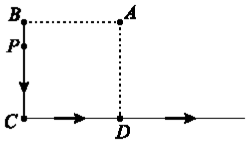
Exercícios de 11.º ano nos Testes Intermédios (e em exames nacionais)

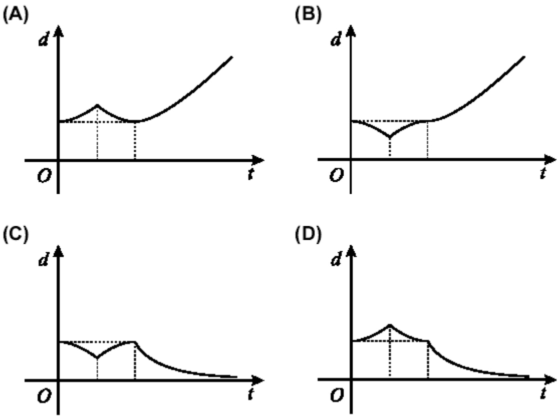
CÁLCULO DIFERENCIAL I

1. Na figura estão representados:• um quadrado [ABCD]

• uma semi-recta $\dot{C}D$.

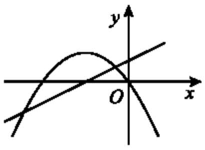


Admita que um ponto P, partindo de B, se desloca, a velocidade constante, ao longo do percurso sugerido pelas setas (primeiro percorre o segmento [BC] e seguidamente a semi-recta $\dot{C}D$). Qual dos gráficos seguintes dá a distância *d*, do ponto P ao ponto A, em função do tempo *t*, contado a partir do instante em que P inicia o seu movimento?



(Teste intermédio 2006)

2. Na figura estão representadas:• parte do gráfico de uma função quadrática f; • parte do gráfico de uma função afim g.



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?

(A) $]-\infty, -4[\cup [-2, 0[$ **(B)** $]-\infty, -4] \cup]-2, 0]$

(C) $]-4, -2] \cup]0, +\infty[$ **(D)** $[-4, -2[\cup [0, +\infty[$

(Teste intermédio 2006)

3. Na figura 1 está representada graficamente a função f. Na figura 2 está representada graficamente a função g.

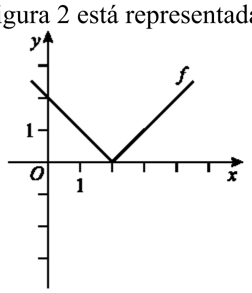


Figura 1

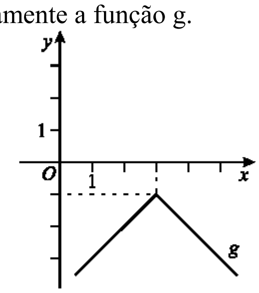


Figura 2

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(x) = -f(x+1) - 1$ **(B)** $g(x) = f(x-1) + 1$

(C) $g(x) = f(x+1) - 1$ **(D)** $g(x) = -f(x-1) - 1$

(Teste intermédio 2006)

4. De uma função quadrática f sabe-se que o conjunto solução da inequação f(x)≥0 é o intervalo [1,5]. Qual é o contradomínio de f?

(A) $]-\infty, f(1)]$ **(B)** $[f(5), +\infty[$

(C) $[f(3), +\infty[$ **(D)** $]-\infty, f(3)]$

(Teste intermédio 2006)

5. Considere a função f, de domínio R\{1}, definida por $f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$

a) <u>Sem recorrer à calculadora</u>, determine o conjunto dos números reais *x* tais que f(x)≤−1. Apresente a resposta final na forma de intervalo (ou união de intervalos).

b) O gráfico da função f tem duas assimptotas. Escreva as suas equações.

(Teste intermédio 2006)

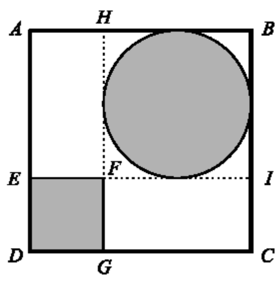
6. A Anabela espremeu várias laranjas e obteve três litros de sumo de laranja, para um lanche que vai oferecer aos amigos. Para que a quantidade de bebida seja suficiente, a Anabela vai juntar água aos três litros de sumo de laranja obtidos. Admita que o sumo de laranja puro, ou seja, acabado de espremer, já contém 92% de água.

a) Designando por *x* a quantidade (em litros) de água que vai ser acrescentada aos três litros de sumo de laranja puro, justifique que a percentagem de água existente na bebida que a Anabela vai oferecer aos amigos é dada por $\frac{100x+276}{x+3}$

b) Qual é a quantidade máxima de água que a Anabela pode acrescentar aos três litros de sumo de laranja puro, de tal modo que a sua bebida não tenha mais de 97% de água? Apresente o resultado em litros.

(Teste intermédio Matemática B 2006)

7. Na figura está o primeiro esboço de um logotipo que o João está a construir para o Clube de Matemática da sua escola. Dentro do quadrado [ABCD] estão representados, a sombreado, um círculo e um quadrado [DEFG], nos quais vão ser colocados desenhos alusivos a jogos matemáticos. Na região branca, ou seja, não sombreada, vão ser colocados símbolos matemáticos e texto.



Sabe-se que:

• $\overline{AB} = 1$;

• o círculo está inscrito no quadrado [FHBI]. Designando por *x* o lado do quadrado [DEFG], determine o valor de *x* para o qual a área da região branca é máxima. Recorrendo a processos analíticos, apresente o valor pedido.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

• exprima, em função de x,

- a área do quadrado sombreado,

- o raio do círculo sombreado,

- a área do círculo sombreado,

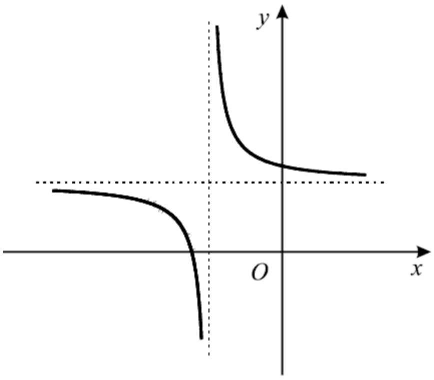
- a área da região sombreada,

- a área da região branca;

• determine o valor pedido.

(Teste intermédio Matemática B 2006-adaptação)

8. Para um certo valor de *a* e para um certo valor de *b*, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função *f* cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \ \wedge \ b > 0$ **(B)** $a > 0 \ \wedge \ b < 0$

(C) $a < 0 \ \wedge \ b > 0$ **(D)** $a < 0 \ \wedge \ b < 0$

(Teste intermédio 2007)

9. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2+1}{2-x} < 0$

(A)]–1,2[(B)]1,2[(C)]–∞,2[(D)]2,+∞[

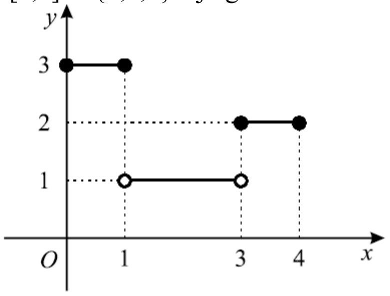
(Teste intermédio 2007)

10. Considere as seguintes funções: *f*:{1,2,3}→{1,2,3} definida pela tabela

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

g: ℝ→ℝ definida por $g(x) = 2x + 1$

h:[0,4] →{1,2,3}cujo gráfico é



Indique o valor de $f^{-1}(2) + (goh)(\sqrt{2})$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

(Teste intermédio 2007)

11. Considere a função *f*, de domínio ℝ, definida por $f(x) = 1 - x^2$. Seja *t* a recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa ½. Qual é a inclinação da recta *t* ?

(A) 30° (B) 45° (C) 135° (D) 150°

(Teste intermédio 2007)

12. Durante os ensaios de um motor, a velocidade de rotação do seu eixo variou, ao longo dos primeiros oito minutos da experiência, de acordo com a função $v(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$ onde *t* designa o tempo (medido em minutos), contado a partir do início da experiência, e

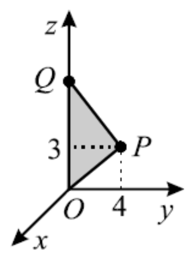
v(*t*) designa a velocidade de rotação do eixo do motor (medida em centenas de rotações por minuto).

a) Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine qual foi a velocidade máxima atingida, nos primeiros oito minutos da experiência. Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine durante quanto tempo é que, nos primeiros oito minutos da experiência, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 6000 rotações por minuto. Escreva o resultado final em minutos e segundos (com o número de segundos arredondado às unidades). Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtidos, bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema (apresente as abcissas com duas casas decimais).

(Teste intermédio 2007)

13. Considere, em referencial o.n. *Oxyz* , o ponto P(0,4,3). Admita que um ponto *Q* se desloca ao longo do semieixo positivo *Oz*, nunca coincidindo com a origem *O* do referencial. Seja *f* a função que faz corresponder, à cota *z* do ponto *Q*, o perímetro do triângulo [OPQ].



a) Mostre que

$f(z) = z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$

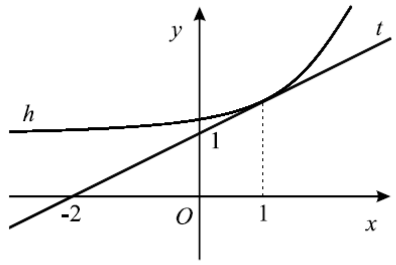
b) Sem recorrer à calculadora, determine a cota do ponto *Q* de modo que o perímetro do triângulo [OPQ] seja igual a 16.

(Teste intermédio 2007)

14. Na figura estão representadas, em referencial o.n. *xOy*:

• parte do gráfico de uma função *h*

• uma recta *t*, tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 1

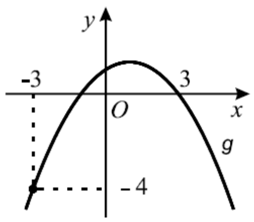


Tal como a figura sugere, a recta *t* intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa -2 e o eixo *Oy* no ponto de ordenada 1.
Indique o valor de $h'(1)$, derivada da função *h* no ponto 1

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

(2.º Teste intermédio 2008)

15. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *g*

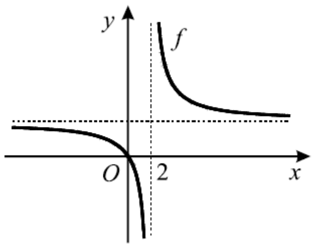


Seja *f* a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Qual é o valor de $(f o g)(-3)$?

(A) -4 (B) 0 (C) 3 (D) 4

(2.º Teste intermédio 2008)

16. Na figura está representada, em referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico de uma função *f*, bem como as duas assimptotas deste gráfico.



Tal como a figura sugere,
• a origem do referencial pertence ao gráfico de *f*
• uma das assimptotas é paralela ao eixo *Ox*
• a outra assimptota é paralela ao eixo *Oy* e intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 2

a) Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3x + 9$.

Tendo em conta o gráfico de *f* e a expressão analítica de *g*, resolva a inequação $f(x) \times g(x) \leq 0$, completando a seguinte tabela de variação de sinal, que deve transcrever para a sua folha de prova:

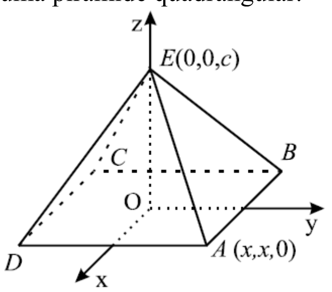
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	
$g(x)$	
$f(x) \times g(x)$	

Apresente o conjunto solução da inequação utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Admita agora que:
• a assimptota do gráfico de *f* paralela ao eixo das abcissas tem equação $y = 3$
• *f* é definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, onde *a*, *b*, e *c* designam números reais. Indique os valores de *a* e de *c* e determine o valor de *b*.

(2.º Teste intermédio 2008)

17. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular.



Admita que o vértice E se desloca no semieixo positivo Oz, entre a origem e o ponto de cota 6, nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos. Com o movimento do vértice E, os outros quatro vértices da pirâmide deslocam-se no plano xOy, de tal forma que:
• a pirâmide permanece sempre regular
• o vértice A tem sempre abcissa igual à ordenada
• sendo *x* a abcissa de A e sendo *c* a cota de E, tem-se sempre $x + c = 6$

a) Seja $V(x)$ o volume da pirâmide, em função de *x* ($x \in]0, 6[$). Mostre que $V(x) = 8x^2 - \frac{4}{3}x^3$

b) Utilizando a função derivada de *V* e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função *V* quanto à monotonia, conclua qual é o valor de *x* para o qual é máximo o volume da pirâmide e determine esse volume máximo.

c) Admita agora que $x = 1$. Indique, para este caso, as coordenadas dos pontos A, B e E e determine uma equação cartesiana do plano ABE.

(2.º Teste intermédio 2008)

18. A Maria vai sempre de carro, com o pai, para a escola, saindo de casa entre as sete e meia e as oito horas da manhã. Admita que, quando a Maria sai de casa *t* minutos depois das sete e meia, a duração da viagem, em minutos, é dada por

$d(t) = 45 - \frac{5600}{t^2+300}$ $\quad (t \in [0, 30])$

As aulas da Maria começam sempre às oito e meia.

a) Mostre que, se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, chega à escola às 8 h 11 m, mas, se sair de casa às 7 h 55 m, já chega atrasada às aulas.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva o seguinte problema: *Até que horas pode a Maria sair de casa, de modo a não chegar atrasada às aulas?*

A sua resolução deve incluir:
• uma explicação de que, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \leq 60$
• o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora
• a resposta ao problema em horas e minutos (minutos arredondados às unidades)

(2.º Teste intermédio 2008)

19. O gráfico de uma função *f* é uma parábola com a concavidade voltada para baixo cujo vértice é o ponto (3,2). Seja *f '* a função derivada da função *f*. Qual dos valores seguintes é negativo?

(A) $f'(1)$ (B) $f'(2)$ (C) $f'(3)$ (D) $f'(4)$

(2.º Teste intermédio 2009)

20. Seja *f* a função cujo gráfico está representado na figura 2. Seja *g* a função de domínio R definida por $g(x)=-2x+1$. Qual é o valor de $(f o g)(2)$?

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

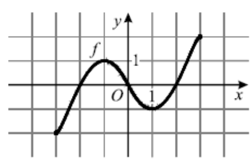


Figura 2

(2.º Teste intermédio 2009)

21. Considere a função *f*, de domínio R\{−2}, definida por $f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$. Sem recorrer à calculadora, resolva os itens seguintes:

a) Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Na figura 3 estão representados, em referencial o.n. *xOy*:

• parte do gráfico da função *f*

• as rectas *r* e *s*, assimptotas do gráfico de *f*

• o quadrilátero [*ABCD*]

A e *B* são os pontos de intersecção do gráfico da função *f* com os eixos coordenados. *C* é o ponto de intersecção das rectas *r* e *s*. *D* é o ponto de intersecção da recta *r* com o eixo *Oy*. Determine a área do quadrilátero [*ABCD*]

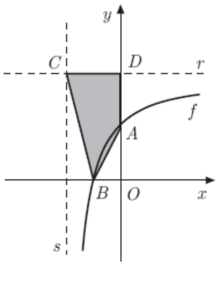


Figura 3

(2.º Teste intermédio 2009)

22. Na figura 4 está representado um referen-cial o.n. *Oxyz*. Cada um dos pontos *A*, *B* e *C* pertence a um eixo coordenado. O ponto *P* pertence ao plano *ABC*. O ponto *P* desloca-se no plano *ABC*, de tal modo que é sempre vértice de um prisma quadrangular regu-lar, em que os restantes vértices pertencem aos planos coordenados. O plano *ABC* é definido pela equação $x + 2y + 3z = 9$

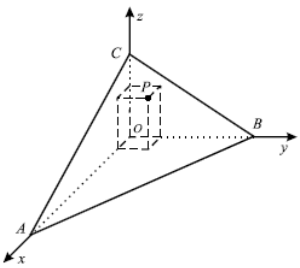


Figura 4

a) Seja *a* a abcissa do ponto *P* ($a \in]0,3[$). Mostre que o volume do prisma é dado, em função de *a*, por $V(a) = 3a^2 - a^3$

b) Estude a função *V* quanto à monotonia, sem recorrer à calculadora, e conclua qual é o valor de *a* para o qual o volume do prisma é máximo.

c) Seja *r* a recta que contém o ponto *A* e é perpendicular ao plano *ABC*. Determine uma equação vectorial da recta *r*.

(2.º Teste intermédio 2009)

23. Na empresa onde o Manuel trabalha, o cumprimento do horário é controlado por relógio electrónico. De acordo com o contrato de trabalho, qualquer trabalhador deve entrar às oito horas e sair ao meio-dia. Porém, se o trabalhador chegar atrasado, terá de continuar a trabalhar depois do meio-dia. Sempre que um trabalhador chega *t* minutos atrasado, o número de minutos, depois do meio-dia, que ele tem de permanecer na empresa é dado por

$$c(t) = \frac{t^2 + 25t}{t+1} \quad (t \geq 0)$$

a) Na segunda-feira, o Manuel entrou na empresa às nove horas e um quarto. A que horas deveria ter saído, de modo a cumprir o estipulado no contrato? Apresente a sua resposta em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

b) Ontem, o Manuel saiu da empresa às 12 horas e 25 minutos. Com quantos minutos de atraso é que ele chegou à empresa?

c) Ao sair ontem da empresa, o Manuel pensou: «Então eu atrasei-me tão pouco e tive de ficar a trabalhar quase meia hora depois do meio-dia?! Não é justo.» Depois de ter conversado com os seus colegas de trabalho, o Manuel decidiu propor à administração da empresa que o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia, passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 40% desse tempo (por exemplo, um atraso de 10 minutos deve ser compensado com 14 minutos de trabalho depois do meio-dia). Numa pequena composição, compare a proposta do Manuel com o contrato em vigor, contemplando os seguintes tópicos:

• justifique que, de acordo com a proposta do Manuel, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa, quando se atrasa *t* minutos, é dado por $p(t) = 1,4t$;

• refira se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor;

• considerando que, para um certo atraso, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, refira:

– o atraso;

– o tempo de permanência, depois do meio-dia, que esse atraso determina.

Utilize a calculadora para comparar os gráficos das duas funções (*c* e *p*); transcreva para a sua folha de prova esses gráficos e assinale o ponto relevante que lhe permite responder a algumas das questões colocadas, bem como as suas coordenadas, arredondadas às unidades.

(2.º Teste intermédio 2009)

24. Seja *f* a função cujo gráfico está representa-do na figura 1.

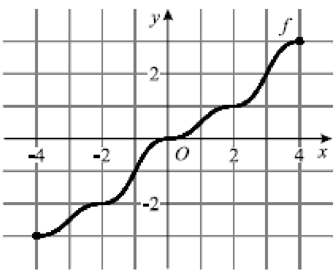


Figura 1

Seja f^{-1} a função inversa da função *f*. Qual é o valor de $f(-4) + f^{-1}(2)$?

(A) −2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(2.º Teste intermédio 2010)

25. Sejam *f* e *g* duas funções reais de variável real. Sabe-se que:

• a função *f* tem domínio ℝ e tem cinco zeros;

• a função *g* tem domínio ℝ e tem três zeros;

• um, e só um, dos zeros da função *f* também é zero da função *g*

Quantos zeros tem a função $\frac{f}{g}$?

(A) 7 ((B) 5 (C) 4 (D) 2

(2.º Teste intermédio 2010)

26. Seja *f* a função cujo gráfico está representado na figura 2. Seja *g* a função, de domínio ℝ, definida por $g(x) = -x + 3$.

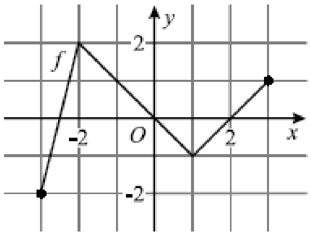


Figura 2

Qual é o valor de $(g \circ f)(3)$?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(2.º Teste intermédio 2010)

27. Na figura 3, está representado um triângulo rectângulo [ABC] cujos lados medem 3, 4 e 5. Considere que um ponto D se desloca ao longo do cateto [AB], nunca coincidindo com o ponto A. Para cada posição do ponto D, seja x o comprimento do segmento de recta [AD]. Qual das expressões seguintes dá o perímetro do triângulo [ACD], em função de x ?

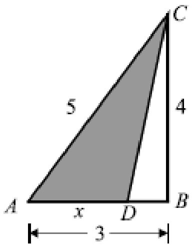


Figura 3

(A) $x+4+\sqrt{25-x^2}$ **(B)** $x+5+$

(C) $x+4+\sqrt{x^2-6x+25}$ **(D)** $x+5+\sqrt{x^2-6x+25}$

(2.º Teste intermédio 2010)

28. Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B. Admita que, t anos após o início do ano 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A é dado aproximadamente por

$$a(t) = \frac{11t+6}{t+1}\,(t \geq 0)$$

e que o número de animais, em milhares, da espécie B é dado aproximadamente por $b(t) = \frac{t+9}{t+3}\,(t \geq 0)$

Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

a) Desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, morreram 500 animais da espécie A. Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

b) Na figura 5, estão representadas graficamente as funções *a* e *b*. Tal como estes gráficos sugerem, a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor. Determine esse valor, recorrendo às assimptotas horizontais dos gráficos das funções *a* e *b* cujas equações deve apresentar.

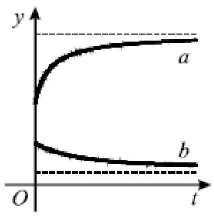


Figura 5

(2.º Teste intermédio 2010)

29. Considere:

• a função *f*, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x) = 3 + \frac{6}{x}$

• a função *g*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$$

Resolva os itens a), b) e c), usando exclusivamente métodos analíticos.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

a) Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \leq 5$. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Seja *P* o ponto do gráfico da função *f* que tem abcissa igual a 2. Seja *r* a recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto P. Determine a equação reduzida da recta *r*

c) Na figura 6, está representada, num referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico da função *g*. Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função *g*, sendo as suas ordenadas, respectivamente, o máximo relativo e o mínimo relativo desta função. Os pontos C e D pertencem ao eixo *Ox*. A abcissa do ponto C é igual à do ponto B e a abcissa do ponto D é igual à do ponto A. Determine a área do triângulo [OAC]

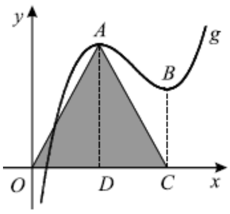


Figura 6

d) A equação $f(x) = g(x)$ tem exactamente duas soluções, sendo uma delas positiva e a outra negativa. Determine a solução positiva, utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora. Apresente essa solução arredondada às centésimas. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante
para a resolução do problema.

(2.º Teste intermédio 2010)

30. Seja f a função, de domínio $[1,+\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Qual é o valor de $f^{-1}(3)$?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

(2.º Teste intermédio 2011)

31. Seja *h* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$.

Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$.

Para um certo número real *a*, tem-se $(g \circ h)(a) = \frac{1}{9}$. Qual é o valor de *a* ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

(2.º Teste intermédio 2011)

32. Seja *f* uma função real de variável real. Sabe-se que:

• $f'(2) = 9$

• a recta tangente ao gráfico de *f*, no ponto de abcissa 2, intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada –15. Qual é o valor de f(2)?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(2.º Teste intermédio 2011)

33. Uma floresta foi atingida por uma praga. Admita que a área, em milhares de hectares, da região afectada por essa praga é dada por $A(t) = \frac{2t}{t^2+3}\,(t \geq 0)$ (Considere que *t* é medido em anos e que o instante *t* = 0 corresponde ao início da praga.)

a) Houve um certo intervalo de tempo durante o qual a área da região afectada pela praga foi, pelo menos, de 500 hectares. Nesse intervalo de tempo, a floresta esteve seriamente ameaçada. Durante quanto tempo esteve a floresta seriamente ameaçada? Na sua resposta deve:

• escrever uma inequação que lhe permita resolver o problema;

• resolver analiticamente essa inequação;
• apresentar o valor pedido.

b) Utilize as capacidades gráficas da calculadora para resolver o seguinte problema: *Ao fim de quanto tempo, contado a partir do início da praga, foi máximo o valor da área atingida por essa praga?*

Na sua resposta deve:
• reproduzir o gráfico visualizado na calculadora;
• assinalar, no gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema e indicar as coordenadas desse ponto, arredondadas às milésimas;
• apresentar a solução do problema em dias, arredondada às unidades (considere 1 ano = 365 dias).

(2.º Teste intermédio 2011)

34. Considere:

• a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$

• a função *g*, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, definida por $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

<u>Utilize métodos exclusivamente analíticos</u> na resolução dos três itens seguintes.

a) Estude a função *f* quanto à monotonia e quanto aos extremos relativos. Na sua resposta deve apresentar:
• o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
• o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
• os extremos relativos, caso existam.

b) Sabe-se que -1 é um zero da função *f*. Caracterize a função $f\times g$. Na sua resposta deve:
• indicar o domínio da função $f\times g$
• apresentar $(f\times g)(x)$ na forma de um polinómio do terceiro grau.

c) Seja P o ponto de intersecção das assimptotas do gráfico da função *g*. Para um certo número real *k*, o ponto P pertence ao gráfico da função *h*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)= f(x)+k$.

Determine o valor de *k*

(2.º Teste intermédio 2011)

35. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f. As retas de equações x =2 e y =1 são as assíntotas do gráfico da função f. Para um certo número real k, a função g, definida por g(x) = f(x)+ k, não tem zeros. Qual é o valor de k ?

(A) –1 (B) 1 (C) –2 (D) 2

(Teste intermédio 2012)

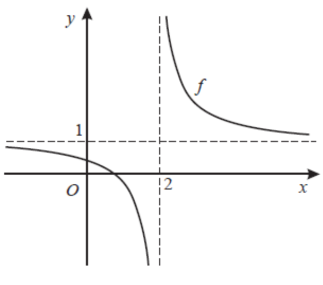


Figura 1

36. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy , parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f. O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa –1.

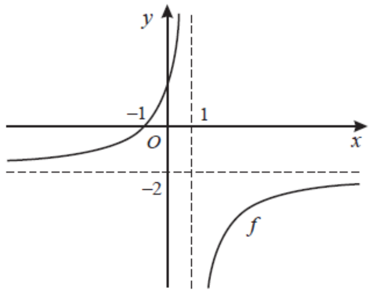


Figura 3

As retas de equações x =1 e y =-2 são as assíntotas do gráfico da função f

a) Responda aos dois itens seguintes sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

a_1) Indique o contradomínio da função f

a_2) Apresente, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição
$f(x)\leq 0$

b) Defina, por uma expressão analítica, a função f

(Teste intermédio 2012)

37. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Considere a função g definida por $g(x) = f(x+ a) + k$, com $a \in\mathbb{R}$ e $k \in\mathbb{R}$. Sabe-se que as retas de equações $x = -2$ e $y = 2$ são assíntotas do gráfico de g

Quais são os valores de *a* e de k ?

(A) a = 1 e k = −2 (B) a = 1 e k = 2
(C) a = −1 e k = −2 (D) a = −1 e k = 2

(Teste intermédio 2013)

38. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

• as funções f e g são funções quadráticas
• a função f tem dois zeros distintos
• a função g tem um único zero
• os gráficos das funções f e g intersectam-se no ponto de coordenadas (3, 0). Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função $f\times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(B) A função $f\times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem dois zeros.

(C) A função $f\times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(D) A função $f\times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem dois zeros.

(Teste intermédio 2013)

39. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. As retas de equações x =2 e y =-1 são as assíntotas do gráfico da função f

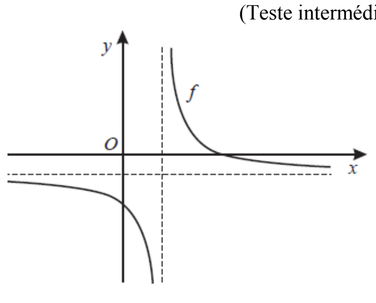


Figura 1

a) Responda aos dois itens seguintes sem apresentar cálculos.

a_1) Qual é o valor de k para o qual a equação f(x) = k é impossível?

a_2) Qual é o limite de f(x) quando x tende para $+\infty$?

b) Admita agora que a função f é definida pela expressão $f(x) = \frac{6-x}{x-2}$

b_1) Resolva analiticamente a condição $f(x) \leq \frac{4-x}{x+2}$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

b_2) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^3$. A equação $(f \circ g)(x) = x$ tem exatamente duas soluções. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções. Apresente as soluções arredondadas às centésimas. Na sua resposta, deve:

• reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);

• assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

(Teste intermédio 2013)

40. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f. O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1. As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são as assíntotas do gráfico da função f. Qual é o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$?

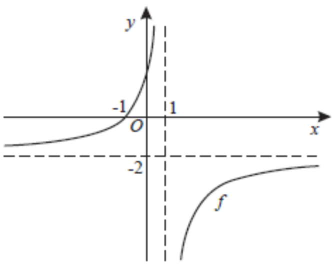


Figura 2

(A) $]-\infty,-2[\cup]-2,0]$ (B) $]-\infty,-1]\cup]0,+\infty[$

(C) $]-\infty,0]\cup]1,+\infty]$ (D) $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty]$

(Teste intermédio 2014)

41. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

• a função f é definida por $f(x) = 3x + 6$
• a função g é uma função quadrática e é uma função par
• $g(2) = 0$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função $f \times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

(B) A função $f \times g$ tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(C) A função $f \times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

(D) A função $f \times g$ tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(Teste intermédio 2014)

42. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 13 & \text{se } x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{2x-3}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Resolva analiticamente, em $]1, +\infty[$, a condição $f(x) < \frac{1}{x-2}$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

b) Considere, para cada número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = k\,x + 2$. Determine o valor de k para o qual se tem $(g \circ f)(-3) = 6$

c) Determine o contradomínio da função f. Para resolver este item, recorra à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir, num referencial, o gráfico da função f que visualizar na calculadora (sugere-se a utilização da janela em que $x \in [-5, 5]$ e $y \in [-15, 10]$); nesse referencial:

– assinale o ponto do gráfico de abcissa 1 e indique a sua ordenada

– represente as assíntotas do gráfico de f

– assinale o ponto do gráfico correspondente ao máximo relativo da função

• apresentar o contradomínio da função f , usando a notação de intervalos de números reais.

(Teste intermédio 2014)

Soluções: 1. A 2. D 3. D 4. D 5.]1,4/3]; y=2 e x=1 6. 5 7. π/(π+4) 8. B 9. D
10. C 11. C 12. 81; 4´5´´ 13. 6 14. C 15. D 16.]–∞,–3]∪[0,2[; 3, 6 e 2 17. 4 e 128/3; 5y+z-5=0 18. 7h52min
19. D 20. A 21.]–∞,–2[∪]2,+∞[; 5 22. 2; (x,y,z)=(9,0,0)+k(1,2,3) 23. 13h39'; 5 24. B 25. C 26. D 27. D
28. 3000; 10000 29.]–∞,0[∪[3,+∞[; y=-3/2 x+9; 22/3; 5,15 30. C 31. B 32. C 33. 2; 632 34. Máx=16 e mín=-16; 1
35. A 36. R\{-2};]-∞,-1]∪]1,+∞[; f(x)=-2-4/(x-1) 37. B 38. A 39. -1; -1;]-2,2[∪]10,+∞[; -1,63 e 1,53 40. D 41. C
42.]2,+∞[; -1;]-∞,-4]∪]-2,+∞[

O professor: RobertOliveira