Teste de Matemática A

2022 / 2023

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

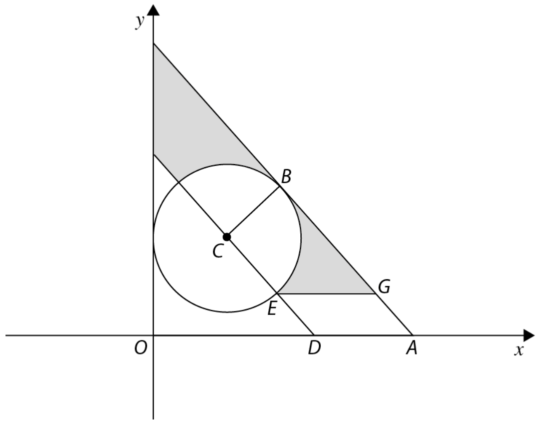
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy:

- a circunferência de centro C e de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9$
- a reta AB, tangente à circunferência no ponto B, de equação $(x, y) = \left(2\sqrt{2}, 5\right) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$
- o trapézio $[ABCD]$;
- o paralelogramo $[ADEG]$.



Sabe-se ainda que o ponto E pertence à circunferência e os pontos A e D pertencem ao eixo Ox.

1.1. Considere as seguintes afirmações:

I. A reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

II. O ponto de coordenadas $\left(\sqrt{32}, 10\right)$ é um ponto da reta AB.

Acerca das afirmações anteriores, pode concluir-se que:

(A) apenas a I é verdadeira. **(B)** apenas a II é verdadeira.

(C) ambas são falsas. **(D)** ambas são verdadeiras.

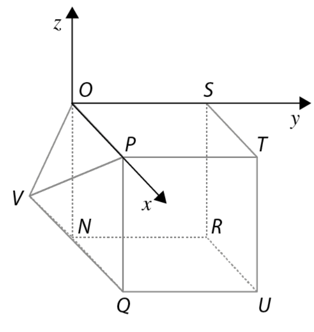
1.2. Mostre que a circunferência representada na figura tem raio 2 e centro no ponto de coordenadas $(2, 3)$.

1.3. Mostre que a equação reduzida da reta CD é $y = -x + 5$.

1.4. Escreva uma condição que defina a região a sombreado, incluindo a fronteira.

2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com uma face do cubo e está contida no plano xOz;
- o ponto P pertence ao eixo Ox;
- o ponto U tem coordenadas $(5, 5, -5)$.



2.1. Determine uma condição que defina a superfície esférica de diâmetro $[OR]$.

2.2. Em qual das opções se encontra uma equação vetorial da reta que passa pelo ponto P e é paralela ao eixo das cotas?

(A) $(x, y, z) = (5, 0, 0) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$ **(B)** $(x, y, z) = (5, 0, 0) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (0, 5, -5) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$ **(D)** $(x, y, z) = (5,0, -5) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

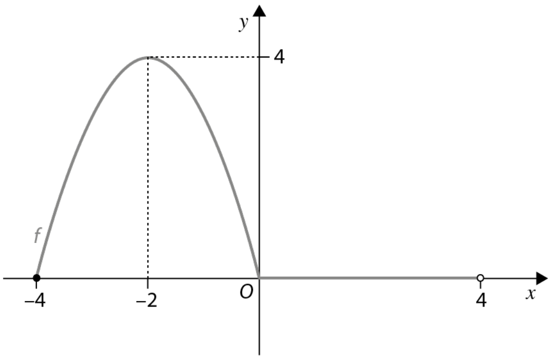
2.3. Sabendo que o volume do sólido é 150, determine as coordenadas do ponto V.

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos A e B, de coordenadas $(1, 2, -2)$ e $(2, 1, 1)$, respetivamente, e o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(a, b, -1)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Quais são os valores de a e de b para os quais os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ são colineares?

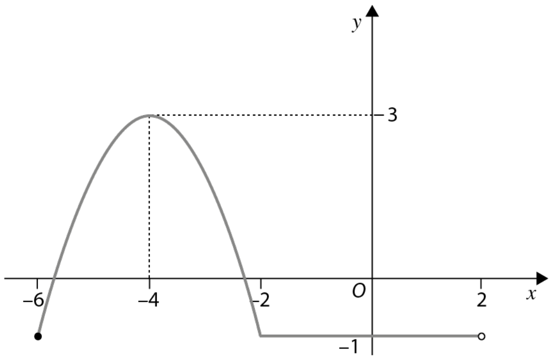
(A) $a = -3$ e $b = 3$ **(B)** $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$ **(C)** $a = 3$ e $b = -3$ **(D)** $a = \frac{1}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$

4. Considere a função f, de domínio $[-4, 4[$, representada graficamente na figura.

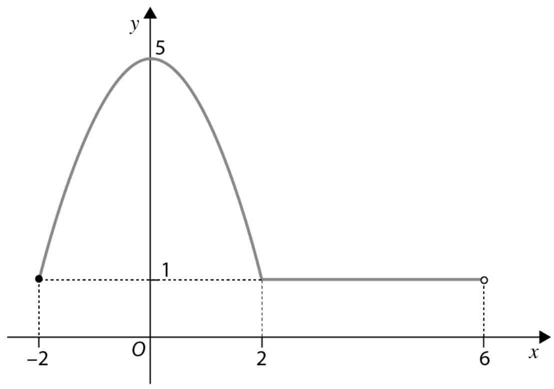


4.1. Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x-2) + 1$?

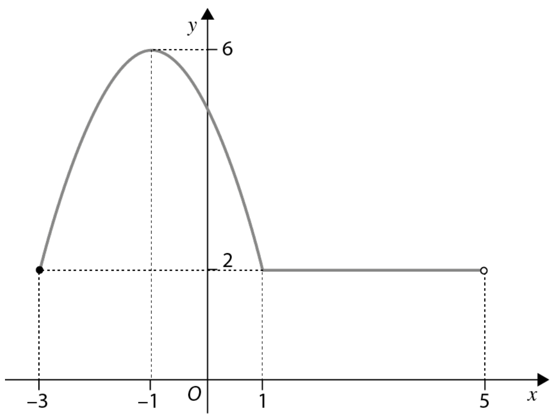
(A)



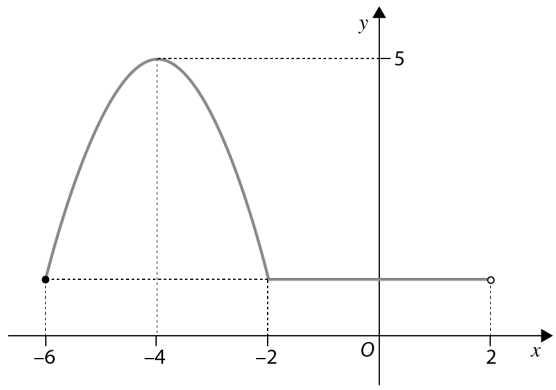
(B)



(C)



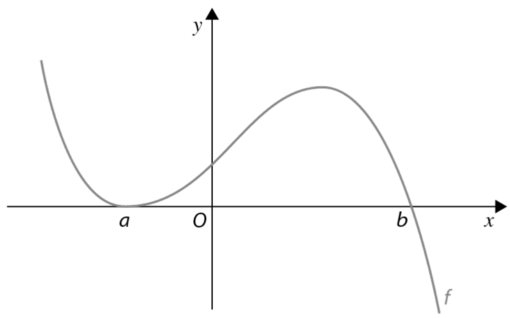
(D)



4.2. Defina a função f por ramos, de acordo com as condições da figura e sabendo que, no intervalo $[-4, 0]$, a função f é definida por uma função quadrática.

4.3. Considere a função afim h, cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos de coordenadas $(2, 1)$ e $(1, 3)$. Estude o sinal da função j definida por $j(x) = (-f(x) - 1) \times h(x)$.

5. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f, de domínio $\mathbb{R}$.



A função f tem apenas dois zeros a e b.

Seja g a função definida por $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g?

(A) $]-\infty, b[$ **(B)** $]a, b[$ **(C)** $]-\infty, a[\cup]a, b[$ **(D)** $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$

6. Considere a função polinomial f, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3$$

Sabe-se que a função f tem dois zeros e que o seu contradomínio é um intervalo da forma $[k, +\infty[$, onde k é um número real negativo.

Considere os pontos A, B e C do gráfico de f, dos quais se sabe que:

- A e B são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas, sendo A o ponto de menor abcissa;
- o ponto C tem ordenada k.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a área do triângulo $[ABC]$.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A, B e C e, nas coordenadas dos pontos em que é necessário fazer arredondamentos, utilizar duas casas decimais;
- desenhar o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.1**	**4.2.**	**4.3**	**5.**	**6.**	
10	15	15	20	20	10	20	10	10	20	20	10	20	**200**

Teste N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (A)

I. Afirmação verdadeira.

(1, −1) é um vetor diretor da reta AB, logo o seu declive é $\frac{-1}{1} = -1$, que é igual ao declive da bissetriz dos quadrantes pares (reta de equação $y = -x$).

II. Afirmação falsa.

Para que o ponto de coordenadas $\left(\sqrt{32}, 10\right)$ seja um ponto da reta AB, tem de existir $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\left(\sqrt{32}, 10\right) = \left(2\sqrt{2}, 5\right) + k(-1, 1) \Leftrightarrow \left(4\sqrt{2}, 10\right) = \left(2\sqrt{2} - k, 5 + k\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - k \ \wedge \ 10 = 5 + k$$

$$\Leftrightarrow k = -2\sqrt{2} \ \wedge \ k = 5 \qquad \text{Condição impossível.}$$

Logo, o ponto de coordenadas $\left(\sqrt{32}, 10\right)$ não é um ponto da reta AB.

1.2. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 6y + 3^2 = -9 + 2^2 + 3^2$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Equação de uma circunferência de centro (2, 3) e raio 2.

1.3. A reta CD é paralela à reta AB, logo têm declives iguais. Assim, a equação reduzida da reta CD é da forma $y = -x + b,\ b \in \mathbb{R}$.

Como C, centro da circunferência, tem coordenadas (2, 3) e pertence à reta CD, vem que:

$$3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$$

Assim, a equação reduzida da reta CD é $y = -x + 5$.

1.4.

- Condição que define o exterior do círculo: $(x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 4$
- Equação reduzida da reta CD: $y = -x + 5$
- Equação reduzida da reta AB: $y = -x + 5 + 2\sqrt{2}$

Cálculo auxiliar

$y = -x + b$ e $\left(2\sqrt{2}, 5\right) \in AB$

Logo:

$5 = -2\sqrt{2} + b \Leftrightarrow b = 5 + 2\sqrt{2}$

- Equação reduzida da reta EG: $y = 3 - \sqrt{2}$

Cálculo auxiliar
O ponto *E* é um dos pontos da interseção da circunferência com a reta CD:
$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \ \wedge\ y = -x + 5$
Assim:
$(x-2)^2 + (-x+5-3)^2 = 4 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (-x+2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2$
$\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \ \vee\ x = 2 - \sqrt{2}$
Como o ponto E é o ponto de interseção com maior abcissa, vem que $x = 2 + \sqrt{2}$. Logo:
$y = -(2+\sqrt{2}) + 5 \Leftrightarrow y = 3 - \sqrt{2}$

Condição que define a região a sombreado, incluindo a fronteira:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 4 \ \wedge\ y \leq -x + 5 + 2\sqrt{2} \ \wedge\ y \geq -x + 5 \ \wedge\ y \geq 3 - \sqrt{2} \ \wedge\ x \geq 0$$

2.

2.1. $O(0,0,0)$ $\qquad$ $R(0,5,-5)$

Seja C o centro da superfície esférica. Então, C é o ponto médio de $[OR]$:

$C = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0-5}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

raio $= \frac{\overline{OR}}{2} = \frac{\sqrt{(0-0)^2+(5-0)^2+(-5-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

Condição da superfície esférica pretendida:

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

2.2. Opção (D)

Uma reta é paralela ao eixo das cotas, se o vetor diretor dessa reta for colinear com o vetor de coordenadas $(0,0,1)$.

Se uma reta é paralela ao eixo das cotas e passa pelo ponto P, então também passa pelo ponto Q de coordenadas $(5,0,-5)$.

2.3. Sendo V o vértice da pirâmide, as coordenadas de V são da forma $\left(\frac{5}{2},\ y, -\frac{5}{2}\right), y < 0$.

Seja h a altura da pirâmide.

Volume do sólido = Volume da pirâmide + Volume do cubo

$$150 = \frac{1}{3} \times 5^2 \times h + 5^3$$

$$\Leftrightarrow 150 = \frac{25}{3} h + 125$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{3} h = 25$$

$$\Leftrightarrow h = 3$$

Assim, $V\left(\frac{5}{2}, -3, -\frac{5}{2}\right)$.

3. Opção (B)

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1,1) - (1,2,-2) = (1,-1,3)$

$\vec{u} = (a,b,-1)$

Para que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ sejam colineares tem de se verificar $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} = \frac{-1}{3}$, ou seja, $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

4.

4.1. Opção (B)

O gráfico da função f sofre uma translação associada ao vetor de coordenadas $(2,0)$, seguida de uma translação associada ao vetor $(0,1)$.

4.2. Em $[-4,0]$:

$f(x) = a(x-h)^2 + k$, onde o ponto de coordenadas (h,k) representa o vértice da parábola, neste caso, $(-2,\ 4)$.

Temos que $f(x) = a(x+2)^2 + 4$.

Como $(-4,\ 0)$ é um ponto da parábola, então:

$0 = a(-4+2)^2 + 4 \Leftrightarrow 0 = a \times 4 + 4 \Leftrightarrow a = -1$

Assim, $f(x) = -(x+2)^2 + 4$, para $x \in [-4,0]$.

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 4 & se \quad -4 \leq x \leq 0 \\ 0 & se \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

4.3. A expressão analítica da função h é do tipo $y = mx + b$, onde $m = \frac{3-1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$.

$(2,1) \in$ gráfico de $h \wedge y = -2x + b$.

Então:

$1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5$

Assim, $h(x) = -2x + 5$.

Quadro de sinal da função j:

$D_f = [-4, 4[$

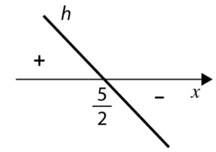
$D_h = \mathbb{R}$

$D_j = [-4, 4[$

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-4}$		$\mathbf{\frac{5}{2}}$		**4**
Sinal de $-f(x) - 1$	–	–	–	–	n.d.
Sinal de $h(x)$	+	+	0	–	n.d.
Sinal de $j(x) = (-f(x) - 1) \times h(x)$	–	–	0	+	n.d.

Cálculo auxiliar

$h(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$



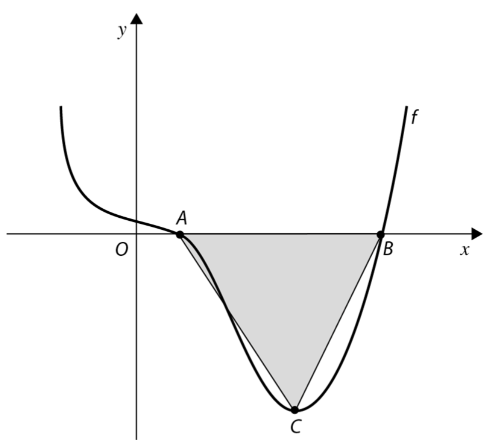
A função j é negativa em $\left[-4, \frac{5}{2}\right[$ e é positiva em $\left]\frac{5}{2}, 4\right[$.

5. Opção (C)

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: f(x) > 0\} =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$

6. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3$

Janela utilizada: $[-5, 5] \times [-40, 40]$



$A\ (1{,}13; 0)$

$B\ (4{,}53; 0)$

$C\ (3{,}46; -36{,}85)$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |y_C|}{2} = \frac{3{,}4 \times 36{,}85}{2} \approx 62{,}6$$