# Investigação Operacional

## Casos de estudo

Licenciatura em Gestão

3º Ano

2010/2011

# Caso 1

- DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

  Uma empresa farmacêutica pretende produzir um medicamento durante os próximos quatro meses. Estima-se que a procura do medicamento para os quatro meses seja de 1500, 1500, 2300 e 2500 unidades, respectivamente. Em cada mês, a procura pode ser satisfeita recorrendo:

  i. a excesso de produção de um mês anterior, a qual estava armazenada;
  ii. a produção do mês em curso;
  iii. a excesso de produção de um mês posterior que é transferida para meses anteriores cujas procuras não foram totalmente satisfeitas (i.e., admite-se que em cada mês a procura não seja totalmente satisfeita, sendo possível completá-la nos meses seguintes).

  Atendendo às três formas de satisfação da procura, houve necessidade de definir três tipos de custos:

  - PRODUÇÃO, o qual foi estimado em 3€ por unidade, para qualquer um dos meses;
  - ARMAZENAMENTO (uma vez que, cada unidade de medicamento que não é vendida tem que ser armazenada), o qual foi estimado em 0.4€ por unidade e por mês;
  - DEFERIMENTO da PROCURA, o qual foi estimado em 1.5€ por unidade e por mês.

# **Caso 1** (cont.)

- DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

  Sabendo que a capacidade produtiva estimada para o período de quatro meses é de 700, 1500, 3000, 2600 unidades, respectivamente, a empresa pretende determinar o plano de produção/armazenamento que minimiza os custos totais.

- FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PLANEAMENTO DE PRODUÇÃO COMO UM PROBLEMA DE TRANSPORTES

  - ANALOGIAS ENTRE O PROBLEMA DE PRODUÇÃO E O PROBLEMA DE TRANSPORTES

| **Problema de Transportes** | **Problema de Produção** |
|---|---|
| Origem **i** | Produção do mês **i** |
| Destino **j** | Procura do mês **j** |
| Disponibilidade na origem **i** | Capacidade produtiva no mês **i** |
| Procura no destino **j** | Procura no mês **j** |
| Custo de transporte da origem **i** para o destino **j** | Custo de produção e armazenamento do mês **i** para o mês **j** |

# **Caso 1** (cont.)

- IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO PROBLEMA DE TRANSPORTES

  **ORIGENS** – correspondem aos meses de produção, pelo que, o número total de origens é quatro (ou seja, **m**=4);

  **DESTINOS** – correspondem aos meses de consumo, pelo que, o número total de destinos é quatro (ou seja, **n**=4);

  **DISPONIBILIDADE DE MEDICAMENTO EM CADA ORIGEM i ($a_i$)** – corresponde à capacidade de produção da empresa no mês **i**, ou seja,

| **i** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{a_i}$ | 700 | 1500 | 3000 | 2600 |

;

  **PROCURA DE MEDICAMENTO EM CADA DESTINO j ($b_j$)** – corresponde à procura do medicamento no mês **j**, ou seja,

| **i** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{b_j}$ | 1500 | 1500 | 2300 | 2500 |

**Nota**: Como o problema se encontra em equilíbrio, não é necessário criar nem origens nem destinos fictícios.

# **Caso 1** (cont. )

- DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DO PROBLEMA DE TRANSPORTES

A definição das variáveis tem que contemplar as três formas de satisfazer a procura de medicamento em cada um dos quatro meses, deste modo, as variáveis são definidas por:

$\mathbf{x_{ij}}$ – unidades de medicamento “transportadas” do mês **i** para o mês **j**, i.e., unidades de medicamento produzidas no mês **i** e vendidas no mês **j**.

- CUSTO UNITÁRIO DE “TRANSPORTE“ DO MÊS **i** PARA O MÊS **j**

Existem três tipos de custos, pelo que, o custo unitário de “transporte” do mês i para o mês j (i.e., o custo unitário de produção no mês i para venda no mês j) é definido do seguinte modo:

$$c_{ij}=\begin{cases}\text{custo de produção no mês } \mathbf{i}, & \text{se } \mathbf{i}=\mathbf{j}\\[2ex] \text{custo de produção no mês } \mathbf{i}+ & \\ \text{custo de armazenamento no mês } \mathbf{i} \text{ até ao mês } \mathbf{j}, & \text{se } \mathbf{i}<\mathbf{j}\\[2ex] \text{custo de produção no mês } \mathbf{i}+ & \\ \text{custo de satisfazer a procura do mês } \mathbf{j} \text{ através da produção do mês } \mathbf{i}, & \text{se } \mathbf{i}>\mathbf{j}\end{cases}$$

# Caso 1 (cont.)

- MATRIZ DOS CUSTOS UNITÁRIOS DE "TRANSPORTE"

$$C=\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 3 & 3.4 & 3.8 & 4.2 \\ 4.5 & 3 & 3.4 & 3.8 \\ 6 & 4.5 & 3 & 3.4 \\ 7.5 & 6 & 4.5 & 3 \end{bmatrix}.$$

- MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE PRODUÇÃO

$$\text{Min } z=3x_{11}+3.4x_{12}+3.8x_{13}+4.2x_{14}+4.5x_{21}+3x_{22}+3.4x_{23}+3.8x_{24}+6x_{31}+4.5x_{32}+ 3x_{33}+3.4x_{34}+7.5x_{41}+6x_{42}+4.5x_{43}+3x_{44}$$

s.a.

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=700$ (capacidade produtiva no mês 1 )

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1500$ (capacidade produtiva no mês 2 )

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=3000$ (capacidade produtiva no mês 3 )

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=2600$ (capacidade produtiva no mês 4 )

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1500$ (procura no mês 1 )

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1500$ (procura no mês 2 )

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=2300$ (procura no mês 3 )

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=2500$ (procura no mês 4 )

$x_{ij}\geq 0,\ i, j=1, 2, 3, 4$

# Caso 1 (cont.)

## RESOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Dado que o modelo matemático é um exemplar de Programação Linear, para o resolver podemos recorrer ao *Solver* do Excel. Os *outputs* relevantes para a identificação da solução óptima do problema, bem como, o valor óptimo são os seguintes:

**Microsoft Excel 12.0 Relatório de respostas**

Célula de destino (Mín)

| Célula | Nome | Valor original | Valor final |
|---|---|---|---|
| $B$12 | VALOR DA F.O. (Z) | 0 | 25950 |

**Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade**

Células ajustáveis

| Célula | Nome | Final Valor | Reduzido Custo | Objectivo Coêficiente | Permissível Aumentar | Permissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$6 | x11 | 700 | 0 | 3 | 1,9 | 1E+30 |
| $C$6 | x12 | 0 | 1,9 | 3,4 | 1E+30 | 1,9 |
| $D$6 | x13 | 0 | 3,8 | 3,8 | 1E+30 | 3,8 |
| $E$6 | x14 | 0 | 5,7 | 4,2 | 1E+30 | 5,7 |
| $F$6 | x21 | 800 | 0 | 4,5 | 0 | 1,9 |
| $G$6 | x22 | 700 | 0 | 3 | 1,9 | 0 |
| $H$6 | x23 | 0 | 1,9 | 3,4 | 1E+30 | 1,9 |
| $I$6 | x24 | 0 | 3,8 | 3,8 | 1E+30 | 3,8 |
| $J$6 | x31 | 0 | 0 | 6 | 1E+30 | 0 |
| $K$6 | x32 | 700 | 0 | 4,5 | 0 | 0 |
| $L$6 | x33 | 2300 | 0 | 3 | 0 | 1E+30 |
| $M$6 | x34 | 0 | 1,9 | 3,4 | 1E+30 | 1,9 |
| $N$6 | x41 | 0 | 0 | 7,5 | 1E+30 | 0 |
| $O$6 | x42 | 100 | 0 | 6 | 0 | 1,9 |
| $P$6 | x43 | 0 | 0 | 4,5 | 1E+30 | 0 |
| $Q$6 | x44 | 2500 | 0 | 3 | 1,9 | 1E+30 |

Restrições

| Célula | Nome | Final Valor | Sombra Preço | Restrição Lado direito | Permissível Aumentar | Permissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$16 | (R1) | 700 | 1,5 | 700 | 0 | 700 |
| $R$17 | (R2) | 1500 | 3 | 1500 | 0 | 700 |
| $R$18 | (R3) | 3000 | 4,5 | 3000 | 0 | 700 |
| $R$19 | (R4) | 2600 | 6 | 2600 | 0 | 100 |
| $R$20 | (R5) | 1500 | 1,5 | 1500 | 700 | 0 |
| $R$21 | (R6) | 1500 | 0 | 1500 | 0 | 1E+30 |
| $R$22 | (R7) | 2300 | -1,5 | 2300 | 700 | 0 |
| $R$23 | (R8) | 2500 | -3 | 2500 | 100 | 0 |

# Caso 2

- DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Uma companhia aérea realiza dois tipos de voo entre as cidades **A** e **B**. As tripulações pertencem à cidade **A**, partem desta cidade**,** voando para a cidade **B** e têm que regressar à cidade **de** origem, num voo posterior, no mesmo dia ou no dia seguinte.

O regresso à cidade **A** é feito operando como tripulação de um voo de **B** para **A** cuja partida decorre, pelo menos, 90 minutos depois da chegada à cidade **B**.

As horas de partida e chegada de cada voo entre as cidades **A** e **B** são apresentadas na tabela seguinte:

| **Voo** | De **A** | para **B** | **Voo** | De **B** | para **A** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6:00 | 9:00 | 15 | 7:00 | 9:30 |
| 2 | 8:30 | 11:30 | 16 | 10:30 | 13:00 |
| 3 | 13:45 | 16:45 | 17 | 16:45 | 19:15 |
| 4 | 16:10 | 19:10 | 18 | 20:40 | 23:10 |

Com base nestes horários, a companhia pretende emparelhar os voos de forma a minimizar o tempo total sem voo de todas as tripulações (i.e., o tempo total de espera de todas as tripulações).

# **Caso 2** (cont.)

- FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE EMPARELHAMENTO DE VOOS COMO UM PROBLEMA DE AFECTAÇÃO
  - ANALOGIAS ENTRE O PROBLEMA DE EMPARELHAMENTO DE VOOS E O PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

| **Problema de Afectação** | **Problema de Emparelhamento de Voos** |
|---|---|
| Agente **i** | Voo **i** (com origem em **A**) |
| Tarefa **j** | Voo **j** (com origem em **B**) |
| Custo de afectação do agente **i** à tarefa **j** | Tempo de espera da tripulação se realizar o voo **j** após o voo **i** |

  - TEMPOS DE ESPERA (EM MINUTOS) DAS TRIPULAÇÕES

Voos com origem em **B**

| Voos com origem em **A** | | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1320 | 90 | 465 | 700 |
| | 2 | 1170 | 1380 | 315 | 550 |
| | 3 | 855 | 1065 | 1440 | 235 |
| | 4 | 710 | 920 | 1295 | 90 |

# **Caso 2** (cont.)

- IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

**AGENTES** – correspondem aos voos com origem na cidade **A**, pelo que, o número total de agentes é quatro;

**TAREFAS** – correspondem aos voos com origem em **B**, pelo que, o número total de destinos é quatro;

**Parâmetro n** – corresponde ao número total de agentes ou de tarefas, ou seja, **n**=4. (Como o problema se encontra em equilíbrio, não é necessário criar nem agentes nem tarefas fictícias).

- DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DO PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se o voo } \mathbf{i} \text{ fica emparelhado com o voo } \mathbf{j} \\ \quad \text{(ou seja, se após o voo } \mathbf{i} \text{ a tripulação realizar o voo } \mathbf{j}\text{)} \\ 0, \text{ no caso contrário} \end{cases}$$

$\mathbf{i}=1,2,3,4$; $\mathbf{j}=15,16,17,18$

# Caso 2 (cont.)

- MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

$$\text{Min } z=1320x_{1,15}+90x_{1,16}+465x_{1,17}+700x_{1,18}+1170x_{2,15}+1380x_{2,16}+315x_{2,17}+550x_{2,18}+855x_{3,15}+1065x_{3,16}+1440x_{3,17}+235x_{3,18}+710x_{4,15}+920x_{4,16}+1295x_{4,17}+90x_{4,18}$$

s.a.

$x_{1,15}+x_{1,16}+x_{1,17}+x_{1,18}=1$ ( R1: o voo 1 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **B** )

$x_{2,15}+x_{2,16}+x_{2,17}+x_{2,18}=1$ (R2:o voo 2 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **B** )

$x_{3,15}+x_{3,16}+x_{3,17}+x_{3,18}=1$ (R3:o voo 3 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **B** )

$x_{4,15}+x_{4,16}+x_{4,17}+x_{4,18}=1$ (R4:o voo 4 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **B** )

$x_{1,15}+x_{2,15}+x_{3,15}+x_{4,15}=1$ (R5:o voo 15 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **A** )

$x_{1,16}+x_{2,16}+x_{3,16}+x_{4,16}=1$ (R6:o voo 16 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **A** )

$x_{1,17}+x_{2,17}+x_{3,17}+x_{4,17}=1$ (R7:o voo 17 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **A** )

$x_{1,18}+x_{2,18}+x_{3,18}+x_{4,18}=1$ (R8:o voo 18 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **A** )

$x_{ij}\in\{0,1\},\ i=1,2,3,4;\ j=15,16,17,18$ (R9 )

# Caso 2 (cont.)

- RESOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Este modelo matemático é um exemplar de Programação Linear Inteira (especificamente, Binária). No entanto, atendendo às características particulares da sua matriz de restrições, se as restrições (R9) forem substituídas pelas restrições $x_{ij} \geq 0$, i=1,2,3,4; j=15,16,17,18 a solução óptima não sofrerá alteração. Assim, para resolver o problema podemos recorrer ao *Solver* do Excel. Os *outputs* relevantes para a identificação da solução óptima, bem como, o valor óptimo são os seguintes:

**Microsoft Excel 12.0 Relatório de respostas**

Célula de destino (Mín)

| Célula | Nome | Valor original | Valor final |
|---|---|---|---|
| $B$12 | VALOR DA F.O. (Z) | 0 | 1350 |

**Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade**

Células ajustáveis

| Célula | Nome | Final Valor | Reduzido Custo | Objectivo Coêficiente | Permissível Aumentar | Permissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$6 | x1,15 | 0 | 0 | 1320 | 1E+30 | 0 |
| $C$6 | x1,16 | 1 | 0 | 90 | 1440 | 1E+30 |
| $D$6 | x1,17 | 0 | 0 | 465 | 0 | 1440 |
| $E$6 | x1,18 | 0 | 0 | 700 | 1E+30 | 0 |
| $F$6 | x2,15 | 0 | 0 | 1170 | 0 | 1440 |
| $G$6 | x2,16 | 0 | 1440 | 1380 | 1E+30 | 1440 |
| $H$6 | x2,17 | 1 | 0 | 315 | 1440 | 0 |
| $I$6 | x2,18 | 0 | 0 | 550 | 1E+30 | 0 |
| $J$6 | x3,15 | 0 | 0 | 855 | 1E+30 | 0 |
| $K$6 | x3,16 | 0 | 1440 | 1065 | 1E+30 | 1440 |
| $L$6 | x3,17 | 0 | 1440 | 1440 | 1E+30 | 1440 |
| $M$6 | x3,18 | 1 | 0 | 235 | 0 | 1E+30 |
| $N$6 | x4,15 | 1 | 0 | 710 | 0 | 0 |
| $O$6 | x4,16 | 0 | 1440 | 920 | 1E+30 | 1440 |
| $P$6 | x4,17 | 0 | 1440 | 1295 | 1E+30 | 1440 |
| $Q$6 | x4,18 | 0 | 0 | 90 | 0 | 0 |

Restrições

| Célula | Nome | Final Valor | Sombra Preço | Restrição Lado direito | Permissível Aumentar | Permissível Diminuir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$16 | (R1) | 1 | 465 | 1 | 0 | 0 |
| $R$17 | (R2) | 1 | 315 | 1 | 0 | 1 |
| $R$18 | (R3) | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $R$19 | (R4) | 1 | -145 | 1 | 0 | 1 |
| $R$20 | (R5) | 1 | 855 | 1 | 1 | 0 |
| $R$21 | (R6) | 1 | -375 | 1 | 0 | 0 |
| $R$22 | (R7) | 1 | 0 | 1 | 0 | 1E+30 |
| $R$23 | (R8) | 1 | 235 | 1 | 1 | 0 |

# Generalização do Caso 2

- Vamos agora considerar um caso mais geral do que o anterior.

  A companhia aérea realiza os mesmos tipos de voo, nos mesmos horários, no entanto, existem tripulações nas duas cidades.

  Mais uma vez, pretende determinar-se o emparelhamento dos voos de forma a minimizar o tempo total de espera de todas as tripulações.

  Neste caso, além de decidir a partição do conjunto de voos em subconjuntos com dois elementos (um de **A** para **B** e o outro de **B** para **A**), é necessário atribuir a cada subconjunto uma das cidades.

# Generalização do Caso 2 (cont.)

- FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE EMPARELHAMENTO DE VOOS COMO UM PROBLEMA DE AFECTAÇÃO
  - ANALOGIAS ENTRE O PROBLEMA DE EMPARELHAMENTO DE VOOS E O PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

| **Problema de Afectação** | **Problema de Emparelhamento de Voos** |
|---|---|
| Agente **i** | Voo **i** (com origem em **A**) |
| Tarefa **j** | Voo **j** (com origem em **B**) |
| Custo de afectação do agente **i** à tarefa **j** | Tempo de espera da tripulação se realizar os voos **i** e **j** |

  - DETERMINAÇÃO DOS TEMPOS DE ESPERA (EM MINUTOS) DAS TRIPULAÇÕES

    Neste caso, é necessário considerar as duas alternativas possíveis, para cada subconjunto: a tripulação pertence a **A** (ou equivalentemente, o primeiro voo realiza-se da cidade **A** para a cidade **B**) ou a tripulação pertence a **B** (ou equivalentemente, o primeiro voo realiza-se da cidade **B** para a cidade **A**).

# Generalização do Caso 2 (cont.)

- TEMPOS DE ESPERA (EM MINUTOS) DAS TRIPULAÇÕES
- Para tripulações de A

Voos com origem em **B**

| Voos com origem em **A** | | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1320 | 90 | 465 | 700 |
| | 2 | 1170 | 1380 | 315 | 550 |
| | 3 | 855 | 1065 | 1440 | 235 |
| | 4 | 710 | 920 | 1295 | 90 |

- Para tripulações de B

Voos com origem em **B**

| Voos com origem em **A** | | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1230 | 1020 | 645 | 410 |
| | 2 | 1380 | 1170 | 795 | 560 |
| | 3 | 255 | 1485 | 1110 | 875 |
| | 4 | 400 | 190 | 1255 | 1020 |

# Generalização do Caso 2 (cont)

- TEMPOS DE ESPERA (EM MINUTOS) DAS TRIPULAÇÕES (CONT)
- Para cada subconjunto de voos, selecciona-se o menor dos dois tempos determinados, obtendo-se:

Voos com origem em **B**

| Voos com origem em **A** | | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1230 | 90 | 465 | 410 |
| | 2 | 1170 | 1170 | 315 | 550 |
| | 3 | 255 | 1065 | 1110 | 235 |
| | 4 | 400 | 190 | 1255 | 90 |

- Podemos ainda considerar uma tabela auxiliar em que se regista, para cada subconjunto de voos, que tripulação tem o menor tempo de espera associado. Esta tabela serve apenas para facilitar a interpretação da solução do problema.

# Generalização do Caso 2 (cont)

- TEMPOS DE ESPERA (EM MINUTOS) DAS TRIPULAÇÕES (CONT)

Obtém-se então:

Voos com origem em **B**

| Voos com origem em **A** | | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | B | A | A | B |
| | 2 | A | B | A | A |
| | 3 | B | A | B | A |
| | 4 | B | B | B | A |

# Generalização do Caso 2 (cont.)

- IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

**AGENTES** – correspondem aos voos com origem na cidade **A**, pelo que, o número total de agentes é quatro;

**TAREFAS** – correspondem aos voos com origem em **B**, pelo que, o número total de destinos é quatro;

**Parâmetro n** – corresponde ao número total de agentes ou de tarefas, ou seja, **n**=4. (Como o problema se encontra em equilíbrio, não é necessário criar nem agentes nem tarefas fictícias).

- DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DO PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se o voo } i \text{ fica emparelhado com o voo } j \\ \quad (\text{ou seja, se os voos } i \text{ e } j \text{ são realizados pela mesma tripulação}) \\ 0, \text{ no caso contrário} \end{cases}$$

$i=1,2,3,4;\ j=15,16,17,18$

# Generalização do Caso 2 (cont.)

- MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

$$\text{Min } z = 1230x_{1,15} + 90x_{1,16} + 465x_{1,17} + 410x_{1,18} + 1170x_{2,15} + 1170x_{2,16} + 315x_{2,17} + 550x_{2,18} + 255x_{3,15} + 1065x_{3,16} + 1110x_{3,17} + 235x_{3,18} + 400x_{4,15} + 190x_{4,16} + 1255x_{4,17} + 90x_{4,18}$$

s.a. $x_{1,15} + x_{1,16} + x_{1,17} + x_{1,18} = 1$ ( R1: o voo 1 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **B** )

$x_{2,15} + x_{2,16} + x_{2,17} + x_{2,18} = 1$ (R2:o voo 2 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **B** )

$x_{3,15} + x_{3,16} + x_{3,17} + x_{3,18} = 1$ (R3:o voo 3 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **B** )

$x_{4,15} + x_{4,16} + x_{4,17} + x_{4,18} = 1$ (R4:o voo 4 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **B** )

$x_{1,15} + x_{2,15} + x_{3,15} + x_{4,15} = 1$ (R5:o voo 15 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **A** )

$x_{1,16} + x_{2,16} + x_{3,16} + x_{4,16} = 1$ (R6:o voo 16 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **A** )

$x_{1,17} + x_{2,17} + x_{3,17} + x_{4,17} = 1$ (R7:o voo 17 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **A** )

$x_{1,18} + x_{2,18} + x_{3,18} + x_{4,18} = 1$ (R8:o voo 18 fica afecto **a um e um só** voo com origem em **A** )

$x_{ij} \in \{0,1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 15, 16, 17, 18$ (R9 )

# Generalização do Caso 2 (cont.)

- RESOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Como o anterior, este modelo matemático é também um exemplar de Programação Linear Inteira (especificamente, Binária). Mais uma vez, se as restrições (R9) forem substituídas pelas restrições $x_{ij} \geq 0$, i=1,2,3,4; j=15,16,17,18 a solução óptima não sofrerá alteração. Assim, para resolver o problema podemos recorrer ao *Solver* do Excel. Os *outputs* relevantes para a identificação da solução óptima, bem como, o valor óptimo são os seguintes:

**Microsoft Excel 11.0 Answer Report**

Target Cell (Min)

| Cell | Name | Original Value | Final Value |
|---|---|---|---|
| $R$3 | Z | 0 | 750 |

**Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report**

Adjustable Cells

| Cell | Name | Final Value | Reduced Cost | Objective Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$2 | Var x1,15 | 0 | 510 | 1230 | 1E+30 | 510 |
| $C$2 | Var x1,16 | 1 | 0 | 90 | 420 | 1E+30 |
| $D$2 | Var x1,17 | 0 | 0 | 465 | 1110 | 290 |
| $E$2 | Var x1,18 | 0 | 0 | 410 | 290 | 420 |
| $F$2 | Var x2,15 | 0 | 600 | 1170 | 1E+30 | 600 |
| $G$2 | Var x2,16 | 0 | 1230 | 1170 | 1E+30 | 1230 |
| $H$2 | Var x2,17 | 1 | 0 | 315 | 290 | 1E+30 |
| $I$2 | Var x2,18 | 0 | 290 | 550 | 1E+30 | 290 |
| $J$2 | Var x3,15 | 1 | 0 | 255 | 290 | 1E+30 |
| $K$2 | Var x3,16 | 0 | 1440 | 1065 | 1E+30 | 1440 |
| $L$2 | Var x3,17 | 0 | 1110 | 1110 | 1E+30 | 1110 |
| $M$2 | Var x3,18 | 0 | 290 | 235 | 1E+30 | 290 |
| $N$2 | Var x4,15 | 0 | 0 | 400 | 510 | 290 |
| $O$2 | Var x4,16 | 0 | 420 | 190 | 1E+30 | 420 |
| $P$2 | Var x4,17 | 0 | 1110 | 1255 | 1E+30 | 1110 |
| $Q$2 | Var x4,18 | 1 | 0 | 90 | 290 | 510 |

Constraints

| Cell | Name | Final Value | Shadow Price | Constraint R.H. Side | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$5 | R1 | 1 | 90 | 1 | 0 | 1 |
| $R$6 | R2 | 1 | -59,99999999 | 1 | 0 | 1 |
| $R$7 | R3 | 1 | -375 | 1 | 0 | 1 |
| $R$8 | R4 | 1 | -230 | 1 | 0 | 1 |
| $R$9 | R5 | 1 | 630 | 1 | 1 | 0 |
| $R$10 | R6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1E+30 |
| $R$11 | R7 | 1 | 375 | 1 | 1 | 0 |
| $R$12 | R8 | 1 | 320 | 1 | 1 | 0 |