até 6 mil toneladas de azeite;
• a quantidade de azeite a vender pela empresa no mercado externo não poderá ultrapassar 3 mil toneladas;
• a empresa terá uma despesa de 2000 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado interno e uma despesa de 4000 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado externo;
• a despesa total da empresa com a venda do azeite não poderá exceder 16 000 euros.
Admita ainda que, no ano de 2014, a empresa obterá um lucro de 500 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado interno e um lucro de 600 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado externo. Designe por x a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, a vender no mercado interno e por y a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, a vender no mercado externo, no ano de 2014.
Determine a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado interno e a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado externo, no ano de 2014, de modo que, nas condições referidas, o lucro da empresa, nesse ano, seja máximo. Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:
• indicar a função objetivo;
• indicar as restrições do problema;
• representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
• calcular a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado interno e a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado externo, correspondentes à solução do problema.

(Exame Matemática B 1.ª fase - 2013)

50. Uma operadora de telecomunicações publicitou novos tarifários para telemóveis. Num desses tarifários, destinado a empresas, em que a duração de cada chamada e o número de caracteres de cada mensagem escrita não podem exceder determinados valores, estabelece-se que:

• o número de mensagens escritas não pode ser superior ao triplo do número de chamadas;
• o número de mensagens escritas não pode ser inferior ao dobro do número de chamadas;
• o preço de cada chamada é 30 cêntimos;
• o preço de cada mensagem escrita é 15 cêntimos.
Uma empresa que aderiu a esse tarifário dispõe de um total de 600 euros para gastar em chamadas e em mensagens escritas. Designe por x o número de chamadas a efetuar pela empresa e designe por y o número de mensagens escritas a enviar pela empresa. Determine quantas chamadas a empresa deverá efetuar e quantas mensagens escritas a empresa deverá enviar, de modo que o número total de chamadas e de mensagens escritas seja máximo. Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:
• indicar a função objetivo;
• indicar as restrições do problema;
• representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
• calcular o número de chamadas que a empresa deverá efetuar e o número de mensagens escritas que a empresa deverá enviar, correspondentes à solução do problema.
(Exame Matemática B fase especial - 2013)

51. Na Figura 1, está representada a região admissível de um certo problema de programação linear em que se pretende maximizar a função objetivo L, definida por L = x + 3y.
Qual é o valor máximo da função L nesta região?
(A) 14
(B) 15
(C) 20
(D) 21

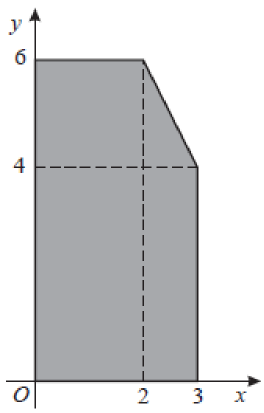


Figura 1

(Teste Intermédio 2014)

52. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. Oxyz, parte do plano ABC, de equação x + y + 2z = 12
Tal como a figura sugere, A, B e C são os pontos de intersecção deste plano com os eixos coordenados.
a) Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto D(1,2,3) e é paralelo ao plano ABC
b) Seja M o ponto médio do segmento de reta [AC]. Determine uma condição cartesiana da reta MB

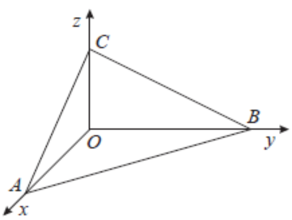


Figura 4

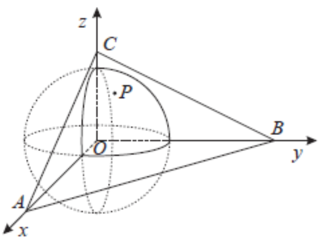


Figura 5

c) O plano ABC é tangente, num ponto P, a uma esfera centrada na origem do referencial, tal como se ilustra na Figura 5.
Determine o valor exato do volume dessa esfera.
<u>Nota</u>: Tenha em conta que a reta OP é perpendicular ao plano ABC
(Teste Intermédio 2014)

53. Na Figura 6, está representado um triângulo equilátero [ABC]. Seja a o comprimento de cada um dos lados do triângulo. Seja M o ponto médio do lado [BC]. Mostre que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3a^2}{4}$$

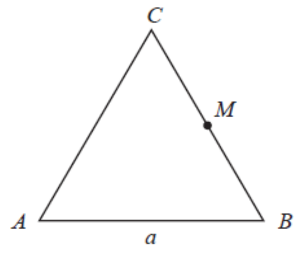


Figura 6

(Teste Intermédio 2014)

54. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide qua-drangular regular [ABCDV], cuja base está contida no plano xOy e cujo vértice V tem cota positiva. O ponto P é o centro da base da pirâmide. Admita que:

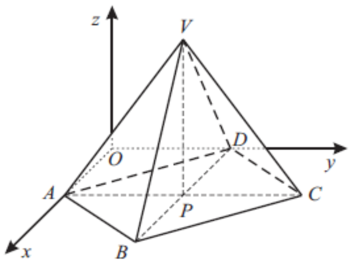


Figura 3

• $\overline{AV} = 10$
• o vértice A pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual a 6
• o vértice V tem abcissa e ordenada iguais a 6
a) Mostre que o vértice V tem cota igual a 8
b) Seja M o ponto médio da aresta [BV]. Determine uma condição cartesiana que defina a reta CM
c) Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e que é perpendicular à aresta [DV]
(2.º Teste Intermédio de 12.º - 2014)

55. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o plano α, definido por 4x − z + 1 = 0. Seja r uma reta perpendicular ao plano α. Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

(A) $\frac{x}{4} = y \wedge z = -1$ (B) $x = 4 \wedge z = -1$

(C) $x - 3 = \frac{z}{4} \wedge y = 0$ (D) $\frac{x-3}{4} = -z \wedge y = 1$
(Exame de Matemática A 1.ª fase - 2014)

56. Na Figura 4, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo [OABCDEFG], de aresta 3

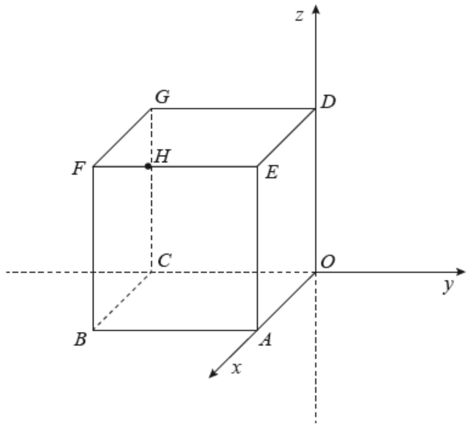


Figura 4

Sabe-se que:

• o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox

• o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy

• o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz

• o ponto H tem coordenadas (3, –2, 3)

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC.

Determine o valor exato de $\text{sen}^2\alpha$, sem utilizar a calculadora.

(Exame de Matemática A 1.ª fase - 2014)

57. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (1, 0, 3), e o plano α, definido por $3x + 2y - 4 = 0$. Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

(A) $3x + 2y - 3 = 0$ (B) $2x - 3y - z + 1 = 0$

(C) $2x - 3y + z = 0$ (D) $3x + 2y = 0$

(Exame de Matemática A 2.ª fase - 2014)

58. Na Figura 4, está representado um pentágono regular [ABCDE]. Sabe-se que $\overline{AB} = 1$. Mostre que

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

<u>Nota</u>: use a igualdade $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\text{sen}^2(\alpha)$

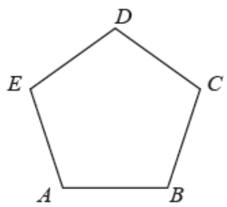


Figura 4

(Exame de Matemática A 2.ª fase - 2014)

59. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (2,0,3), e o plano α, definido por $x - y - 2z = 3$. Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A. Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

(A) $x + 2 = z + 1 \wedge y = 0$ (B) $-x + 5 = y + 3 = \frac{z+3}{2}$

(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{z+2}{3} \wedge y = -1$ (D) $x - 2 = -y = z - 3$

(Exame de Matemática A fase especial - 2014)

60. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. Oxyz, a pirâmide [ABCOD].

Sabe-se que:

• o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox

• os pontos A e B têm igual abcissa;

• o ponto B pertence ao plano xOy e tem ordenada –3

• o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy

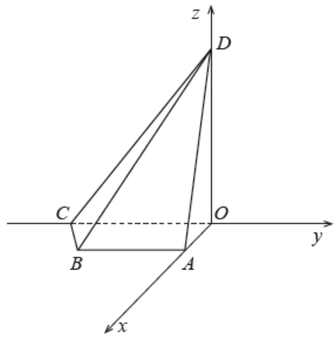


Figura 3

• o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz

• a reta AD é definida por $\frac{x-3}{3} = -\frac{z}{5} \wedge y = 0$

• $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 = 41$

Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano que contém a face [BCD], recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(Exame de Matemática A fase especial - 2014)

61. O departamento de marketing de uma empresa que se dedica ao fabrico e à venda de gelados dispõe de 16 500 euros, por mês, para investir em publicidade. A publicidade será efetuada na rádio e na televisão. A direção da empresa impôs que o tempo mensal de publicidade a efetuar na rádio seja, pelo menos, o dobro do tempo mensal de publicidade a efetuar na televisão. Além disso, impôs o limite mensal máximo de 600 minutos de publicidade a efetuar na rádio. Um minuto de publicidade na rádio custa 15 euros e um minuto de publicidade na televisão custa 300 euros. De acordo com estudos feitos, sabe-se que um minuto de publicidade na rádio garante a venda de 1000 gelados e que um minuto de publicidade na televisão garante a venda de 25 000 gelados. Designe por x o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na rádio e por y o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na televisão. Determine o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na rádio e o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na televisão, de modo que, nas condições referidas, se garanta a venda do número máximo de gelados. Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

— indicar a função objetivo;

— indicar as restrições do problema;

— representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;

— calcular o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na rádio e o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na televisão, correspondentes à solução do problema.

(Exame Matemática B 1.ª fase - 2014)

62. A Beatriz resolveu corretamente um problema de programação linear sobre mobiliário português do século XVIII e elaborou um relatório do qual constavam o enunciado e a resolução detalhada do mesmo.

Entretanto, devido a um problema informático, perdeu parte do enunciado e parte da resolução. Do enunciado, conseguiu recuperar apenas o excerto seguinte.

«*Uma empresa de mobiliário produz, artesanalmente, cadeiras de estilo português do século XVIII, estilo D. José e estilo D. Maria I, estando assegurada a venda de todas as cadeiras que produza. Na produção destas cadeiras, estão envolvidas três secções da empresa: a secção de marcenaria, a secção de revestimento e a secção de acabamento. Para o efeito, a secção de marcenaria dispõe de 720 horas mensais, a secção de revestimento dispõe de 320 horas mensais e a secção de acabamento dispõe de 440 horas mensais. A empresa obtém 300 euros de lucro com a venda de cada cadeira estilo D. José.*»

Quanto à resolução, conseguiu recuperar apenas o excerto seguinte.

«*Designo por x o número de cadeiras estilo D. José produzidas, mensalmente, pela empresa. A limitação das horas mensais na secção de marcenaria traduz-se pela condição* $6x + 4y \le 72$. *A limitação das horas mensais na secção de revestimento traduz-se pela condição* $2x + 2y \le 32$. *A limitação das horas mensais na secção de acabamento traduz-se pela condição* $4x + 2y \le 44$ »

A Beatriz sabe que a função objetivo é o lucro obtido pela empresa com a venda das cadeiras dos dois estilos e que o lucro máximo, 3600 euros, se obtém no ponto de coordenadas (8, 6). Elabore uma pequena composição, na qual:

— refira o significado da variável y

— indique, justificando, o número de horas utilizadas em cada uma das secções da empresa na produção de uma cadeira estilo D. José;

— escreva, justificando, uma expressão da função objetivo.

(Exame Matemática B 2.ª fase - 2014)

63. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy , um triângulo equilátero [ABC]. Sabe-se que:

• o ponto A tem ordenada positiva;

• os pontos B e C pertencem ao eixo Ox

• o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1. Qual é a equação reduzida da reta AB ?

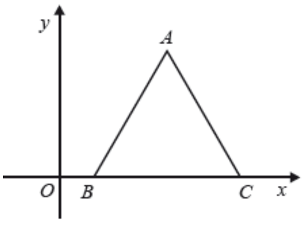


Figura 2

(A) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$ **(B)** $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

(C) $y = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$ **(D)** $y = \sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

(Exame de Matemática A 1.ª fase - 2015)

64. Considere, num referencial o.n. Oxyz, os pontos A(0,0,2) e B(4,0,0)

a) Considere o plano α de equação $x - 2y + z + 3 = 0$. Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

b) Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta [AB] é um diâmetro.

c) Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

• a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B

• a sua ordenada é positiva;

• $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

(Exame de Matemática A 1.ª fase - 2015)

65. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação $x^2 + (y - 1)^2 = 2$. Esta circunferência intersecta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva. Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A. Qual é a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = x + 1$ (B) $y = x - 1$

(C) $y = 2x + 2$ (D) $y = 2x - 2$

(Exame de Matemática A 2.ª fase - 2015)

66. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o poliedro [NOPQRSTUV] que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

• o vértice P pertence ao eixo Ox

• o vértice N pertence ao eixo Oy

• o vértice T pertence ao eixo Oz

• o vértice R tem coordenadas (2, 2, 2)

• o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

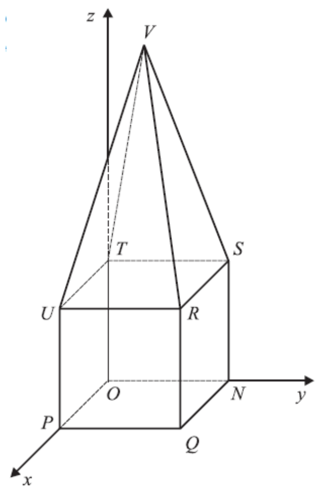


Figura 3

a) Determine as coordenadas do ponto V

b) Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR

c) Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

• o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;

• os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares. Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

• equacione o problema;

• reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);

• apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

(Exame de Matemática A 2.ª fase - 2015)

67. Os segmentos de reta [AB] e [BC] são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) −3 (B) −2 (C) 2 (D) 3

(Exame de Matemática A fase especial - 2015)

68. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$

a) Considere o ponto $P(-2,1,\ 3a)$, sendo a um certo número real. Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β, sendo O a origem do referencial. Determine o valor de a

b) Considere o ponto A(1, 2, 3). Seja B o ponto de intersecção do plano β com o eixo Ox. Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz. Determine a amplitude do ângulo BAC. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

c) Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial, que é tangente ao plano β. Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano β

(Exame de Matemática A fase especial - 2015)

69. Recentemente, o Dinis decidiu investir parte das suas poupanças em dois produtos financeiros: o X-fin e o Y-fin. O Dinis espera vir a ter um lucro anual de 30 euros por cada milhar de euros investido no produto X-fin e um lucro anual de 50 euros por cada milhar de euros investido no produto Y-fin. Tendo em conta as suas poupanças, o Dinis impôs os seguintes limites de investimento anual: poderá investir até 4000 euros no produto X-fin e poderá investir até 6000 euros no produto Y-fin. O Dinis tem o seguinte sistema de pontuação anual de risco de investimento:

• atribuir 3 pontos de risco de investimento por cada milhar de euros investido no produto X-fin;
• atribuir 2 pontos de risco de investimento por cada milhar de euros investido no produto Y-fin;
• não ultrapassar 18 pontos de risco de investimento, no total.

Determine o número, x, de milhares de euros que o Dinis deve investir no produto X-fin e o número, y, de milhares de euros que o Dinis deve investir no produto Y-fin, de modo a maximizar o lucro anual.

Na sua resposta, apresente:
— a função objetivo;
— as restrições do problema;
— uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;
— o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

(Exame Matemática B 1.ª fase - 2015)

70. Os terrenos de produção agrícola de uma certa empresa situam-se numa região de Portugal habitualmente fustigada por intempéries. Devido aos prejuízos sofridos no presente ano agrícola, essa empresa decidiu candidatar-se a um subsídio governamental destinado à produção e a um subsídio europeu destinado à renovação de estruturas para o próximo ano agrícola. Esses subsídios destinam-se ao cultivo de trigo e de vinha. A empresa dispõe de uma área de 100 hectares de cultivo e tem a garantia de conseguir vender toda a produção obtida, em cada ano agrícola. Para que qualquer dos subsídios seja atribuído à empresa, é exigido que:

• pelo menos 20 hectares de cultivo sejam de trigo;
• pelo menos 10 hectares de cultivo sejam de vinha.

O subsídio governamental, no valor total máximo de 150 000 euros, é de:

• 2000 euros por cada hectare de cultivo de trigo;
• 1000 euros por cada hectare de cultivo de vinha.

O subsídio europeu, no valor total máximo de 205 000 euros, é de:

• 3000 euros por cada hectare de cultivo de trigo;
• 1000 euros por cada hectare de cultivo de vinha.

No caso de receber os dois subsídios aos quais se candidata, prevê-se que a empresa obtenha o lucro anual de 1500 euros por cada hectare de trigo cultivado e o lucro anual de 3000 euros por cada hectare de vinha cultivada. Determine a área, x, em hectares, que a empresa deve reservar para o cultivo de trigo e a área, y, em hectares, que a empresa deve reservar para o cultivo de vinha, referentes ao próximo ano agrícola, de modo que, caso receba os dois subsídios, a empresa obtenha, nesse ano, o lucro máximo.

Na sua resposta, apresente:
— a função objetivo;
— as restrições do problema;
— uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;
— o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

(Exame Matemática B 2.ª fase - 2015)

Soluções: 1. 80 e 80 3. $2y+z=2$; 0,213 e 1,268 4. não; 10 e 4 5. D 6. B 7. 3π 9. 20 e 20
10. A 11. A 13. $(x-5)/10=(y-5)/15=(z-5)/6$; 37° 14. C 15. Sim; 7 e 2 16. B 17. A 18. D
19. $x+2y-2z+7=0$; não; $x=1 \wedge y=2 \wedge -6 \leq z \leq 6$; 18π 21. A 22. 6 e 3 23. B 24. A 25. C 26. $y=-3/4\,x-3$; 25/2
27. 20; (2,4,6); sim 28. B 29. $(x,y,z)=(2,0,0)+k(6,3,4),\ k \in R$ 30. $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2, 5/2)$ 31. 120 e 540
32. B 33. B 34. $\pi/4$; 7/5; $-3/4\,x+25/4$ 35. $5x+2y+2z=0$; $x=2$; $(x-4)/5=(y+4)/2=(z+4)/2$; $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=16$; 2; 80
37. A 38. 2 39. Sim; 4 e 12 40. B 41. D 42. $(x+3)/1=(y-3)/(-5)=(z-1)/1$; $(-6,0,-2)$ 44. 2 e 5 45. C
46. D 47. $x+3y+6z+13=0$; $(x-1)/2=(y-3)/3=(z+4)/6$; $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=49$; $(-5,1,-1)$ 48. -12 49. 4 e 2
50. 800 e 2400 51. C 52. $X+y+2z=9$; $x/-6=(y-12)/12=z/-3$; $4/3\ \pi\ \sqrt{(24)^3}$ 54. $(x-6)/3=(y-12)/-6=z/4$; $3x+4z=18$
55. D 56. 198/247 57. B 59. B 60. $(-5,15,-12)$ 61. 100 e 50 62. $L = 300x + 200y$ 63. D
64. $x-2y+z-2=0$; $(x-2)^2+ y^2+ (z-1)^2=5$; $2\sqrt{15}$ 65. B 66. (1,1,6); $x+y+z-2=0$; 1,52 67. B 68. -1/3; 55°; $x^2+ y^2+ z^2=24/9$
69. 2 e 6 70. 20 e 80

O professor: Roberto Oliveira