

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 7

2.º Período

13/02/19

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

--	--	--

O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Caderno 1: 40 minutos (é permitido o uso de calculadora)

1. Considere a sucessão definida por $a_n = 2 - \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

Se M o conjunto dos majorantes e N o conjunto dos minorantes de (a_n) , pode-se concluir que:

(A) $M = \emptyset$ e $N = \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right]$

(B) $M = \emptyset$ e $N = \left]-\infty, -2\right]$

(C) $M = \left[1, +\infty\right[$ e $N = \emptyset$

(D) $M = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ e $N = \emptyset$

2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma octogonal regular $[ABCDEFGHJKLMNPQ]$, de bases paralelas ao plano xOy .

Sabe-se que:

- a altura do prisma é 9;
- o plano BCK está definido pela equação $x + 3y - 7 = 0$.

- 2.1. Qual das seguintes pode representar uma equação vetorial da reta BG ?

(A) $(x, y, z) = (7, 7, 0) + k(-3, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

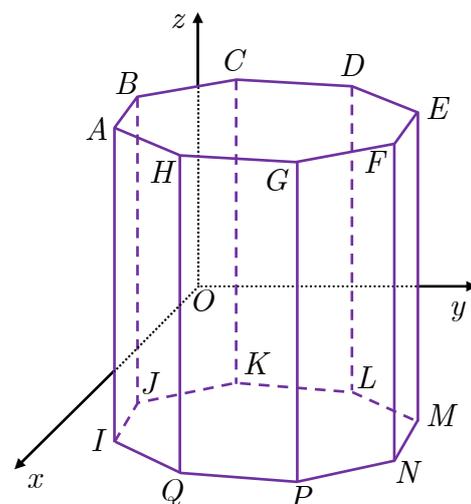
(B) $(x, y, z) = (7, 0, 7) + k(1, 3, 0), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (7, 0, 7) + k(-3, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (7, 7, 0) + k(1, 3, 0), k \in \mathbb{R}$

- 2.2. Admita que $\overline{BC} = 3$.

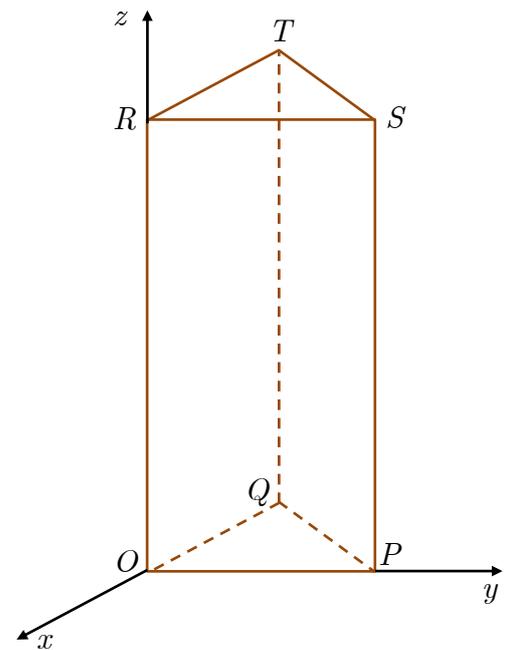
Determine o valor de $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CJ}$.



3. Considere, no referencial o.n. $Oxyz$ da figura, o prisma triangular reto $[OPQRST]$.

Sabe-se que:

- o volume do prisma é igual a 36;
- as bases $[OPQ]$ e $[RST]$ são triângulos retângulos e paralelos ao plano xOy ;
- o vértice P pertence ao eixo Oy e tem ordenada 3;
- o vértice Q pertence ao eixo Ox e tem abcissa negativa;
- o vértice R tem coordenadas $(0,0,6)$;
- o plano TSO é definido pela equação $3x - 4y + 2z = 0$.



3.1. O plano α está definido pela equação $mx + 3y - z = 0$.

Sabendo que os planos TSO e α são perpendiculares, o valor de m é:

- (A) $\frac{11}{6}$ (B) $-\frac{20}{3}$ (C) $-\frac{19}{6}$ (D) $\frac{14}{3}$

3.2. Mostre que a abcissa do vértice Q é -4 .

3.3. Escreva a equação geral do plano β , paralelo ao plano TSO , e que passa no ponto Q .

3.4. Seja I o ponto de tangência entre a superfície esférica de centro $C(3,-5,0)$ e o plano TSO .

Determine as coordenadas do ponto I .

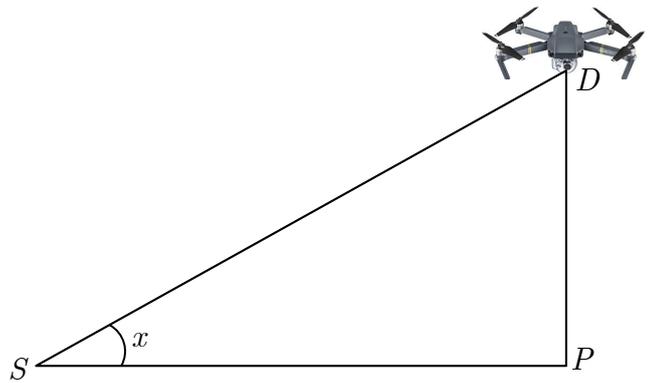
Sugestão: comece por escrever uma equação vetorial da reta que contém o ponto C e que é perpendicular ao plano TSO e utilize-a para determinar as coordenadas do ponto I .



4. Um *drone* foi lançado a partir do solo e a sua altitude foi dada segundo o esquema da figura ao lado.

Relativamente a essa figura, tem-se que:

- S representa o ponto do solo de onde se vê o *drone*;
- o ponto D representa o *drone* no ar;
- o ponto P representa a projeção vertical de D no solo;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo DSP , $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Admita que a altitude, h , em metros, do *drone* é dada, em função de x , por

$$h(x) = (80 - x^2) \operatorname{sen}(x).$$

Algum tempo depois de o *drone* sair do solo, constatou-se que a amplitude do ângulo DSP foi duas vezes maior e a sua altitude diminuiu 10%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x , sabendo-se que esse valor existe e é único.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de x em radianos, arredondado às centésimas.

FIM DO CADERNO 1



COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	4.	
8	8	15	8	15	15	20	15	104



Caderno 2: 50 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

5. Considere a sucessão definida por $b_n = \frac{2n+5}{n+1}$.
- 5.1. Estude a sucessão (b_n) quanto à monotonia.
- 5.2. Mostre que (b_n) é limitada e indique o supremo e o ínfimo.
Nota: Supremo é o menor dos majorantes de (b_n) e ínfimo é o maior dos minorantes de (b_n) .
- 5.3. Verifique se $\frac{7}{3}$ é termo de (b_n) e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.

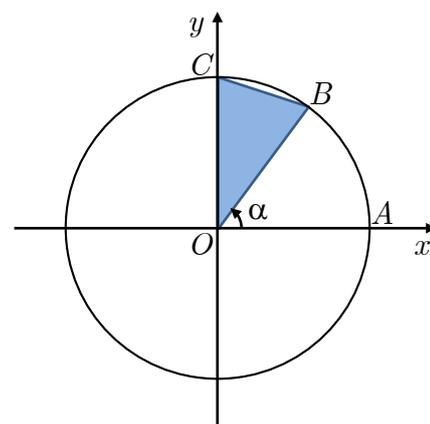
6. Usando o método de indução matemática, mostre que, $\forall n \geq 4$, $n^2 - 3n$ é um número par.

7. Na circunferência trigonométrica da figura, está o triângulo $[OBC]$ e o ponto A .

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e à reta de equação $x = 1$;
- o ponto B pertence à circunferência e ao primeiro quadrante;
- o ponto C pertence à circunferência e à reta de equação $y = 1$.

Seja α a amplitude do ângulo orientado assinalado na figura cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta OB .



Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[OBC]$?

- (A) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ (B) $\frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB}}{2}$ (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (D) $\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{2}$

8. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação vetorial seguinte.

$$(x, y, z) = (1, 0, -2) + k(2, 1, 0) + t(-3, -1, 2), k, t \in \mathbb{R}$$

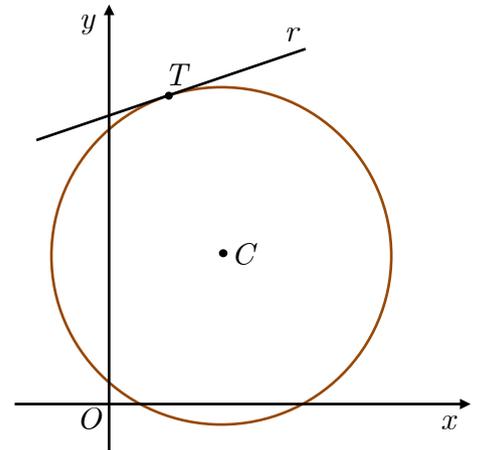
Qual das seguintes é uma equação cartesiana de α ?

- (A) $2x - 4y + z = 0$ (B) $2x - 4y + z + 1 = 0$
(C) $3x + y - 2z = 0$ (D) $3x + y - 2z + 1 = 0$



9. Considere, no referencial o.n. xOy da figura:
- a circunferência de centro C definida pela equação $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 20$;
 - a reta r de declive $\frac{1}{3}$;
 - o ponto de tangência do primeiro quadrante, T , entre a reta r e a circunferência.

Determine as coordenadas de T .



FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
5.1.	5.2.	5.3.	6.	7.	8.	9.	
20	20	10	15	8	8	15	96
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							200

