

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 6

2.º Período 28/01/15 Duração: 90 minutos
 Nome: N.º:
 Classificação: O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

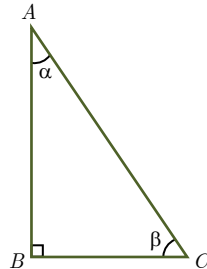
Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$, retângulo em B .
Sejam α e β as amplitudes dos dois ângulos agudos do triângulo.
Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- (A)** $\cos \alpha + \cos \beta = 1$ **(B)** $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$
(C) $\cos \alpha = \frac{1}{\cos \beta}$ **(D)** $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = 1$



2. Num referencial o.n. $Oxyz$, são dados os seguintes planos:

- α de equação $x - 4y + 2z = 6$
- β de equação $\frac{x}{2} - 2y + z = 3$
- χ de equação $-2x + 8y - 2z = 6$

Qual é a afirmação verdadeira?

- (A)** α e β são coincidentes e χ interseca-os;
(B) α e β são estritamente paralelos e χ interseca-os;
(C) α , β e χ interseçam-se dois a dois;
(D) α , β e χ são estritamente paralelos.

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma superfície esférica centrada na origem e o ponto $A(5,4,-2)$ nela.
Qual das condições seguintes representa uma equação cartesiana do plano tangente a essa superfície esférica no ponto A ?

- (A)** $5(x - 5) + 4(y - 4) - 2(z + 2) = 0$ **(B)** $5(x + 5) + 4(y + 4) + 2(z - 2) = 0$
(C) $5x + 4y - 2z = 7$ **(D)** $5x + 4y - 2z = -7$

4. Considere, num referencial o.n. xOy , a reta r cuja equação reduzida é $y = -2x + 1$.
Das equações vectoriais seguintes, há apenas uma de uma reta não perpendicular a r .
Indique a opção certa.

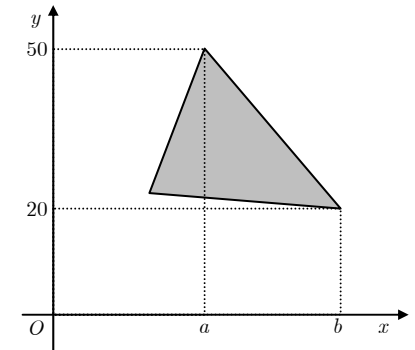
- (A)** $(x, y) = (1, 2) + k(12, 6), k \in \mathbb{R}$ **(B)** $(x, y) = (2, 3) + k(-10, -5), k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y) = (3, 4) + k(8, -4), k \in \mathbb{R}$ **(D)** $(x, y) = (4, 5) + k(-6, -3), k \in \mathbb{R}$

5. No último dia de uma feira do livro, um editor pretende vender os livros normais e de bolso disponíveis.

Na figura ao lado está a região admissível referente a este problema de programação linear.

Sabe-se que:

- x representa o número de livros normais a vender pelo editor;
 - y representa o número de livros de bolso a vender pelo editor;
 - cada livro normal gera um lucro de 2 euros e cada livro de bolso gera um lucro de 1 euro;
 - o lucro máximo do editor é 128 euros;
 - $(a, 50)$ é um vértice da região admissível, sendo a um número natural inferior a 30
 - $(b, 20)$ é outro vértice da região admissível, sendo b um número natural superior a 50
- Indique o número de livros normais vendidos pelo editor de modo a maximizar o lucro.



- (A)** 20 **(B)** 39 **(C)** 52 **(D)** 54

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

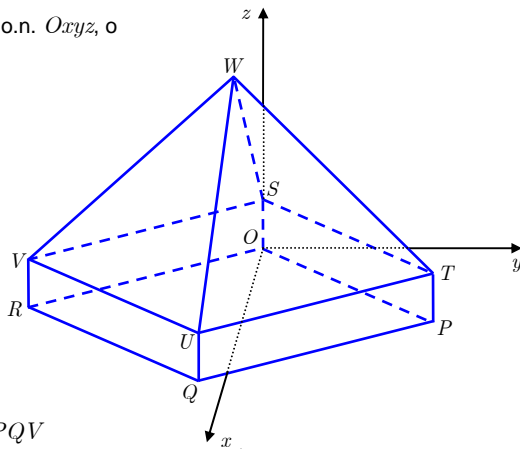
Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[OPQRSTUVW]$

Sabe-se que:

- o vértice P tem coordenadas $(8,6,0)$
- o vértice Q tem coordenadas $(14,-2,0)$
- o vetor \overline{VP} tem coordenadas $(2,14,-2)$

Usando processos analíticos, resolva os itens seguintes.



- 1.1. Determine a amplitude do ângulo OPV

Apresente o resultado em graus, arredondado às centésimas.

- 1.2. Escreva a equação geral do plano PQV

Sugestão: Comece por determinar as coordenadas do vetor \overline{PQ} e, em seguida, calcule as coordenadas de um vetor perpendicular a dois vetores não colineares do plano PQV

- 1.3. Sabe-se agora que:

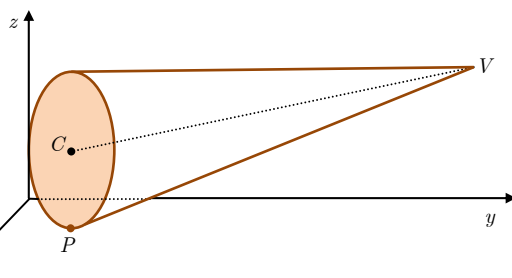
- a condição $x - 8 = \frac{y-6}{7} = \frac{2-z}{8}$ define a reta TW
- a condição $6x - 8y + 5z = 100$ define o plano QRW

Determine as coordenadas do vértice W

2. Ao lado está um cone de revolução num referencial o.n. $Oxyz$

Sabe-se que:

- o vértice V do cone tem coordenadas $(-5,15,5)$
- o ponto C é o centro da base do cone e tem coordenadas $(4,3,5)$
- o ponto P pertence à circunferência da base do cone e ao plano xOy
- r é a reta que contém a altura do cone e uma sua equação vetorial é $(x, y, z) = (-2, 11, 5) + k(3, -4, 0), k \in \mathbb{R}$



- 2.1. Escreva uma **condição cartesiana** que defina cada um dos seguintes conjuntos de pontos.

2.1.1. Reta que passa no ponto V e é perpendicular à reta r

2.1.2. Plano que contém a base do cone.

- 2.2. Determine o volume do cone.

3. “Os professores e os contínuos juntam-nos e sentam-nos em círculo, no centro do campo desportivo.”

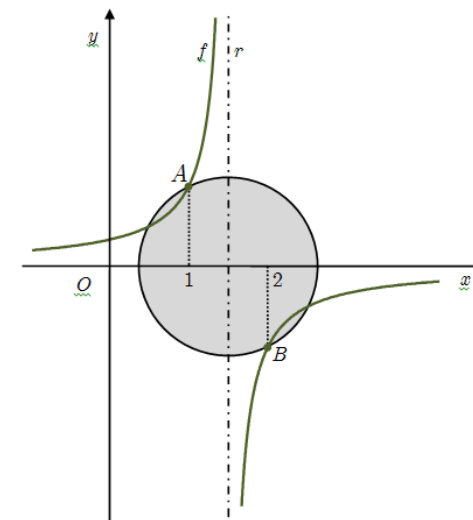
A JOGADORA DE GO, Shan Sa

Na figura do lado, estão representados, num referencial o. n. xOy , um círculo e parte do gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{3-2x}$$

Tal como a figura indica:

- A reta r é uma das assíntotas do gráfico de f
- O ponto A pertence ao gráfico de f e a sua abcissa é 1
- O ponto B pertence ao gráfico de f e a sua abcissa é 2



- 3.1. Indique as equações das assíntotas do gráfico de f

- 3.2. Sabendo que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, escreva uma sua equação simplificada usando o produto escalar de vetores.

4. O Vitalino gosta de ver os aviões a aterrarem no aeroporto.

Ele chegou à conclusão que a altitude de um certo avião foi dada, t minutos depois de o ver e até aterrar, pelo seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 500 - 1000 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{8}\right), \text{ com } t \geq 0$$



A variável t está expressa em radianos e a variável h em metros.

Usando processos exclusivamente analíticos, resolva os dois itens seguintes.

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

- 4.1. Segundo este modelo, quanto tempo demorou o avião a aterrar? Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondado às unidades).

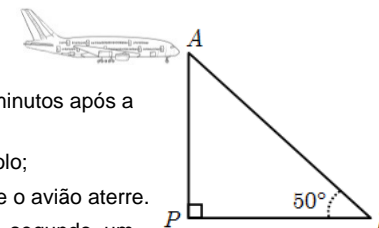
- 4.2. Considere o triângulo $[APL]$, retângulo em P , da figura. Sabe-se que:

- o ponto A representa a altitude do avião, três minutos após a contagem;
- o ponto P representa a projeção do avião no solo;
- o ponto L representa o lugar onde se prevê que o avião aterre.

Tal como a figura sugere, o avião vai aterrar segundo um ângulo de amplitude 50° com a horizontal.

Naquele instante (três minutos após a contagem), qual era a distância entre a projeção do avião no solo e o lugar onde se previa a aterragem?

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.



FIM

COTAÇÕES

Grupo I (30 pontos)	Cada resposta certa: 6	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
--------------------------------	------------------------	---------------------------------------------------

Grupo II (170 pontos)	1.....	59	2.....	43	3.....	34	4.....	34
	1.1.....	17	2.1.1.....	13	3.1.....	13	4.1.....	17
	1.2.....	21	2.1.2.....	13	3.2.....	21	4.2.....	17
	1.3.....	21	2.2.....	17				