

# Planeamento de projectos

## 1. Introdução

Por definição, um **Projecto** é um conjunto finito de actividades ou tarefas inter-relacionadas cuja realização é necessária para atingir um ou mais objectivos organizacionais. Para além disso, designam-se por **Actividades** os mais pequenos constituintes do projecto que são merecedores de planeamento e controle. Em geral, correspondem a tarefas ou operações que consomem tempo e/ou recursos. O tempo necessário à realização de uma actividade designa-se por **duração da actividade**.

No planeamento dum projecto, os tipos de análise mais comuns são:

- **Análise Temporal**

Permite responder a questões, tais como: qual a duração mínima do projecto?, qual a probabilidade do projecto estar concluído num determinado prazo?, quando pode ter início cada actividade?, quanto pode ser atrasada uma actividade sem atrasar o prazo de conclusão do projecto?;

- **Análise económica**

Permite responder a questões tais como: qual a distribuição óptima do capital?, que actividades deverão ter a sua execução acelerada minimizando o aumento dos custos globais?;

- **Análise de Afectação de Recursos**

Permite planear a utilização dos recursos e como deve ser nivelado o uso/consumo dos recursos ao longo do tempo.

## 2. Representação gráfica de um projecto

A representação gráfica de um projecto pode ser efectuada por meio de uma rede ou de um diagrama de Gantt.

Um **Diagrama de Gantt** é um gráfico de barras. No eixo das abcissas são representadas as unidades temporais e no eixo das ordenadas as actividades. Cada actividade é representada por meio de uma barra horizontal.

As redes podem ser de dois tipos:

1. **ANA** (Actividades Nos Arcos), em que cada actividade é representada por um arco;
2. **ANN** (Actividades Nos Nodos), em que cada actividade é representada por um nodo.

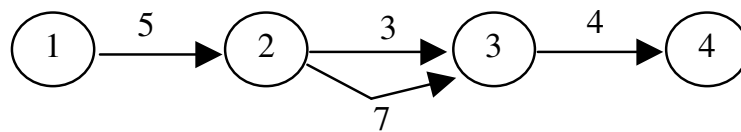
### 2.1 Desenho de redes ANA

O desenho de uma rede **ANA** deve ser elaborado tendo em conta os seguintes requisitos:

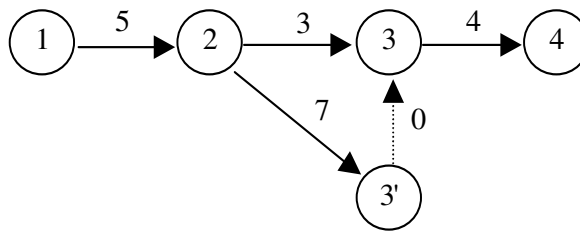
1. Existe um nodo inicial que corresponde ao início de todas as actividades que não têm precedentes e um nodo final que representa a realização de todas as actividades que não têm sucessores;
2. Cada actividade é representada através de um **arco orientado** que liga dois

nodos, a que chamamos acontecimentos; sendo assim, um acontecimento representa o início e/ou o fim de uma ou mais actividades;

3. Vários arcos podem convergir para um mesmo acontecimento, significando o fim das actividades associadas a esses arcos. Pela sua natureza, os acontecimentos não consomem tempo nem recursos;
4. Os arcos que divergem de um determinado nodo correspondem a actividades que dependem das actividades que terminam nesse nodo;
5. A orientação dos arcos é utilizada para representar a sequência das actividades a realizar, uma vez que para cada actividade existe um conjunto de actividades que a precedem;
6. Entre dois acontecimentos consecutivos só pode existir uma única actividade e, por isso, não é admissível a seguinte situação:



Este problema é ultrapassado introduzindo uma **actividade fictícia**, com uma duração nula, resultante do desdobramento de um nodo em dois ou mais:



O desenho de uma rede ANA só fica terminado após se terem numerado todos os nodos. A numeração dos nodos deve ser realizada da seguinte forma:

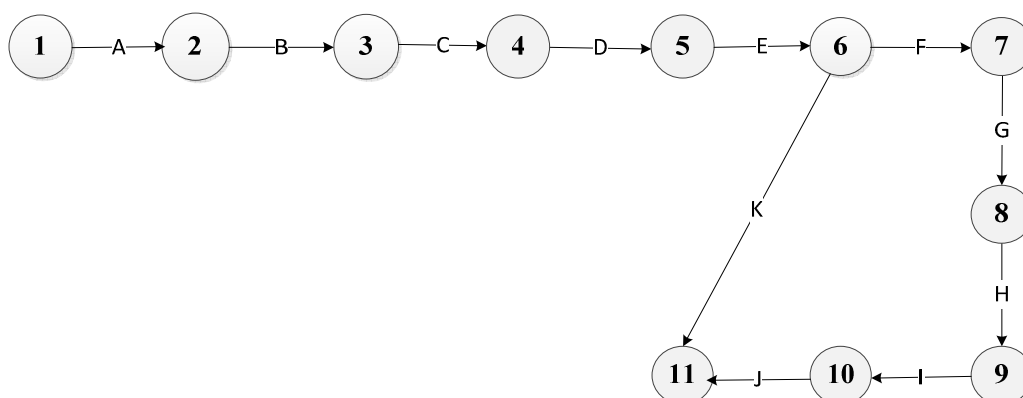
- P1: Ao nodo inicial é atribuído o valor 1;
- P2: Fazer  $k=2$ ;
- P3: Seleccionar um nodo ainda não numerado para o qual todas as actividades que nele convergem tenham o nodo em que se iniciam já numerado. Se houver mais do que um, escolher um deles. Numerar este nodo com o valor  $k$ ;
- P4: Fazer  $k=k+1$ ;
- P5: Repetir P3 e P4 até se atingir o nodo final.

### Exemplo 1:

Considere a seguinte lista de actividades, bem como das suas durações e precedências, representativas de um projecto e elabore a respectiva rede ANA.

Actividade	Duração	Predecessores
A. Remoção do Entulho	3	----
B. Escavações	4	A
C. Fundações e Estrutura	8	B
D. Construção da Laje Térrea	4	C
E. Construção de Paredes	5	D
F. Instalar traves para o telhado	3	E
G. Construir telhado	7	F
H. Alisar paredes	4	G
I. Aplicação do Pavimento	6	H
J. Acabamentos interiores	4	I
K. Acabamentos exteriores	9	E

A rede ANA relativa a este projecto é a seguinte:



## 2.2 Desenho de redes ANN

Na elaboração de uma rede ANN deve ter-se em conta que:

1. Cada actividade é representada por um nodo e os arcos são utilizados para traduzir as relações de precedência: existirá um arco do nodo i (actividade i) para o nodo j (actividade j) se a actividade j só puder ser iniciada após a actividade i ter terminado (a actividade i precede a actividade j);
2. Todos os arcos são **orientados**, indicando assim a direcção em que o projecto está a evoluir;
3. As actividades que não estão ligadas por relações de precedência podem ser realizadas em simultâneo;
4. Existe um único nodo inicial que corresponde ao início do projecto e um único nodo final que representa o fim do projecto, assim:
  - a. se existe mais do que uma actividade sem predecessores então adicionamos um nodo extra à rede. Este nodo é designado por início do projecto e a sua duração é nula;
  - b. se existe mais do que uma actividade sem sucessores então adicionamos um nodo extra à rede. Este nodo é designado por fim do projecto e a sua duração é nula.

**Nota:** O posicionamento dos nodos (actividades) deve ser estruturado de modo que as actividades subjacentes ao início do projecto estejam localizadas à esquerda, as actividades relativas ao fim do projecto estejam à direita e o projecto evolua da esquerda para a direita de forma natural.

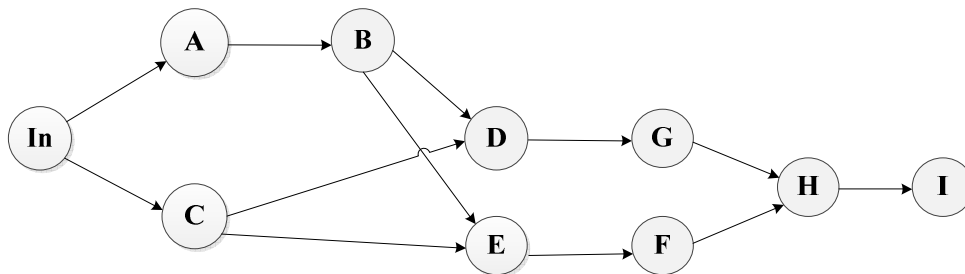
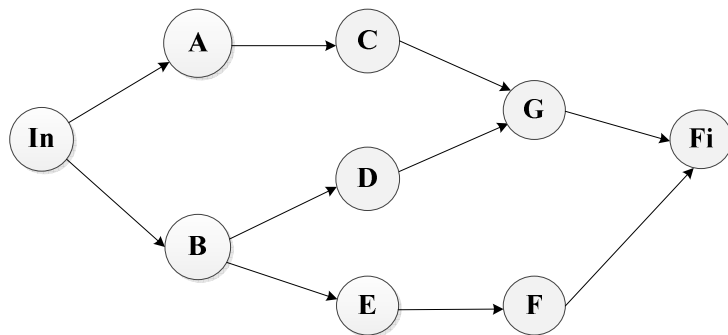
### Exemplo 2:

Considere as duas tabelas seguintes contendo a lista de actividades, referentes a dois projectos, bem como dos seus predecessores. Represente cada projecto por meio de uma rede ANN.

Actividade	Predecessores
A	----
B	----
C	A
D	B
E	B
F	E
G	C,D

Actividade	Predecessores
A	----
B	A
C	----
D	B,C
E	B,C
F	E
G	D
H	F,G
I	H

As redes ANN representativas destes projectos são, respectivamente, as seguintes:



Note que **In** e **Fi** representam, respectivamente, o início e o fim do projecto.

### 3. Análise temporal

Como já foi previamente referido, a análise temporal tem por objectivo dar respostas a questões relacionadas com a duração do projecto e/ou com o agendamento de actividades. Sendo assim, é uma análise que assenta na duração das actividades. Agendar actividades e planear um projecto depende sempre das estimativas das durações das actividades.

A obtenção de estimativas realistas acerca do tempo requerido para executar uma determinada actividade (duração da actividade) é um pré-requisito para o sucesso da gestão e planeamento de um projecto. Note-se contudo que estas estimativas estão sempre sujeitas a erro, visto serem baseadas em conhecimentos prévios e, por isso, falíveis.

Num projecto, a duração de uma actividade pode ser:

1. Determinística: a duração da actividade é o tempo médio que a actividade deve demorar na sua execução;
2. Estocástica: a duração da actividade é modelada por meio de uma variável aleatória.

No caso das durações das actividades serem determinísticas, a análise temporal faz-se por aplicação do Critical Path Method (CPM). Se, pelo contrário, as durações das actividades forem estocásticas, o método a aplicar será o Program Evaluation Review Technique (PERT).

#### 3.1. CPM – Critical Path Method

Consideremos um projecto representado através de uma rede ANN com  $n$  actividades e seja  $d_i$  a duração da actividade  $i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Para cada actividade  $i$ , seja **suc(i)** o conjunto de actividades que são sucessoras de  $i$  e **pred(i)** o conjunto de actividades que são predecessoras de  $i$ . Considere-se ainda que **In** representa o nodo inicial do projecto, e **Fi** o nodo final do projecto. Note-se que, quer o nodo In quer o nodo Fi podem representar uma actividade do projecto ou uma actividade fictícia que tenha sido criada de forma a garantir que na representação gráfica do projecto, através dum rede ANN, irá existir um único nodo inicial e/ou um único nodo final.

Para cada actividade  $i$  é possível definir:

$ES_i$  – data de início mais cedo da actividade  $i$

$LS_i$  – data de início mais tarde da actividade  $i$

$EF_i$  – data de fim mais cedo da actividade  $i$

$LF_i$  – data de fim mais tarde da actividade  $i$

Como calcular  $ES_i$  e  $EF_i$ ?

1. Para cada actividade  $i$ , sem predecessores, ou seja, para o nodo In define-se:

$$\Rightarrow ES_{In} = K, \text{ em que } K \text{ representa qualquer número não negativo}$$

$$\Rightarrow EF_{In} = ES_{In} + d_{In}$$

2. Para cada actividade  $i$  com um ou mais predecessores  $j$  define-se

$$\Rightarrow ES_i = \max_{j \in \text{pred}(i)} EF_j$$

$$\Rightarrow EF_i = ES_i + d_i$$

Uma vez determinadas as datas mais cedo de início e fim de cada actividade, a duração mínima do projecto (dmp) é dada por:

$$\text{dmp} = \text{EF}_{\text{Fi}} - \text{ES}_{\text{In}}$$

Uma vez calculadas as datas mais cedo, procede-se ao cálculo das datas mais tarde.

Como calcular  $\text{LS}_i$  e  $\text{LF}_i$ ?

1. Para cada actividade  $i$  sem sucessores, ou seja, para o nodo  $\text{Fi}$  define-se

$$\Rightarrow \text{LF}_{\text{Fi}} = \text{EF}_{\text{Fi}} + K_1, \text{ em que } K_1 \text{ representa um número não negativo}$$

$$\Rightarrow \text{LS}_{\text{Fi}} = \text{LF}_{\text{Fi}} - d_{\text{Fi}}$$

**Nota:** Em geral, assume-se que  $\text{LF}_{\text{Fi}} = \text{EF}_{\text{Fi}}$ , ou seja, que  $K_1=0$ . À constante  $K_1$  será atribuído um valor não nulo nos casos em que existe um prazo de conclusão do projecto e, conseqüentemente,  $\text{LF}_{\text{Fi}}$  irá representar esse prazo de conclusão do projecto.

2. Para cada actividade  $i$  com um ou mais sucessores  $j$  define-se

$$\Rightarrow \text{LF}_i = \min_{j \in \text{suc}(i)} \text{LS}_j$$

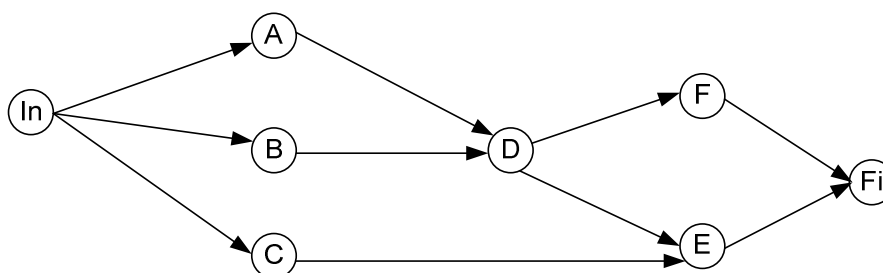
$$\Rightarrow \text{LS}_i = \text{LF}_i - d_i$$

### Exemplo 3:

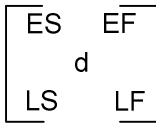
Consideremos um projecto constituído por 6 actividades com duração determinística, tal como se apresenta na tabela que se segue:

Actividade	Duração (dias)	Predecessores
A	14	----
B	9	----
C	20	----
D	12	A,B
E	6	C,D
F	9	D

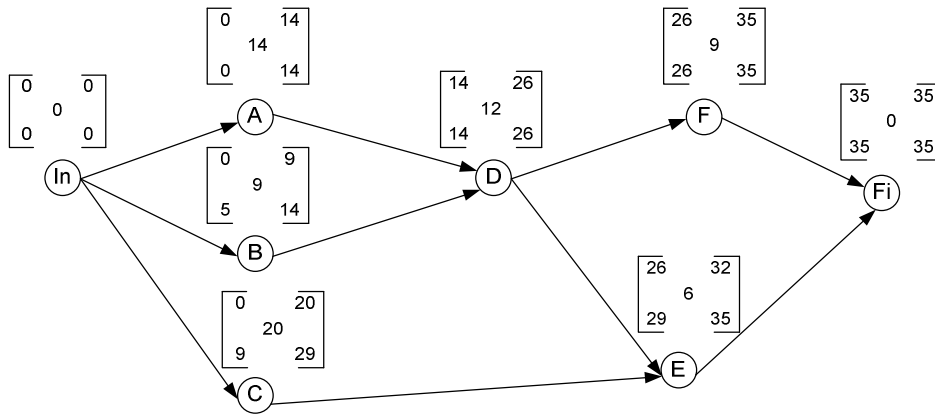
A rede ANN representativa do projecto é a seguinte:



Aplicando o método CPM, usando a legenda



obtem-se:



Por aplicação do CPM, conclui-se que a  $dmp = LF_{Fi} - ES_{In} = 35 - 0 = 35$  dias.

Uma vez determinadas as datas mais cedo e mais tarde de início e fim de cada actividade, é possível prosseguir com a análise temporal a partir do cálculo de diferentes tipos de folgas das actividades.

### 3.1.1. Determinação de Folgas, Actividades Críticas e Caminhos Críticos

Para cada actividade constituinte do projecto, é possível considerar diferentes tipos de **folga**:

**1. Folga Total (FT)** de uma actividade é o período máximo de tempo disponível para atrasar uma actividade de forma a não ultrapassar o prazo de conclusão do projecto. Sabendo que uma actividade dispõe de folga total não nula permite ao gestor decidir qual a melhor ocasião para dar início à execução da actividade, sem atrasar a data em que o projecto estará terminado. Pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$\Rightarrow FT_i = LF_i - (ES_i + d_i) = LF_i - EF_i;$$

**2. Folga Livre (FL)** de uma actividade é uma medida que se aplica a projectos cujas actividades estão organizadas e agendadas para se iniciarem sempre o mais cedo possível de modo a maximizar a possibilidade de o projecto terminar dentro do prazo estipulado. Deste modo, a folga livre baseia-se nas datas mais cedo de início de cada actividade e mede qual o atraso que uma actividade pode sofrer assumindo que tanto a actividade como as suas sucessoras irão ter inicio o mais cedo possível. Pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$\Rightarrow FL_i = \min_{j \in \text{suc}(i)} ES_j - (ES_i + d_i) = \min_{j \in \text{suc}(i)} ES_j - EF_i;$$

**3. Folga Independente (FI)** de uma actividade é um tipo de folga que se revela importante quando o projecto está organizado de modo a que o agendamento do início das actividades que o constituem seja feito o mais cedo possível. Permite determinar quanto pode uma actividade *i* atrasar-se se alguma das actividades que precedem a actividade *i* tiverem terminado o mais tarde e se se pretender que as actividades que sucedem *i* tenham início o mais cedo possível. Pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$\Rightarrow FI_i = \max \{ 0, \min_{j \in \text{suc}(i)} ES_j - \max_{k \in \text{pred}(i)} LF_k - d_i \};$$

**4. Folga de Segurança (FS)** de uma actividade permite dar resposta à seguinte questão: se alguma das actividades que precedem a actividade tiver terminado o mais tarde possível, qual o atraso máximo que a actividade pode sofrer sem comprometer o prazo de conclusão do projecto? A sua forma de cálculo é:

$$\Rightarrow FS_i = (LF_i - d_i) - \max_{k \in \text{pred}(i)} LF_k = LS_i - \max_{k \in \text{pred}(i)} LF_k$$

No que à aplicação do CPM diz respeito, apenas a folga total é tomada em consideração. Sendo assim, uma vez determinadas as folgas totais das actividades, procede-se à identificação das actividades críticas.

Uma **actividade *i*** diz-se **crítica** se a sua folga total for igual à folga do nodo final, ou seja, igual a  $LF_{F_i} - EF_{F_i}$ . Sendo assim,

a actividade *i* é uma actividade crítica se  $FT_i = LF_{F_i} - EF_{F_i}$

As actividades críticas definem sobre a rede um ou mais caminhos entre o nodo inicial e o nodo final. Estes caminhos são designados por **caminhos críticos**. Os nodos de um caminho crítico representam as actividades que têm que ser realizadas sem atraso, pois, caso contrário, a conclusão do projecto sofrerá atraso.

A duração de um caminho crítico corresponde à soma dos pesos associados aos nodos (duração das actividades) que o constituem. Essa duração traduz a duração mínima do projecto.

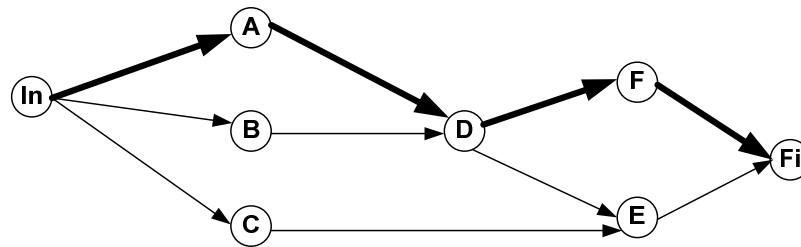
**Nota:** O caminho crítico é o mais longo caminho entre os nodos inicial e final da rede representativa do projecto.

**Exemplo 4:** Considere novamente o projecto do Exemplo 3, constituído por seis actividades, para o qual já são conhecidas as datas mais cedo e mais tarde relativas a cada actividade.

As folgas totais das actividades são apresentadas na seguinte tabela:

Actividade <i>i</i>	A	B	C	D	E	F
<b>FT<sub>i</sub></b>	14-14=0	14-9=5	29-20=9	26-26=0	35-32=3	35-35=0

Atendendo que  $LF_{Fi} - EF_{Fi} = 0$ , as actividades A, D e F são críticas e definem um caminho crítico (assinalado na rede a negrito):



### 3.2 PERT – Program Evaluation Review Technique

Neste caso, os tempos de duração das actividades não são determinísticos, ou seja, são variáveis aleatórias. Para que se possa proceder à aplicação do PERT é necessário que se conheça, para cada actividade, três estimativas acerca da sua duração, a saber:

1. **Duração optimista ( $a$ )** - é a duração da actividade supondo que ela será realizada nas melhores condições possíveis
2. **Duração pessimista ( $b$ )** - é a duração da actividade supondo que ela será realizada nas piores condições possíveis
3. **Duração mais provável ( $m$ )** - é a duração da actividade supondo que ela será realizada em condições médias

Prova-se que o tempo de duração de cada actividade é uma variável aleatória, cuja distribuição pode ser bem aproximada a uma distribuição Beta,  $B(\mu, \sigma)$ , em que:

$$\Rightarrow \mu = \text{duração média da actividade} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \text{variância da duração da actividade} = \frac{(b - a)^2}{36}$$

Uma vez determinadas as durações médias de cada actividade, procede-se ao cálculo das datas mais cedo e mais tarde de cada actividade, bem com das folgas, de forma idêntica à que se fez com o CPM. De facto, a única diferença reside em se considerarem, no caso do PERT, as durações médias.

Note-se que, neste caso, a duração do projecto é também uma variável aleatória. Além disso, assumindo que os tempos de duração das actividades são variáveis aleatórias independentes e ainda que a duração do caminho crítico (baseado nas durações médias) é sempre superior à duração de qualquer outro caminho, então a duração do projecto será igual à soma das durações das actividades do caminho crítico.

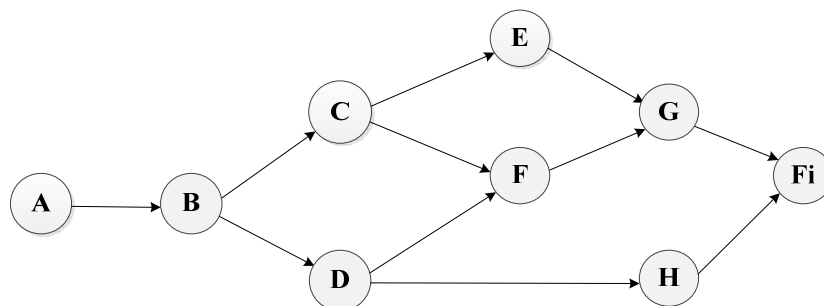
Para além disso, a média da duração do projecto é igual à soma das durações médias das actividades do caminho crítico, e a variância do projecto é também igual à soma das variâncias das actividades que constituem o caminho crítico. Caso exista mais do que um caminho crítico, considera-se o caminho com maior variância associada. Finalmente, pode assumir-se (Teorema do Limite Central) que a duração do projecto segue, pelo menos de forma aproximada, uma distribuição Normal.

Concluindo, a duração do projecto é uma variável aleatória com distribuição aproximada à normal cujos parâmetros podem ser determinadas (ver parágrafo anterior), pelo que se pode proceder ao cálculo de probabilidades associadas à duração do projecto.

**Exemplo 5:** Considere a informação que consta na tabela que se segue, referente a um projecto em que a duração das actividades, dada em dias, é estocástica.

Estimativas				
Actividades	Precedências	optimista	mais provável	pessimista
A	--	4	5	6
B	A	2	6	10
C	B	3	4	11
D	B	2	4	6
E	C	4	5	12
F	C,D	5	6	7
G	E,F	5	6	7
H	D	3	4	5

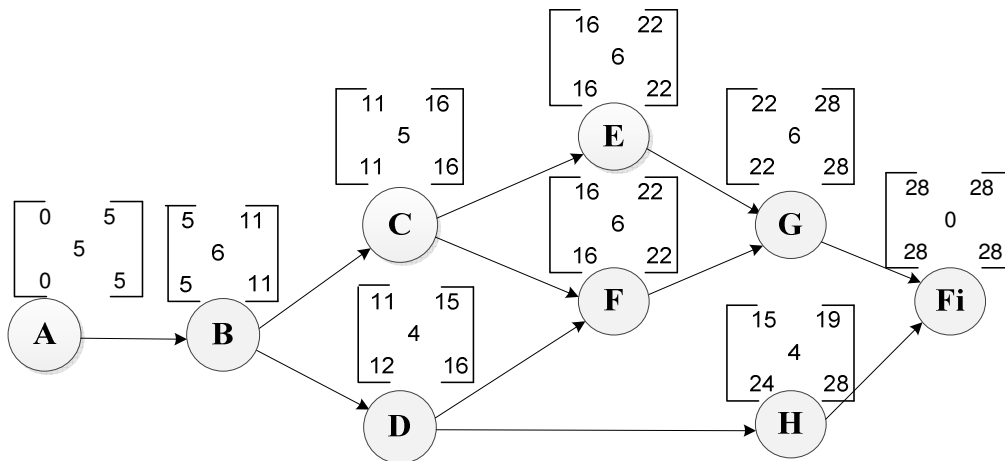
A rede ANN representativa deste projecto, em que **Fi** representa o fim do projecto, é a seguinte:



Na primeira etapa do método PERT determinam-se as durações médias das actividades:

Actividade i	A	B	C	D	E	F	G	H
Duração média	$\frac{4+4 \times 5+6}{6} = 5$	6	5	4	6	6	6	4

Posteriormente, calculam-se, tal como no método CPM, os instantes mais cedo e mais tarde de cada actividade:



Neste momento é possível:

- i. Determinar a duração média do projecto:  $EF_{Fi} - ES_A = 28 - 0 = 28$ ;
- ii. Determinar as folgas totais das actividades e, posteriormente, identificar as actividades críticas, bem como, os caminhos críticos:
- iii.

▪ **Folgas totais**

Actividade i	A	B	C	D	E	F	G	H
$FT_i$	0	0	0	1	0	0	0	9

- **Actividades críticas:** A, B, C, E, F e G.
- **Caminhos críticos:**  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow Fi$  e  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow Fi$

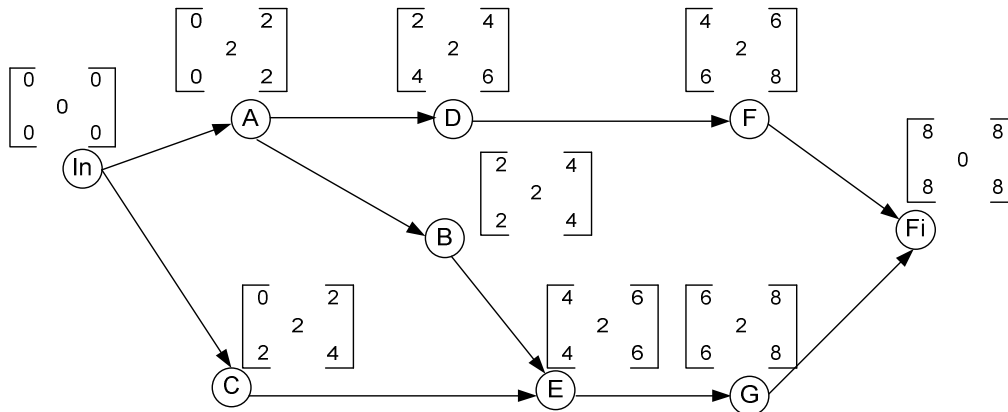
### 3.3 Sensibilidade da duração mínima do projecto à duração das actividades

#### Caso 1 - Redução da duração de uma actividade

Será que a redução da duração de qualquer actividade implica sempre a redução da duração mínima do projecto (dmp)?

#### Caso 1.a - Redução da duração de uma actividade não crítica

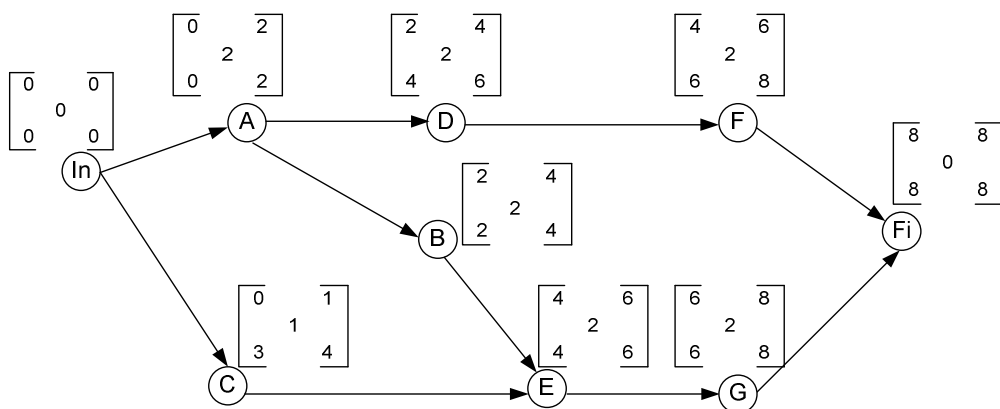
**Exemplo 6:** Consideremos a seguinte rede ANN representativa de um projecto, cujas durações das actividades são dadas em dias:



Neste exemplo, as actividades críticas são In, A, B, E, G, Fi, e a dmp é 8 dias.

Suponhamos, agora, que a duração da actividade C é reduzida em 1 dia. Dado que a actividade C não é crítica, a redução da sua duração não altera a duração mínima do projecto. Esta conclusão é facilmente perceptível se relembrarmos que a dmp é igual à duração do caminho mais longo entre os nodos inicial e final. Sendo assim, ao reduzirmos a duração de uma actividade que não faz parte do caminho crítico, não alteramos a duração do caminho mais longo e, conseqüentemente, a duração do caminho crítico. Assim, as actividades críticas bem como o caminho crítico também se irão manter.

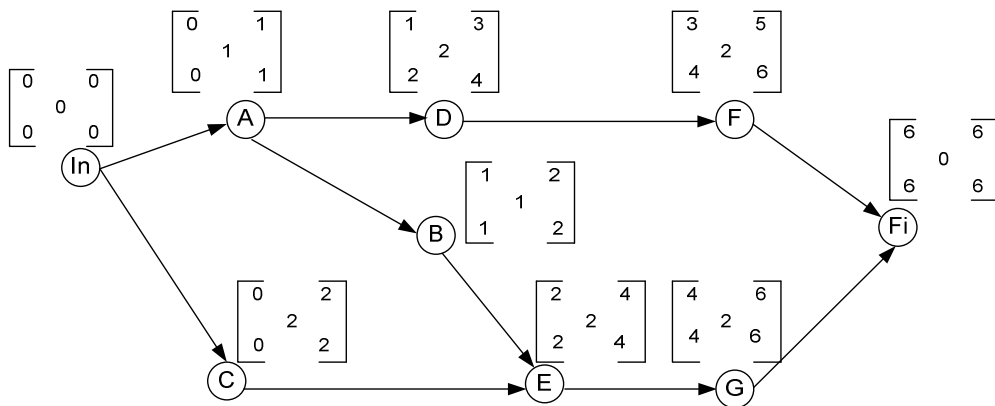
A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando agora a que a duração de C é apenas 1 dia, obtém-se



Como seria esperado, as actividades críticas são as mesmas (In, A, B, E, G, Fi) e a dmp continua a ser 8 dias.

**Caso 1.b - Redução da duração de uma actividade crítica que não pertence a todos os caminhos críticos**

**Exemplo 7:** Consideremos a seguinte rede ANN representativa de um projecto:



Neste caso, as actividades críticas são In,A,B,C,E,G,e Fi, existem 2 caminhos críticos e a dmp é 6 dias.

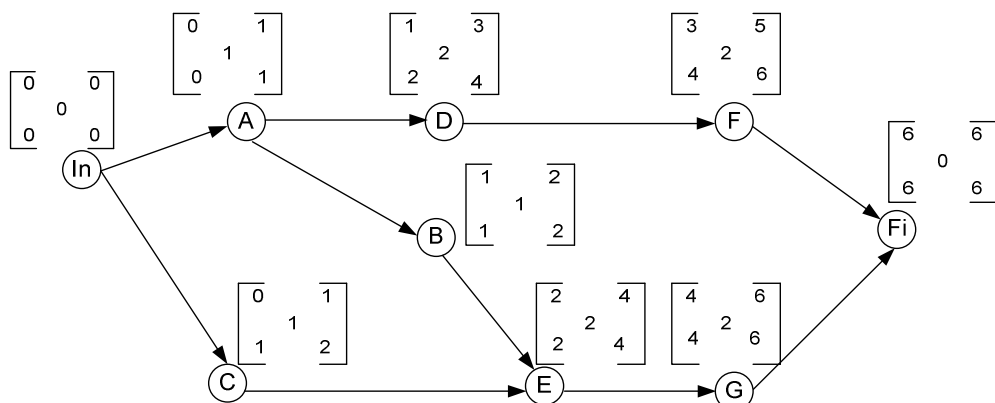
Suponhamos, agora, que a duração da actividade C é reduzida em 1 dia. Ao reduzirmos a duração em C em 1 dia iremos reduzir a duração de todos os caminhos que contêm C, nomeadamente a duração do caminho In-C-E-G-Fi, que era um dos críticos, em 1 dia.

Contudo, dado que existiam dois caminhos críticos e apenas um deles contem C, continuará a existir um caminho com duração de 6, ou seja, a duração do caminho crítico irá manter-se.

E será que o caminho crítico ou as actividades críticas se alteram?

Como foi referido, um dos anteriores caminhos críticos (In-C-E-G-Fi) deixará de ser crítico, após a redução da actividade C em 1 dia e, conseqüentemente, os caminhos críticos bem como as actividades críticas alteram-se.

A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando agora que a duração de C é apenas 1 dia, obtém-se



Após a redução da duração da actividade C, as actividades críticas são In, A, B, E, G, Fi, passa a existir 1 caminho crítico e a dmp mantem-se nos 6 dias.

**Caso 1.c - Redução da duração de uma actividade crítica que pertence a todos os caminhos críticos**

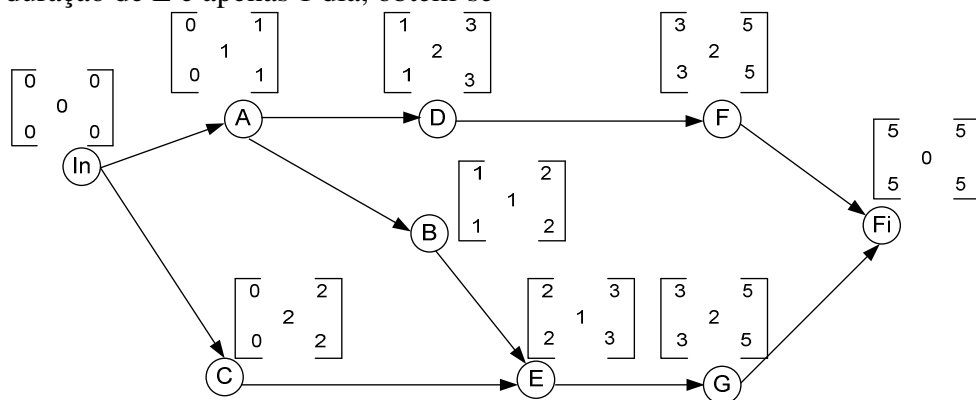
Consideremos o Exemplo 7, e suponhamos que a duração da actividade E é reduzida em 1 dia.

Neste caso, a actividade E é uma actividade crítica que pertence a ambos os caminhos críticos. Sendo assim, a redução da sua duração irá provocar uma redução na duração de todos os caminhos críticos, pelo que a duração mínima do projecto irá sempre ser reduzida.

Mas em quantas unidades irá a duração do projecto ser reduzida? Neste exemplo, dado que a actividade é reduzida em apenas 1 dia (e assumindo que as durações são valores inteiros), então a duração mínima do projecto irá também ser reduzida em 1 dia, ou seja, passará a ser 5. Note-se contudo que nem sempre ao valor na redução na duração do projecto irá ser igual ao valor na redução da duração da actividade (ver nota).

E será que as actividades críticas e o(s) caminho(s) se irão manter? A resposta a esta questão exige uma análise detalhada da rede, nomeadamente ao valor dos caminhos que não contenham a actividade E. Neste exemplo, o único caminho que não contém E (In-A-D-F-Fi) tem uma duração de 5, que coincide com o novo valor do caminho crítico. Sendo assim, passará a existir mais um caminho crítico e as actividades que estejam nesse caminho passarão também a ser críticas.

A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando agora a que a duração de E é apenas 1 dia, obtém-se



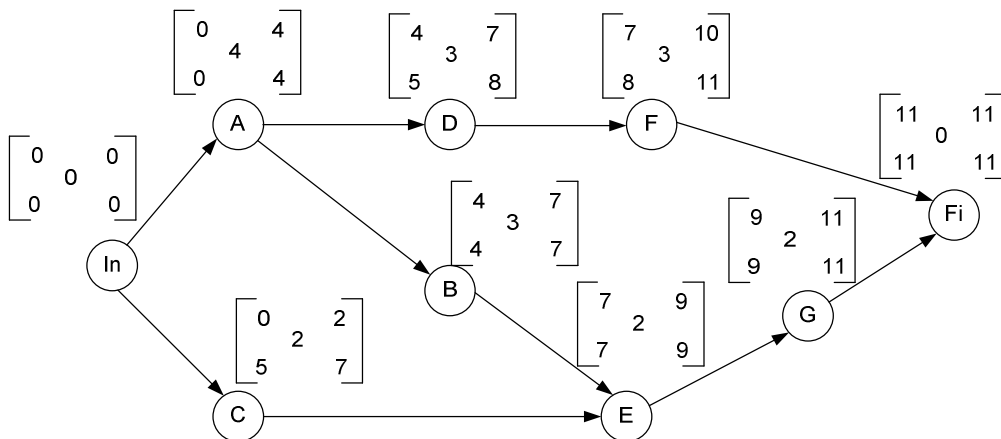
Após a redução da actividade E, as actividades críticas são In, A,B,C,D,E,F,G,e Fi, existem 3 caminhos críticos e a dmp é 5 dias.

### Conclusões:

1. A redução da duração de uma actividade crítica conduz a uma redução na dmp se existir apenas um caminho crítico ou se essa actividade crítica pertencer a todos os caminhos críticos;
2. Se, após a redução, essa actividade crítica pertencer a todos os caminhos críticos então o conjunto de actividades críticas e o conjunto de caminhos críticos podem ser alterados porque podem surgir novos caminhos críticos (os caminhos que têm duração igual à nova dmp).

**Nota** - Suponhamos que existe uma actividade crítica que ao ser reduzida na sua duração irá implicar uma redução na duração mínima do projecto. Se a duração da actividade for reduzida em k unidades então a duração mínima do projecto também é reduzida em k unidades de tempo?

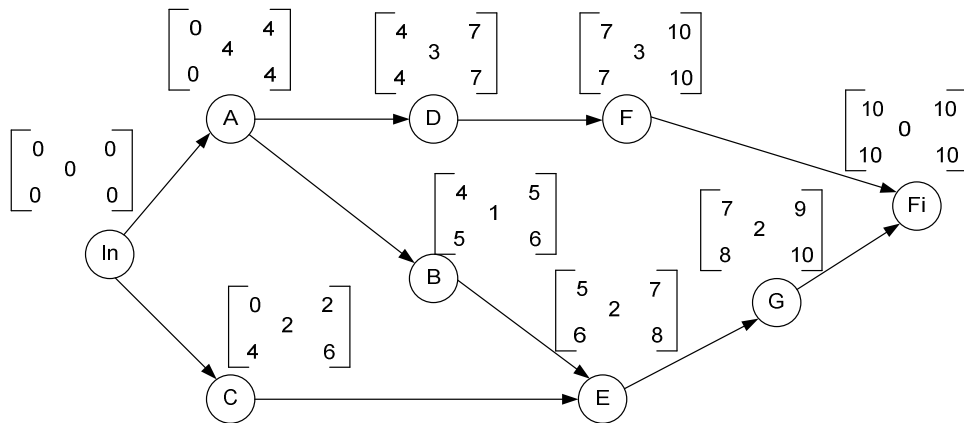
**Exemplo 8:** Consideremos o seguinte representação de um projecto:



Pode observar-se que as actividades críticas são In, A, B, E, G, Fi, existe 1 caminho crítico e a dmp é 11 dias.

Admitamos, agora, que a duração da actividade B é reduzida em 2 dias. A actividade B pertence ao único caminho existente e, como tal, a redução na sua duração irá provocar, necessariamente, uma redução na duração do projecto. Contudo, analisando a rede verificamos que dos caminhos que não contêm B, o mais longo tem uma duração de 10 dias (In-A-D-F-Fi). Sendo assim, ao reduzirmos B em 2 dias, a duração do anterior caminho crítico passará a ser 9, ou seja, deixará de ser o caminho mais longo. Concluindo, embora a actividade B seja reduzida em 2 dias, a duração do projecto será reduzida apenas em 1 dia, pois passará de 11 para 10 dias. Pelo que acabamos de expor, facilmente se conclui também que as actividades críticas bem como os caminhos críticos se alteram.

A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando agora que a duração de B é apenas 1 dia, obtém-se



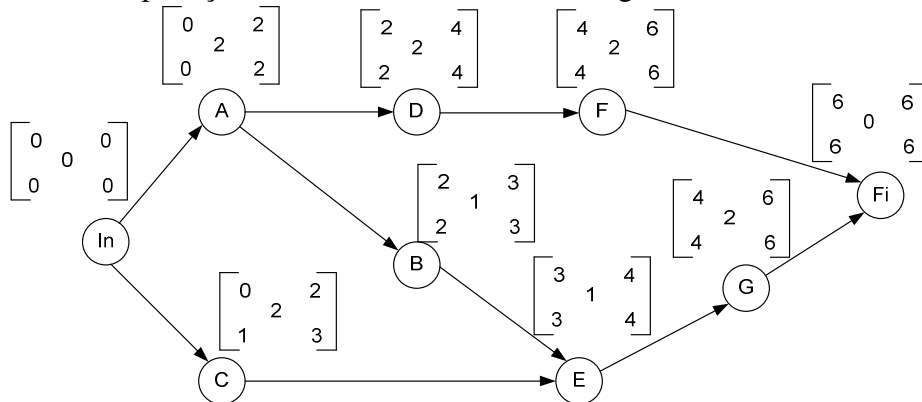
Pode observar-se que as actividades críticas são agora In, A, D, F, Fi, existe 1 caminho crítico e a dmp é 10 dias.

### Caso 2: Aumento da duração de uma actividade

A questão que se coloca agora é: será que o aumento da duração de uma actividade origina sempre aumento da dmp?

#### Caso 2.a – Aumento da duração de uma actividade crítica que pertence a todos os caminhos críticos

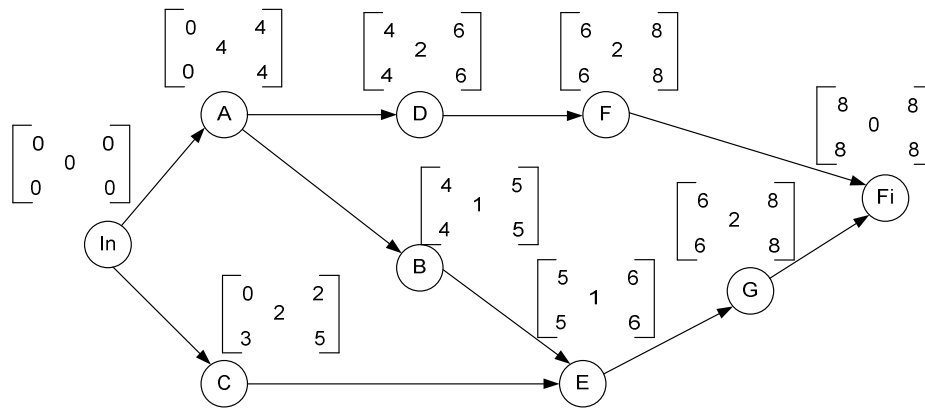
**Exemplo 9:** Por aplicação do CPM, obtiveram-se os seguintes resultados



As actividades críticas são In, A, B, D, E, F, G, Fi, existem 2 caminhos críticos e a dmp é 6 dias.

Suponhamos que a duração da actividade A sofre um aumento de dois dias. Dado que a actividade A é crítica e pertence a todos os caminhos críticos, e lembrando que qualquer caminho crítico é sempre um caminho mais longo, então o aumento na duração de A em dois dias irá provocar um aumento de 2 dias na duração de todos os caminhos críticos. Sendo assim, a dmp aumenta em dois dias. Facilmente se conclui também que quer as actividades críticas quer os caminhos críticos se irão manter.

A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando agora que a duração A é agora de 4 dias, obtém-se



As actividades críticas são In, A, B, D, E, F, G, Fi, existem 2 caminhos críticos e a dmp é 8 dias.

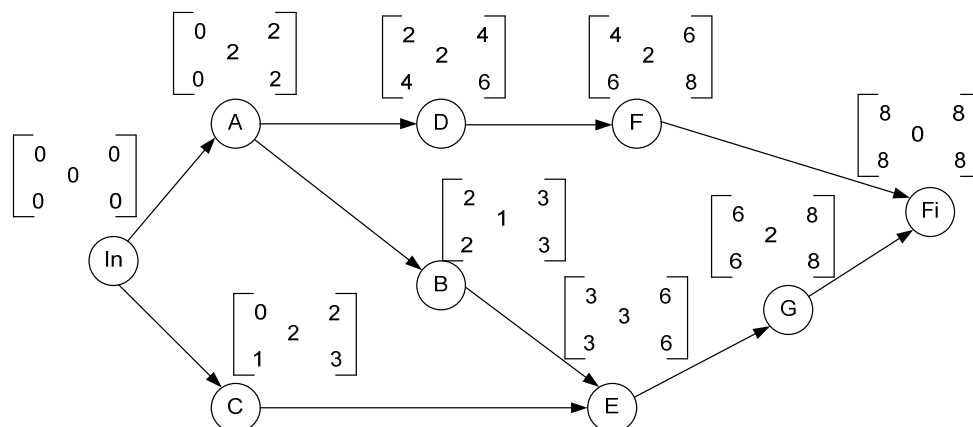
**Conclusão:** Se a actividade crítica, que sofre aumento na sua duração, pertence a todos os caminhos críticos, então a dmp aumenta em tantas unidades quanto o aumento da duração da actividade. As actividades críticas e os caminhos críticos não se alteram.

**Caso 2.b – Aumento da duração de uma actividade crítica que não pertence a todos os caminhos críticos**

Consideremos novamente o Exemplo 9 e suponhamos que a duração da actividade E sofre um aumento de dois dias.

Neste caso, dado que a actividade E é uma actividade crítica mas que não pertence a todos os caminhos críticos então apenas os caminhos que contêm E irão ter a sua duração aumentada. Ou seja, apenas a duração do caminho In-A-B-E-G-Fi irá aumentar para 10 dias. Sendo assim, facilmente se conclui que a dmp aumenta em tantas unidades quanto o aumento na duração de E, mas que as actividades críticas bem como os caminhos críticos se alteram.

A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando que a duração de E é de 3 dias, obtém-se



Após o aumento na duração de E, as actividades críticas são In, A, B, E, G, Fi, existe 1

caminho crítico e a dmp é 8 dias.

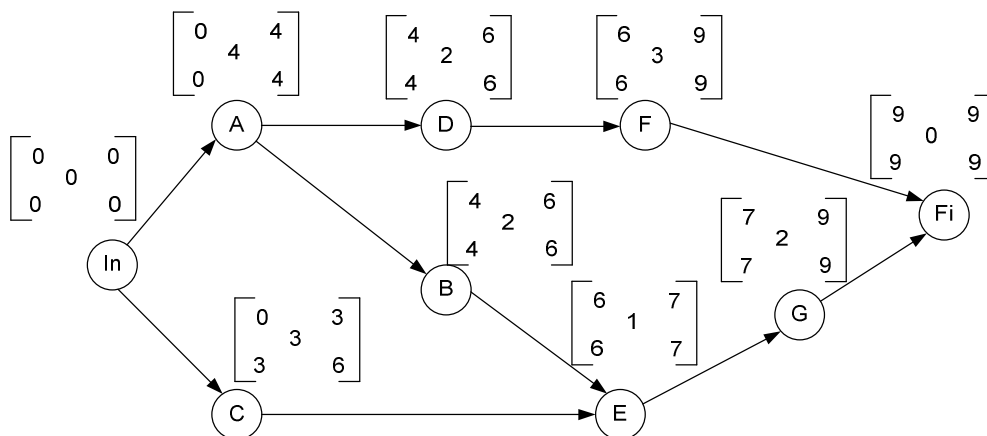
**Conclusão:** Se a actividade crítica, que sofre aumento na sua duração, pertence apenas a alguns dos caminhos críticos, então a dmp aumenta em tantas unidades quanto o aumento da duração da actividade. As actividades críticas e os caminhos críticos alteram-se – apenas os caminhos críticos que contêm essa actividade crítica irão manter-se críticos.

**Caso 2.c – Aumento da duração de uma actividade i não crítica**

Comecemos por relembrar que as actividades não críticas são aquelas cuja folga total é superior à folga total do nodo final do projecto. Para além disso, como já foi referido anteriormente, a folga total designa o atraso que uma actividade pode sofrer sem que o prazo de conclusão do projecto se altere. Sendo assim, para avaliar o impacto do aumento da duração de uma actividade não crítica na dmp, nas actividades críticas e no caminho crítico, será sempre necessário comparar o valor do aumento na duração com a diferença entre folga total da actividade e a folga total do nodo final (*i.e*  $FT_i - FT_{Fi}$ ).

**Caso 2.c.1. – Aumento inferior à diferença  $FT_i - FT_{Fi}$**

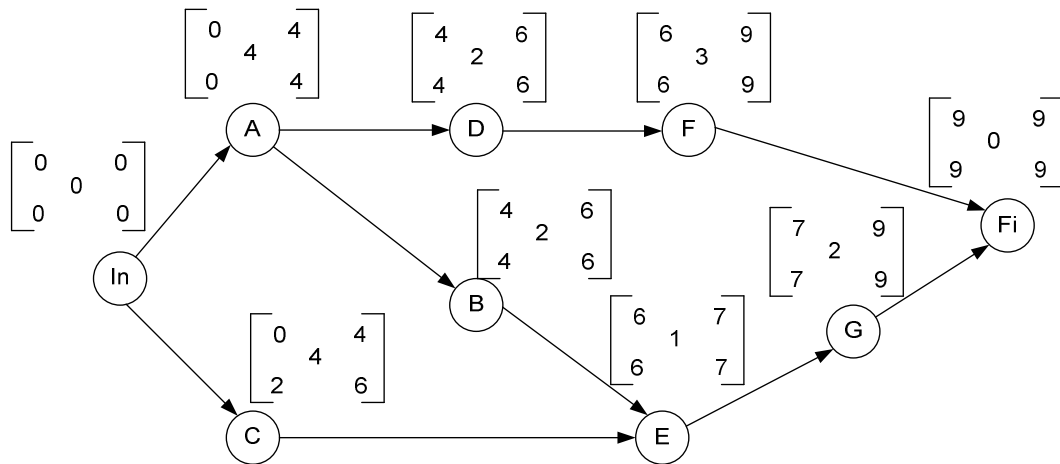
**Exemplo 10:** Consideremos o seguinte exemplo



As actividades críticas são In, A, B, D, E, F, G, Fi, existem 2 caminhos críticos e a dmp é 9 dias.

Suponhamos que a duração da actividade C sofre um aumento de 1 dia. Dado que  $FT_C - FT_{Fi} = 3 - 0 = 3$  dias, significando que a actividade C se pode atrasar 3 dias sem que tal ponha em causa a dmp, e o aumento é apenas de 1 dia, então a dmp bem como actividades críticas e o(s) caminho(s) críticos irão manter-se.

A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando que a duração de C é agora de 4 dias, obtém-se



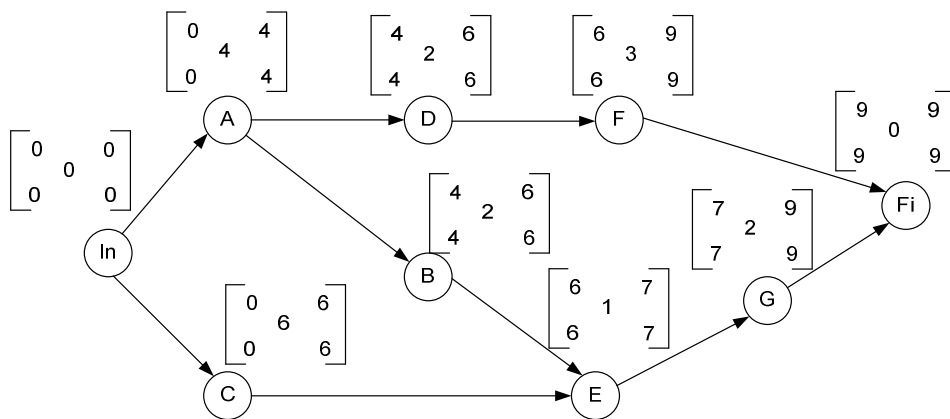
Após o aumento na duração de C, as actividades críticas In, A, B, D, E, F, G, Fi, existem 2 caminhos críticos e a dmp é 9 dias.

**Conclusão:** Se a actividade i que sofre aumento na sua duração não é crítica e o aumento da sua duração é inferior a  $FT_i - FT_{Fi}$ , então a dmp não se altera. As actividades críticas e os caminhos críticos mantêm-se.

**Caso 2.c.2. – Aumento igual à diferença  $FT_i - FT_{Fi}$**

Consideremos novamente o Exemplo 10. Suponhamos que a duração da actividade C sofre um aumento de 3 dias, ou seja, a sua duração passará a ser 6 dias. Dado que a folga total inicial da actividade C é de 3 dias, e que o aumento é também de 3 dias, então a dmp não se altera. Contudo, dado que ao ter a sua duração aumentada em 3 dias, a actividade fica com uma folga total igual à folga do nodo final, então a actividade C passa a ser crítica e, conseqüentemente, todos os caminhos a que C pertença irão aumentar a sua duração, podendo vir a tornar-se críticos, ou não. Neste caso, o caminho In-C-E-G-Fi passa a ser um dos caminhos críticos. Sendo assim, as actividades críticas bem como os caminhos críticos irão alterar-se.

A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando agora a que a duração C é agora de 6 dias, obtém-se



Após o aumento na duração de C, as actividades críticas são In,A,B,C,D,E,F,G, e Fi, existem 3 caminhos críticos e a dmp é 9 dias.

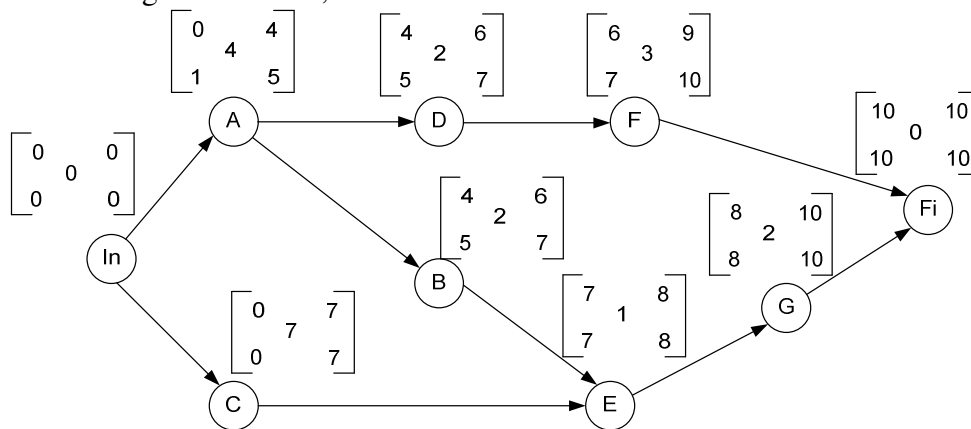
**Conclusão:** Se a actividade i que sofre aumento na sua duração não é crítica e o aumento da sua duração é igual  $FT_i-FT_{Fi}$ , então a dmp não se altera. As actividades críticas e os caminhos críticos alteram-se pois surge um novo caminho crítico.

**Caso 2.c.3. – Aumento superior à diferença  $FT_i-FT_{Fi}$**

Consideremos, mais uma vez, o Exemplo 10. Finalmente, suponhamos que a duração da actividade C sofre um aumento 4 dias, passando a ter uma duração de 7 dias.

Desta vez, o aumento na duração de C é superior a  $FT_C-FT_{Fi}=3-0=3$  dias, pelo que os caminhos a que C pertence irão aumentar em 1 dia, passando a ter uma duração que excede em 1 dia a duração dos anteriores caminhos críticos. Sendo assim, a dmp irá aumentar em 1 dia e as actividades críticas bem como os caminhos críticos alteram-se. Todos os caminhos que eram anteriormente críticos deixarão de o ser.

A título ilustrativo, se aplicarmos novamente o método CPM mas considerando que a duração de C é agora de 7 dias, obtém-se



Após o aumento na duração da actividade C, as actividades críticas são In, A, C, E, G, Fi, existe 1 único caminho crítico e a dmp é 10 dias.

**Conclusão:** Se a actividade i que sofre aumento na sua duração não é crítica e o aumento da sua duração é superior a  $FT_i-FT_{Fi}$  então a dmp aumenta, sendo o valor desse aumento igual à diferença entre o aumento na duração da actividade e o valor da expressão  $FT_i-FT_{Fi}$ . As actividades críticas e os caminhos críticos alteram-se: os caminhos anteriormente críticos deixam de o ser e os caminhos que incluem i passam a ser críticos.

## 4. Redução da duração de projectos

Por exigências contratuais ou de outra natureza, por vezes é necessário que o projecto se realize num intervalo de tempo inferior ao da sua duração mínima. Sendo assim, nestes casos, é necessário “acelerar” a execução do projecto o que, obviamente, só será conseguido acelerando a execução de actividades que o constituem.

Em geral, acelerar a execução de uma actividade acarreta custos adicionais advindos, por exemplo, da contratação pontual de mão-de-obra, de equipamentos extra, etc. Mas por outro lado, diminuir o tempo total de execução de um projecto irá também reduzir certas despesas gerais associadas à execução do projecto como um todo, como sejam despesas de supervisão.

Designando por **custos directos** os custos associados à execução de cada tarefa, em particular, e por **custos indirectos** os custos associados à execução dum projecto, como um todo, podemos observar que uma diminuição da duração do projecto implica aumentar os custos directos e diminuir os custos indirectos.

Designaremos por **custo total do projecto** a soma dos custos directos com os custos indirectos.

Os custos indirectos, embora importantes, não carecem de um estudo numérico específico. Apenas necessitam de ser determinados pelo gestor do projecto.

Por outro lado, os custos directos necessitam de especial atenção. Basta lembrarmos o que foi dito relativamente à sensibilidade da duração do projecto à variação da duração das actividades para, de imediato, podermos concluir que é possível obter a mesma duração para um projecto com custos diferentes. Sendo assim, o problema em questão consiste na determinação do custo directo mínimo de um projecto para uma dada duração **d**.

Dado que a duração do projecto é dada pela duração do caminho crítico e que este é constituído por actividades críticas, então será necessário proceder à redução da duração de actividades críticas. A questão está em identificar quais as actividades e em quantas unidades devem ser reduzidas.

O algoritmo que iremos apresentar poderá ser aplicado exhaustivamente, ou seja, até que não seja possível reduzir mais a duração do projecto, ou até que um valor **d**, para a duração do projecto, seja alcançado. Caso o algoritmo seja aplicado exhaustivamente, será possível construir um **perfil (curva) custo directo – tempo**.

O algoritmo que iremos apresentar exige que sejam conhecidos, *a priori*:

1. a rede ANN do projecto ou a lista de todos os caminhos na rede ANN entre o nodo inicial e o nodo final;
2. para cada actividade  $k$ :
  - a duração (normal) :  $d_k$
  - a duração reduzida:  $\underline{d}_k$
  - o custo de execução da actividade na sua duração normal:  $c_k$
  - o custo de execução da actividade na sua duração reduzida:  $\underline{c}_k$

A duração normal e duração reduzida, bem como os custos de execução nas durações normal e reduzida, permitem-nos definir o **custo marginal por unidade de tempo**, ou seja, o incremento ao custo resultante da redução de uma unidade na duração da actividade  $k$ :

$$\Delta_k = \frac{c_k - \underline{c}_k}{d_k - \underline{d}_k}$$

Na execução do algoritmo iremos construir e actualizar três tabelas de informação:

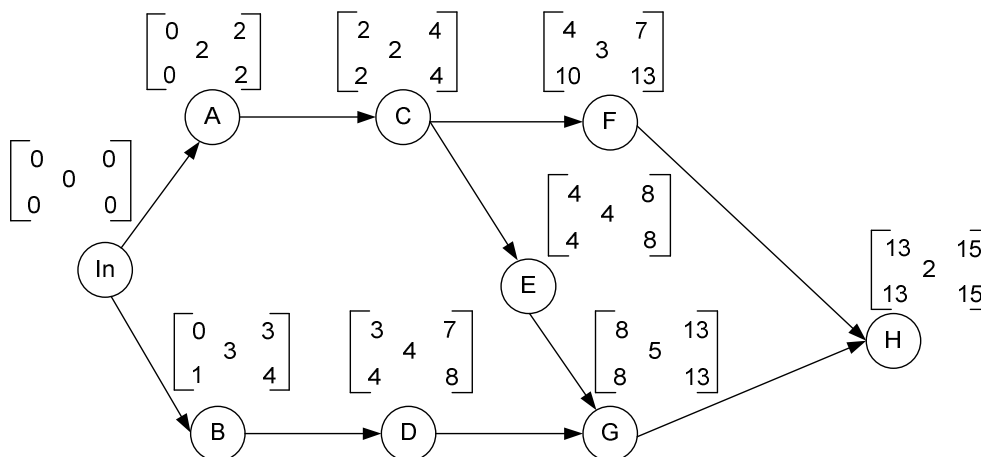
- ⇒ **Tabela Custo Marginal:** onde são listadas todas as actividades assim como o seu custo marginal e a sua redução disponível (diferença entre a duração normal e duração reduzida);
- ⇒ **Tabela Caminhos Possíveis:** onde estão listados todos os caminhos possíveis entre o nodo inicial e o nodo final da rede ANN bem como a sua duração;
- ⇒ **Tabela Iterações:** nesta tabela mantém-se uma lista das iterações executadas ao longo do processo de redução.

O algoritmo inicia-se tomando como solução de partida a solução obtida mediante a aplicação do método CPM, considerando as actividades na sua duração normal.

**Exemplo 11:** Consideremos o seguinte projecto em que a unidade de medida são semanas.

Act.	Prec.	$d_k$	$\underline{d}_k$	$c_k$	$\underline{c}_k$
A	--	2	1	22	22,9
B	--	3	1	30	34
C	A	2	1	26	26,8
D	B	4	3	48	49
E	C	4	2	56	57,4
F	C	3	2	30	30,5
G	D, E	5	2	80	86
H	F, G	2	1	16	19

A aplicação do método CPM conduz às seguintes datas mais cedo e mais tarde:



Como se pode observar, a duração mínima do projecto é 15 semanas sendo as actividades críticas In, A, C, E, G, H, e existindo um único caminho crítico. Somando os custos das actividades na sua duração normal, obtém-se o custo directo do projecto, que neste caso é 308 u.m..

Iteração	Actividade Reduzida	Valor redução	Duração projecto	Custo directo			Novo caminho crítico
				marginal	acrescido	projecto	
0	--	---	15	--	---	308	A-C-E-G-H

Tabela Iterações

Caminhos	Duração
	It. 0
A-C-F-H	9
A-C-E-G-H	15
B-D-G-H	14

Tabela Caminhos Possíveis

Act.	Custo marginal	Redução Disponível	Actividade Crítica?
		Iter 0	Iter 0
A	0,9	1	S
B	2	2	N

C	0,8	1	S
D	1	1	N
E	0,7	2	S
F	0,5	1	N
G	2	3	S
H	3	1	S

**Tabela Custo Marginal**

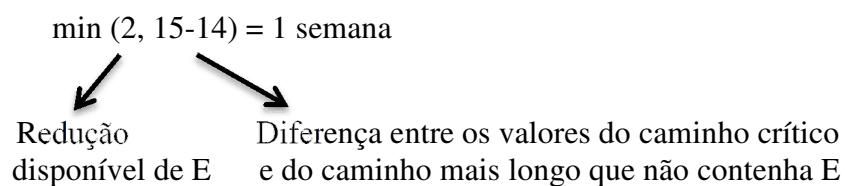
Para reduzir a duração mínima do projecto, necessitamos de reduzir a duração de, pelo menos, uma actividade crítica, pois apenas estas reduzem a duração do caminho crítico. Neste momento existe apenas um caminho crítico, a saber A-C-E-G-H, e portanto qualquer uma das actividades A, C, E, G ou H pode ser reduzida.

Como esta redução deve ser ao menor custo possível iremos escolher a actividade que tem menor custo marginal. Dado que os custos marginais são, respectivamente, (0,9, 0,8, 0,7, 2, 3), a actividade escolhida será aquela cujo custo marginal é 0,7, ou seja, a actividade E.

Falta-nos agora saber em quantas semanas a actividade E deve ser reduzida. A actividade E tem 2 semanas de redução disponível. Contudo se reduzirmos a duração da actividade E em 2 semanas, o caminho A-C-E-G-H passará a ter duração de  $15-2=13$  semanas.

Observando a tabela caminhos possíveis verificamos que existe um caminho que não inclui E e cuja duração é de 14 semanas, a saber B-D-G-H. Sendo assim, reduzindo E em 2 semanas iremos pagar um custo de  $2 \times 0,7$  e, efectivamente, o projecto só irá reduzir em 1 semana.

Conclusão: a actividade E deve ser reduzida em



Com esta redução a duração do projecto passa a 14 semanas e o custo directo do projecto passa a ser 308,7 u.m..

Para além disso, passam a existir dois caminhos críticos e mais actividades passam a críticas. Podemos agora proceder à actualização da informação nas tabelas.

Iteração	Actividade Reduzida	Valor redução	Duração projecto	Custo directo			Novo caminho crítico
				marginal	acrescido	projecto	
0	--	---	15	--	---	308	A-C-E-G-H
1	E	1	14	0,7	0,7	308,7	B-D-G-H

### Tabela Iterações

Caminhos	Duração	
	It. 0	It.1
A-C-F-H	9	9
A-C-E-G-H	15	14
B-D-G-H	14	14

### Tabela Caminhos Possíveis

Act.	Custo marginal	Red.	Act.	Red.	Act.
		Disp.	Crít?	Disp.	Crít?
		Iter 0	Iter 0	Iter 1	Iter 1
A	0,9	1	S	1	S
B	2	2	N	2	S
C	0,8	1	S	1	S
D	1	1	N	1	S
E	0,7	2	S	1	S
F	0,5	1	N	1	N
G	2	3	S	3	S
H	3	1	S	1	S

### Tabela custo marginal

Dado que existem dois caminhos críticos, temos que garantir que a actividade ou combinações de actividades escolhidas garantem, em simultâneo, a mesma redução da duração em todos os caminhos críticos.

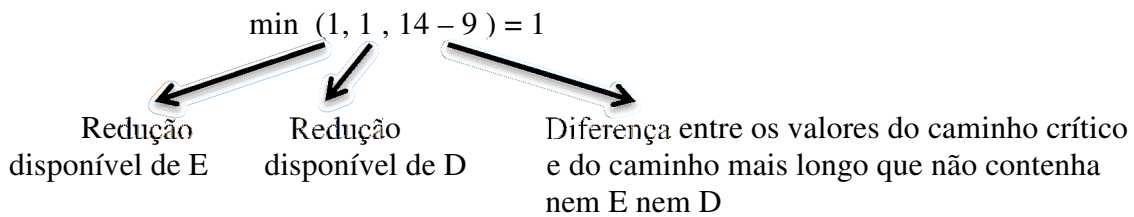
Dado que os caminhos críticos são A-C-E-G-H e B-D-G-H então as actividades ou combinações de actividades que podem ser reduzidas (de forma a reduzir a d.m.p.) são:

- G, H : pois pertencem a ambos os caminhos críticos;
- (A,B), (A,D), (C,B), (C,D), (E,B), (E,D): cada elemento do par pertence unicamente a um dos caminhos críticos.

Cujos custos marginais são

(2, 3, 2.9, 1.9, 2.8, 1.8, 2.7, 1.7).

Escolhe-se a combinação de actividades com custo marginal 1.7, ou seja, (E,D). As actividades E e D devem ser reduzidas em



Após actualizarmos a informação (ver iteração 2 nas tabelas das páginas 27 e 28), verifica-se que os caminhos críticos se mantiveram e, conseqüentemente, as actividades ou combinações de actividades candidatas a redução também se mantêm. Contudo, como as actividades D e E deixaram de ter redução disponível, agora temos:

- G, H: pois pertencem a ambos os caminhos críticos;
- (A,B), (C,B): cada elemento do par pertence unicamente a um dos caminhos críticos.

Cujos custos marginais são

(2, 3, 2.9, 2.8).

Escolhe-se a actividade com custo marginal 2, ou seja, G que deve ser reduzida em

$\min(3, 13 - 9) = 3$  semanas e actualizamos a informação (ver iteração 3 nas tabelas das páginas 27 e 28).

Os caminhos críticos mantêm-se e G deixou de ter redução disponível. Sendo assim, as actividades ou combinações de actividades candidatas a redução são:

- H: pois pertence a ambos os caminhos críticos;
- (A,B), (C,B): cada elemento do par pertence unicamente a um dos caminhos críticos.

cujos custos marginais são

(3, 2.9, 2.8)

Escolhe-se a combinação de actividades com custo marginal 2.8, ou seja, (C,B).

Neste caso (C,B) implica também uma redução no único caminho não crítico que existe e portanto as actividades C e B devem ser reduzidas em  $\min(1, 2) = 1$  semana e actualiza-se a informação (ver iteração 4 nas tabelas das páginas 27 e 28).

Os caminhos críticos mantêm-se mas C deixou de ter redução disponível. Agora as actividades ou combinações de actividades candidatas a redução são:

H e (A,B) com custos marginais (3, 2.9).

Escolhe-se (A,B), as actividades A e B devem ser reduzidas em  $\min(1, 1) = 1$  semana e actualiza-se a informação (ver iteração 5 nas tabelas das páginas 27 e 28).

Os caminhos críticos mantêm-se e já só resta a actividade H que pode ser reduzida em 1 semana. Depois de actualizada a informação (ver iteração 6 nas tabelas das páginas 27 e

28), o algoritmo termina.

Por aplicação do algoritmo, obtivemos um projecto com duração mínima de 7 semanas e cujo custo directo é de 325.1 unidades monetárias.

Iter.	Actividade	Valor	Duração	Custo directo			Novo caminho crítico
	Reduzida	redução	projecto	marginal	acrescido	projecto	
0	--	---	15	--	---	308	A-C-E- G-H
1	E	1	14	0,7	0,7	308,7	B-D-G-H
2	E,D	1	13	1,7	1,7	310,4	-----
3	G	3	10	2	6	316,4	-----
4	C,B	1	9	2,8	2,8	319,2	-----
5	A,B	1	8	2,9	2,9	322,1	-----
6	H	1	7	3	3	325,1	-----

**Tabela Iterações**

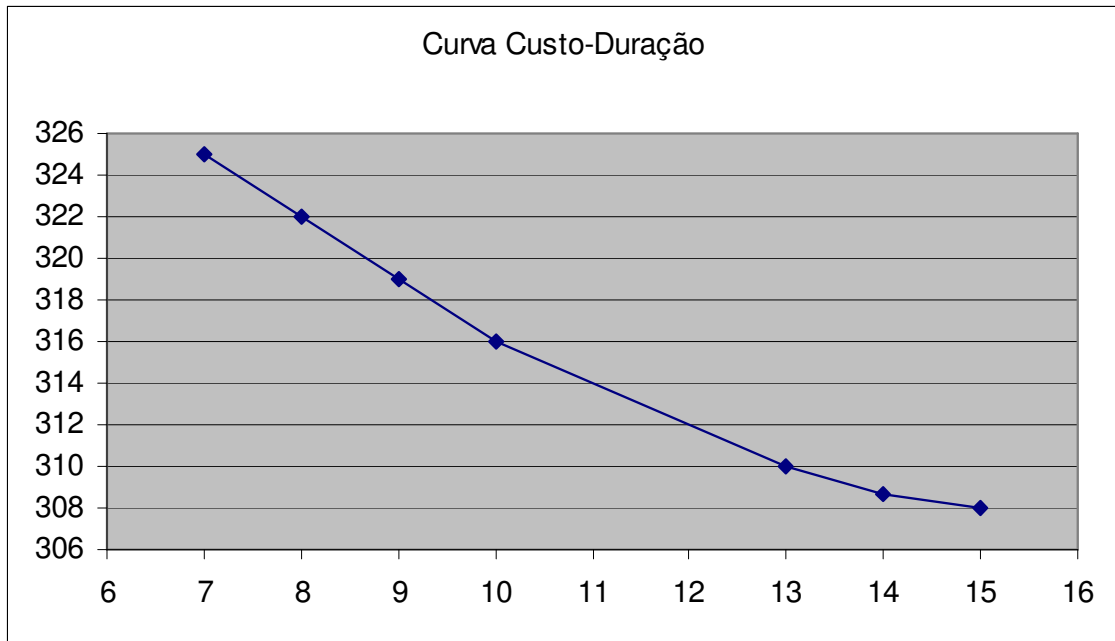
Caminhos	Duração						
	Iter 0	Iter 1	Iter 2	Iter 3	Iter 4	Iter 5	Iter 6
A-C-F-H	9	9	9	9	8	7	6
A-C-E-G-H	15	14	13	10	9	8	7
B-D-G-H	14	14	13	10	9	8	7

**Tabela Caminhos Possíveis**

Act.	Custo marginal	Red.	Act.	Red.	Act.	Red.	Act.	Red.	Act.	Red.	Act.	Red.	Act.	Red.	Act.
		Disp.	Crít?	Disp.	Crít?	Disp.	Crít?	Disp.	Crít?	Disp.	Crít?	Disp.	Crít?	Disp.	Crít?
		Iter 0	Iter 0	Iter 1	Iter 1	Iter 2	Iter 2	Iter 3	Iter 3	Iter 4	Iter 4	Iter 5	Iter 5	Iter 6	Iter 6
A	0,9	1	S	1	S	1	S	1	S	1	S	0	S	0	S
B	2	2	N	2	S	2	S	2	S	1	S	0	S	0	S
C	0,8	1	S	1	S	1	S	1	S	0	S	0	S	0	S
D	1	1	N	1	S	0	S	0	S	0	S	0	S	0	S
E	0,7	2	S	1	S	0	S	0	S	0	S	0	S	0	S
F	0,5	1	N	1	N	1	N	1	N	1	N	1	N	1	N
G	2	3	S	3	S	3	S	0	S	0	S	0	S	0	S
H	3	1	S	1	S	1	S	1	S	1	S	1	S	0	S

**Tabela Custo Marginal**

A curva Custo Directo-Duração para este projecto é apresentada em seguida.



## 5. Gestão de Recursos

Até ao momento estudaram-se questões relacionadas com o factor tempo. Iremos em seguida tratar de algumas questões relacionadas com a gestão de recursos físicos (mão-de-obra, matéria-prima, etc.).

Embora possam estar em jogo vários recursos diferentes, iremos aqui tratar o caso de um **único recurso**.

A Gestão de Recursos tem duas vertentes importantes:

- Afectação de Recursos, que consiste em afectar recursos limitados às actividades de um projecto;
- Nivelamento de Recursos, onde se pretende tornar mais eficiente a utilização dos recursos, “alisando” flutuações elevadas de utilização desses recursos.

Antes de prosseguirmos, introduzimos alguma notação e algumas definições necessárias.

Símbolo	Descrição
$J = \{1, \dots, n\}$	conjunto das actividades de um projecto
$d_j$	duração da actividade $j \in J$
$F_j$	data de fim da actividade $j \in J$
$r_j$	unidades de recurso necessárias para a execução da actividade $j \in J$ por unidade de tempo
$a$	quantidade total de recurso disponível
$R(t)$	quantidade de recurso necessária no instante $t$
$T$	duração do projecto

Diz-se que **uma actividade está activa** no instante  $t \geq 0$  se a actividade ainda está a decorrer nesse instante, ou seja, se  $F_j - d_j \leq t < F_j$  designando-se por **A(t) o conjunto das actividades activas no instante t**.

Chama-se **AGENDAMENTO**  $S=(F_1, F_2, \dots, F_n)$  a uma sequência de  $n$  instantes de tempo relativos à data de fim de cada uma das actividades.

Diz-se que um agendamento  $S$  é **PRECEDÊNCIA-ADMÍSSIVEL** se respeitar as relações de precedência entre as actividades, ou seja, se para qualquer actividade  $j$

$$F_j - d_j \geq \text{Max}_{h \in \text{Pred}(j)} F_h$$

Diz-se que um agendamento  $S$  é **RECURSO-ADMÍSSIVEL** se respeitar as restrições de recurso, ou seja, se em qualquer instante  $t \geq 0$

$$\sum_{j \in A(t)} r_j \leq a$$

Como já se viu no método CPM (PERT), a actividade  $j$  pode ter início em qualquer

instante do intervalo de tempo que varia entre a sua data de início mais cedo,  $ES_j$ , e a sua data de início mais tarde,  $LS_j$ . É assim possível obter diferentes agendamentos para um mesmo projecto.

### 5.1 Instrumentos de avaliação dos agendamentos

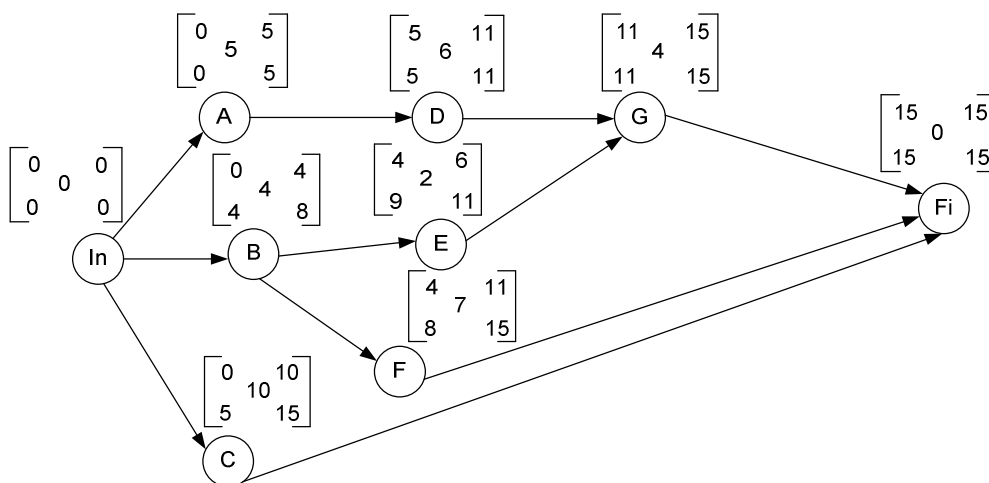
Para cada agendamento específico pode construir-se o respectivo **Histograma de Alocação de Recursos (HAR)**, que nos permite visualizar, simultaneamente, a utilização dos recursos ao longo da execução do projecto e ainda se este agendamento é recurso-admissível.

#### Exemplo 12: Construção de um HAR:

Considere-se um pequeno projecto com 7 actividades, sobre o qual se tem a seguinte informação:

Actividade	Actividade Imediatamente Precedente	Duração (semanas)	Unidades de recurso necessárias
A	-	5	3
B	-	4	2
C	-	10	4
D	A	6	2
E	B	2	1
F	B	7	3
G	D, E	4	3

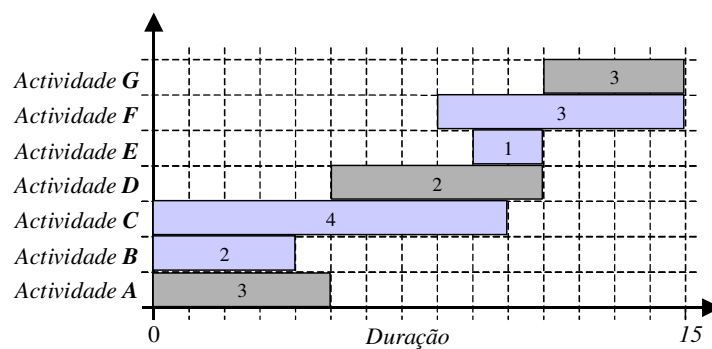
Em primeiro lugar, constrói-se a rede ANN associada ao projecto e calcula-se a sua duração mínima, via CPM, como se encontra ilustrado.



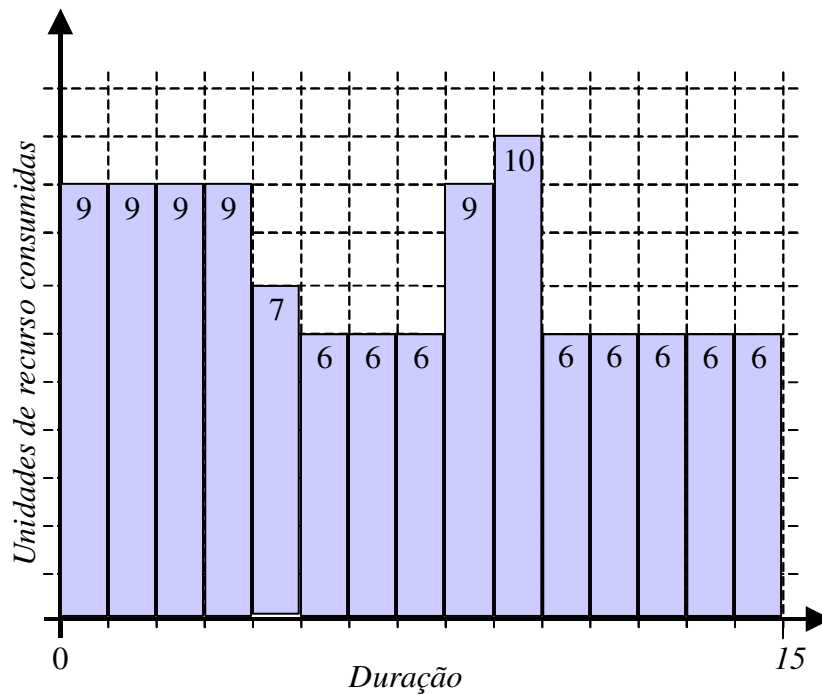
Da aplicação do método CPM conclui-se que a duração mínima do projecto é de 15 semanas e que as datas de início mais cedo ( $ES_j$ ) e mais tarde ( $LS_j$ ) de cada actividade (sem pôr em causa a duração mínima do projecto de 15 semanas) são como se registam no seguinte quadro:

Actividade	Data de início mais cedo ( $ES_j$ )	Data de início mais tarde ( $LS_j$ )
A	0	0
B	0	4
C	0	5
D	5	5
E	4	9
F	4	8
G	11	11

Construamos então o HAR associado ao projecto, em que se considera o agendamento  $S = (5, 4, 10, 11, 11, 15, 15)$ .



**Diagrama de Gantt**



**Histograma de Alocação de Recursos**

Para além destes instrumentos que nos permitem visualizar a gestão de recursos do projecto, existem instrumentos quantitativos que nos permitem avaliar a eficiência desta gestão de recursos.

Define-se **utilização efectiva** como sendo a quantidade total de recursos necessária para execução do projecto, que não é mais que a soma das quantidades de recurso necessárias em cada intervalo de tempo definido no diagrama, e que não depende do agendamento, podendo dessa forma ser definido por

$$\sum_{j=1}^n d_j r_j$$

Por outro lado considera-se que, idealmente, a utilização de recursos deverá ser constante ao longo do projecto de modo a não ter recursos desaproveitados. Desta forma, define-se **utilização ideal** como sendo a área do rectângulo cuja base corresponde à duração do projecto e cuja altura será igual à quantidade máxima de recurso necessária num só intervalo de tempo, ou seja,

$$\text{Max}_{0 \leq t \leq T} R(t) \times T$$

Note-se que, ao contrário do que acontece com a utilização efectiva, a utilização ideal está dependente do agendamento em questão.

A partir destas, define-se o **rácio de utilização**:

$$\rho = \frac{\text{Utilização Efectiva}}{\text{Utilização Ideal}}$$

que, como se pode ver facilmente, toma um valor entre 0 e 1.

Este indicador funciona mais como um parâmetro de comparação entre agendamentos,

pois quanto maior for o valor de  $\rho$ , melhor será o agendamento. Note-se que poderá não ser possível obter o agendamento mais eficaz, ou seja, o agendamento cujo rácio de utilização toma o valor 1 ( $\rho=1$ ).

Para além destes indicadores existem outros, tais como a média de utilização, variância de utilização, flutuação máxima, etc.

## 5.2 Afectação de Recursos

### O que acontece se, em determinado instante, a utilização de recursos exceder a quantidade disponível?

Para responder a esta questão assumiremos que:

- os vários tipos de recursos necessários à execução do projecto são conhecidos *a priori*;
- a quantidade disponível de cada recurso é conhecida e constante ao longo do tempo, não havendo diferença entre as unidades disponíveis;
- a quantidade de recurso necessária para cada actividade isolada nunca excede a quantidade disponível desse recurso (caso contrário o problema seria impossível);
- nenhuma data de início (ou de fim) é imposta às actividades do projecto.

O que se pretende é determinar um agendamento  $S$  com duração mínima e que satisfaça as relações de precedência e as restrições de recurso. Este problema designa-se por **Problema de Planeamento de Projectos com Restrição de Recursos (RCPS)**. Este é um problema de difícil resolução, o que justifica o recurso a heurísticas (as quais, são métodos que permitem obter soluções admissíveis para um problema, sem garantir a optimalidade das mesmas).

**NOTA:** Considera-se o caso específico em que existe um único tipo de recurso.

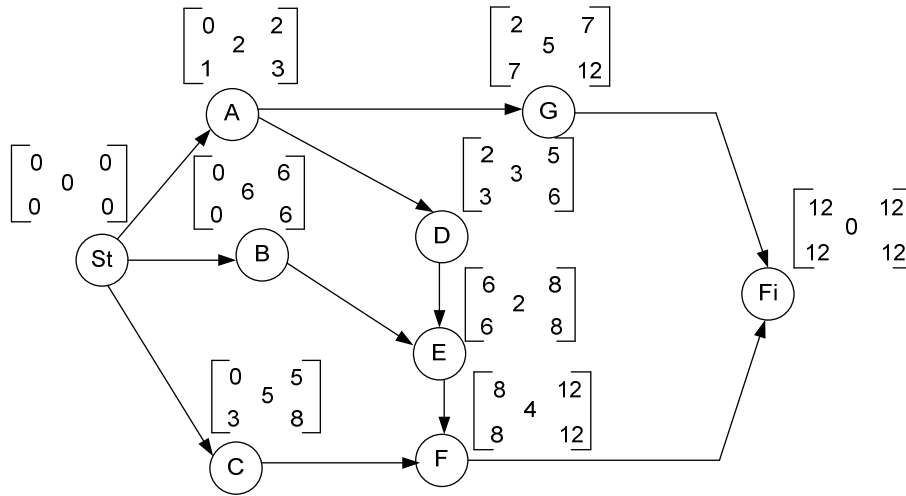
A heurística que iremos utilizar baseia-se num **esquema de geração de agendamentos (SGS)**: parte de um agendamento vazio e, de uma forma iterativa, vai seleccionando actividades até que todas tenham sido agendadas.

Para que esta selecção possa ser efectuada, é necessário estabelecer prioridades entre as actividades. Estas prioridades são obtidas, usualmente, utilizando uma (ou uma combinação) das seguintes regras:

- **LS – Início mais tarde:** as actividades prioritárias são as que têm o menor início mais tarde;
- **DUR – Duração:** as actividades prioritárias são as que têm menor duração;
- **FT – Folga Total:** as actividades prioritárias são as que têm menor folga total. Esta é, provavelmente, a regra mais comum, e resulta normalmente num atraso mínimo para o projecto. É comum conciliar esta regra com a regra da “menor duração” (DUR), quando as actividades seleccionáveis têm a mesma folga total;
- **REC – Recurso:** as actividades prioritárias são as que utilizam maior/menor quantidade de recursos;
- **SUC – Sucessores:** as actividades prioritárias são as que têm maior número de sucessores.

**Exemplo 13:**

Considere um projecto representado pela seguinte rede ANN:



Considere ainda a tabela seguinte, referente às unidades de recurso necessárias para a execução de cada actividade por unidade de tempo:

Actividade	A	B	C	D	E	F	G
$r_j$	3	2	1	4	1	3	2

Tendo em conta o agendamento  $S_E = (2, 6, 5, 5, 8, 12, 7)$ , o diagrama de Gantt bem como o HAR são os seguintes:

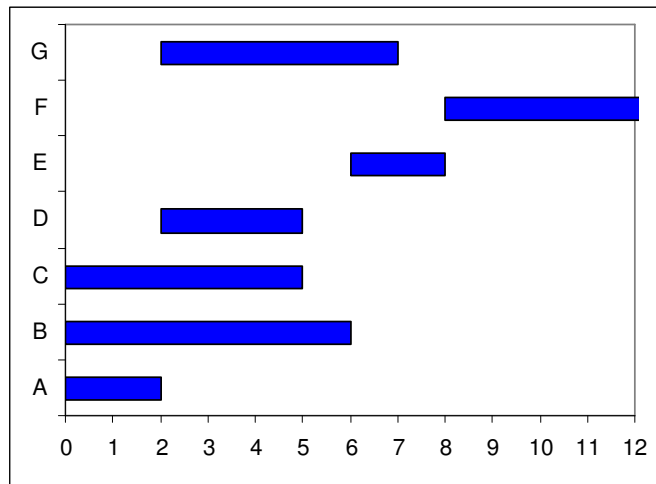
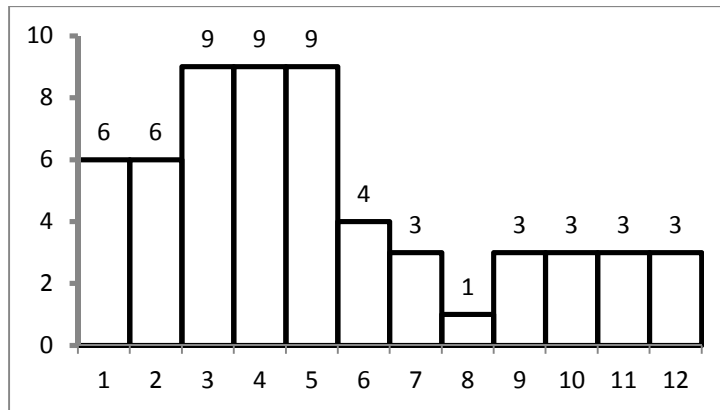


Diagrama de Gantt



Histograma de Alocação de Recursos

Ou seja, só será possível realizar este agendamento se, em cada intervalo de tempo, existirem 9 unidades de recurso disponíveis.

Suponhamos que existem apenas disponíveis 6 unidades de recurso e que, para aplicação da heurística SGS-Paralela, se irá utilizar a folga total (ou seja, a actividade será tanto mais prioritária quanto menor for a sua folga total) como regra de prioridade e a duração (ou seja, a actividade será tanto mais prioritária quanto menor for a sua duração) como regra de desempate.

Calculando a FT das actividades:

Actividade	Duração	ES	FT
A	2	0	1
B	6	0	0
C	5	0	3
D	3	2	1
E	2	6	0
F	4	8	0
G	5	2	5

A lista ordenada de actividades é então (E,F,B,A,D,C,G).

A heurística inicia-se com o agendamento vazio, ou seja sem qualquer actividade estar agendada.

Em cada iteração, que corresponde a um instante t de tempo, serão seleccionáveis todas actividades i cujas actividades predecessoras já estejam completas.

Instante	Actividades Completas	Actividades Seleccionáveis	Recursos disponíveis	Actividades agendadas/Datas de Fim
0	----	B(6,2), A(2,3), C(5,1) A(2,3), C(5,1) C(5,1) ----	6 6-2=4 4-3=1 1-1=0	B: $F_B=6$ A: $F_A=2$ C: $F_C=5$
2= $\min(2,5,6)$	A(2,3)	D(3,4), G(5,2) G(5,2) ----	0+3=3 3 3-2=1	falta rec. para D G: $F_G=2+5=7$
5= $\min(5,6,7)$	C(5,1)	D(3,4) ----	1+1=2	falta rec. para D
6= $\min(6,7)$	B(6,2)	D(3,4) ----	2+2=4 4-4=0	D: $F_D=6+3=9$
7= $\min(7,9)$	G(5,2)	----	0+2=2	---
9	D(3,4)	E(2,1) ----	2+4=6 6-1=5	E: $F_E=9+2=11$
11	E(2,1)	F(4,3) ----	5+1=6 6-3=5	F: $F_F=11+4=15$

Todas as actividades estão agendadas, ou seja, obteve-se um agendamento. Deste modo, a heurística termina.

A duração do projecto é  $\max_{j \in J} F_j = 15$  dias.

A data de fim de todas as actividades encontra-se na última coluna da tabela.

O agendamento obtido foi  $S = (2, 6, 5, 9, 11, 15, 7)$ .