

Modelos em Programação Linear Inteira

Maria João Cortinhal^a, Anabela Dias Costa^a, Maria João Lopes^a, Ana Catarina Nunes^a

^a *Departamento de Métodos Quantitativos, ISCTE-IUL*

13 de Setembro de 2013

1 Introdução

A Programação Matemática engloba um conjunto de problemas nos quais se pretende maximizar ou minimizar uma determinada função sujeita a um conjunto de restrições. Um caso especial da Programação Matemática é a Programação Linear (PL). Nos modelos de Programação Linear está subjacente um conjunto de hipóteses, entre as quais se encontram a linearidade da função objectivo bem como das restrições funcionais. Quanto às restrições de sinal – aquelas que definem o domínio de variação das variáveis – apenas se exige que pertençam ao corpo dos reais, \mathbb{R} . Contudo, são inúmeros os exemplos nos quais as variáveis de decisão têm um domínio de variação muito mais restrito. Vejamos, a título ilustrativo, dois exemplos.

1.1 Exemplo 1

Enunciado do problema

Um fabricante de artigos eléctricos pretende produzir dois novos produtos. O fabricante possui duas máquinas e a produção desses artigos pode ser realizada por qualquer uma das duas máquinas. O custo unitário de produção (em u.m.) e o tempo de laboração (em minutos) de cada produto em cada máquina encontram-se na Tabela 1. As máquinas 1 e 2 têm uma disponibilidade mensal de 45 e 72 horas de produção, respectivamente. O fabricante já estabeleceu um acordo com uma loja, em que se comprometeu a disponibilizar, mensalmente, 20 artigos de cada tipo. Sabendo que os artigos 1 e 2 irão ser vendidos a 30 u.m. e 35 u.m., respectivamente, pretende saber-se quantas unidades de cada tipo de artigo devem ser produzidas, em cada uma das máquinas, de forma a maximizar o lucro mensal total.

Definição de variáveis

O primeiro passo na formulação de qualquer problema é a definição das variáveis de decisão. Neste exemplo o que se pretende é determinar quantos artigos de cada tipo devem ser pro-

	Custo unitário de produção		Tempo de laboração	
	Artigo 1	Artigo 2	Artigo 1	Artigo 2
Máquina 1	12	16	50	22
Máquina 2	14	11	30	16

Tabela 1: Custo de produção e tempo de laboração

duzidos, em cada uma das máquinas, de forma a maximizar o lucro mensal. Dado que o lucro resulta da diferença entre o preço de venda e o custo de produção e que este último está dependente da máquina, somos conduzidos à seguinte definição das variáveis de decisão:

x_{ij} – número de artigos eléctricos do tipo i a serem produzidos mensalmente na máquina j , com $i, j = 1, 2$.

Função objectivo

Tendo sido estabelecido como objectivo a maximização dos lucros mensais e sendo estes resultantes da diferença entre preços de venda e custos de produção, facilmente se conclui que a função objectivo deste problema é:

$$\max Z = (30 - 12)x_{11} + (30 - 14)x_{12} + (35 - 16)x_{21} + (35 - 11)x_{22}$$

Restrições funcionais

1. Respeitar a capacidade produtiva das máquinas:

(a) $50x_{11} + 22x_{21} \leq 45 \times 60$

(b) $30x_{12} + 16x_{22} \leq 72 \times 60$

2. Garantir o fornecimento da quantidade acordada:

(a) $x_{11} + x_{12} = 20$

(b) $x_{21} + x_{22} = 20$

Restrições de sinal

Dado que se pretende planear a produção de artigos eléctricos, é necessário garantir que o número de artigos é não negativo e inteiro, ou seja, $x_{ij} \geq 0$ e inteiras, para todo o $i, j = 1, 2$.

Formulação do problema

O problema pode ser formulado em Programação Linear Inteira (PLI) da seguinte forma:

$$\max Z = (30 - 12)x_{11} + (30 - 14)x_{12} + (35 - 16)x_{21} + (35 - 11)x_{22} \quad (1)$$

s. a:

$$50x_{11} + 22x_{21} \leq 45 \times 60 \quad (2)$$

$$30x_{12} + 16x_{22} \leq 72 \times 60 \quad (3)$$

$$x_{11} + x_{12} = 20 \quad (4)$$

$$x_{21} + x_{22} = 20 \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ e inteiras} \quad i = 1, 2, j = 1, 2 \quad (6)$$

Nota: Neste exemplo, as variáveis de decisão só podem assumir valores não negativos e inteiros. Repare-se, contudo, que a exigência de não negatividade das variáveis de decisão não é intrínseca à formulação de problemas em PLI, tal como não o é na formulação de problemas em PL.

1.2 Exemplo 2

Enunciado do problema

Uma pequena empresa vai mudar de instalações e por esse motivo irá necessitar de distribuir os seus seis empregados pelos diferentes gabinetes. Cada um dos empregados terá direito a um gabinete individual. Contudo, nem todos os gabinetes têm as mesmas características. Eles diferem entre si na orientação solar, no número e dimensão das janelas e em outros pequenos pormenores. De forma a tentar maximizar a satisfação dos seus empregados, a empresa decidiu pedir-lhes que respondessem a um pequeno inquérito, no qual lhes era solicitado que atribuíssem, por ordem decrescente de preferência, uma pontuação a cada um dos gabinetes. O resultado desse inquérito encontra-se na Tabela 2.

	Gab. 1	Gab. 2	Gab. 3	Gab. 4	Gab. 5	Gab. 6
Empregado 1	1	2	6	3	4	5
Empregado 2	2	6	3	1	4	5
Empregado 3	3	5	1	2	4	6
Empregado 4	3	4	1	6	2	5
Empregado 5	4	1	2	5	4	3
Empregado 6	1	4	5	3	2	6

Tabela 2: Resultado do inquérito

Definição de variáveis

Neste exemplo, o que se pretende é decidir em que gabinete deve ser colocado cada um dos empregados. Sendo assim, para cada empregado i , com $i = 1, \dots, 6$, e cada gabinete j , com $j = 1, \dots, 6$, pretende saber-se se o empregado i deve ou não deve ser afecto ao gabinete j . Mais concretamente, as variáveis de decisão representam a escolha de uma entre duas opções disponíveis. Uma forma de ultrapassar, matematicamente, a dificuldade na modelação da decisão consiste em introduzir variáveis que tomam apenas o valor 0 ou 1 e representam decisões binárias, onde tipicamente:

- a decisão positiva (fazer algo) é representada pelo valor 1
- a decisão negativa (não fazer nada) é representada pelo valor 0

Variáveis deste tipo são designadas por *variáveis zero-um* ou *variáveis binárias*. Para definir estas variáveis utiliza-se a seguinte descrição verbal:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se a opção } i \text{ for tomada} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Adaptando ao nosso exemplo, tem-se:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o empregado } i \text{ for afecto ao gabinete } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função objectivo

Sendo o objectivo a maximização da preferência total dos empregados, a função objectivo deste problema é dada por:

$$\max Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij}$$

em que a matriz dos coeficientes da função objectivo, c_{ij} , é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Restrições funcionais

1. Garantir que cada empregado i , $i = 1, \dots, 6$, será afecto a um e um só gabinete j :

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} + x_{i6} = 1 \quad i = 1, \dots, 6$$

2. Garantir que cada gabinete j , $j = 1, \dots, 6$, será afecto a um e um só empregado i :

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} + x_{5j} + x_{6j} = 1 \quad j = 1, \dots, 6$$

Restrições de sinal

Neste caso, as variáveis são binárias, ou seja, só podem assumir o valor 0 ou o valor 1, sendo por isso representadas por $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i, j = 1, \dots, 6$.

Formulação do problema

O problema pode ser formulado em Programação Linear Inteira Binária (PLIB) da seguinte forma:

$$\max Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij} \quad (7)$$

s. a:

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} + x_{i6} = 1 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (8)$$

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} + x_{5j} + x_{6j} = 1 \quad j = 1, \dots, 6 \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 6; j = 1, \dots, 6 \quad (10)$$

2 Modelos Gerais

Os exemplos anteriormente descritos referem-se a duas subclasses de problemas em Programação Linear:

- a Programação Linear Inteira – Exemplo 1
- a Programação Linear Inteira Binária – Exemplo 2

O modelo geral de um problema em PLI é:

$$\max / \min Z = C^T X \quad (11)$$

s. a:

$$AX \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b \quad (12)$$

$$X \in \mathbb{Z}^n \quad (13)$$

Os modelos em PLIB, por sua vez, são modelos de Programação Linear em que cada variável de decisão só pode assumir o valor 1 ou o valor 0, o que, em linguagem corrente, se pode traduzir na selecção ou rejeição de uma determinada opção. O modelo geral de um problema em PLIB é:

$$\max / \min Z = C^T X \quad (14)$$

s. a:

$$AX \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b \quad (15)$$

$$X \in \{0, 1\}^n \quad (16)$$

2.1 Casos típicos de recurso a variáveis binárias para exprimir condicionantes ao problema

2.1.1 Caso 1: Restrições de exclusão e transitividade

Sejam

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se a opção } i \text{ for tomada} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Apenas uma opção entre n tem que ser tomada: $\sum_{i=1}^n x_i = 1$
- Exactamente p opções entre n têm que ser tomadas: $\sum_{i=1}^n x_i = p$
- A opção j só pode ser escolhida se a opção i também for: $x_j \leq x_i$

2.1.2 Caso 2: Recurso à utilização de variáveis binárias auxiliares

Por vezes, para que o problema possa ser formulado é necessário introduzir variáveis binárias auxiliares. Vamos ver alguns exemplos em que tal acontece:

- Existem duas condições $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a$ e $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ e pelo menos uma delas tem que ser verificada. Neste caso, define-se uma variável binária auxiliar y e a situação pretendida é expressa pelas restrições:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a + My \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b + M(y - 1) \end{cases}$$

em que M representa um número suficientemente grande.

Nota: Se $y = 1$ então o termo independente da 1.^a restrição passa a ser um número suficientemente grande, ou seja, a condição $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a$ não tem que ser verificada. Pelo contrário, o termo independente da 2.^a restrição é igual a b , dado que $1 - y = 0$, e a segunda condição terá que ser verificada. Se $y = 0$, então o termo independente da 1.^a restrição é a , ou seja, a condição $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a$ tem que ser verificada. Pelo contrário, o termo independente da 2.^a restrição passa a ser um número suficientemente grande, ou seja, a condição $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ não tem que ser verificada.

- Consideremos agora o caso em que existem m condições,

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a_m \end{cases}$$

e, pelo menos, p entre as m condições têm que se verificar.

Também neste caso, será necessário considerar um conjunto de m variáveis binárias auxiliares, y_i , $i = 1, \dots, m$, e a situação pretendida é representada pelas restrições:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a_1 + My_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a_2 + My_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a_m + My_m \\ \sum_{i=1}^m y_i \leq m - p \end{cases}$$

em que M representa um número suficientemente grande.

Nota 1: A restrição $\sum_{i=1}^m y_i \leq m - p$ obriga a que, das m variáveis y_i , no máximo, $m - p$ delas tenham o valor 1 e, conseqüentemente, no mínimo, p delas assumam o valor 0. Recordando o que foi dito na nota anterior, isto obrigará a que, pelo menos, p restrições sejam verificadas.

Nota 2: Este raciocínio pode ser adaptado para restrições do tipo

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq a_i.$$

- Consideremos agora o caso em que uma determinada função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ só pode assumir um de K valores possíveis, ou seja, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1$ ou a_2 ou \dots a_K . Nestes casos, e mais uma vez, faz-se recurso a K variáveis binárias auxiliares y_i , $i = 1, \dots, K$,

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e introduzem-se as seguintes restrições:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^K a_i y_i \\ \sum_{i=1}^K y_i = 1 \end{cases}$$

3 Exemplos de formulações

3.1 Exemplo 1: Selecção de projectos

Existem 4 projectos de investimento. Sabe-se que cada projecto decorrerá por um período de 3 anos. Conhecem-se o rendimento líquido ao fim de 3 anos, o capital disponível em cada ano e os requisitos de capital a investir em cada um dos 4 projectos em cada ano (ver Tabela 3).

Projecto	Rendimento líquido	Requisitos de capital		
		Ano 1	Ano 2	Ano 3
1	0.2	0.5	0.3	0.2
2	0.3	1.0	0.2	0.2
3	0.5	1.5	1.5	0.3
4	0.1	0.1	0.4	0.1
Capital disponível		3.1	2.5	0.4

Tabela 3: Informação sobre os projectos

Em que projectos se deverá investir de modo a maximizar o rendimento líquido total?

Definição das variáveis de decisão

O problema consiste em decidir quais os projectos que devem ser realizados, ou seja, em tomar, para cada projecto, uma de duas decisões: executar/não executar o projecto. Deste modo, as variáveis de decisão serão binárias e definidas da seguinte forma:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o projecto } i \text{ for escolhido} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições

As restrições referem-se aos requisitos de capital a investir em cada um dos 3 anos:

- Ano 1: $0.5x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 + 0.1x_4 \leq 3.1$
- Ano 2: $0.3x_1 + 0.2x_2 + 1.5x_3 + 0.4x_4 \leq 2.5$
- Ano 3: $0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4$

Função Objectivo

Pretende maximizar-se o rendimento líquido total. Assim, a função objectivo será:

$$\max Z = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 + 0.1x_4$$

Formulação do problema

A formulação do problema em PLIB é:

$$\max Z = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 + 0.1x_4 \quad (17)$$

s. a:

$$0.5x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 + 0.1x_4 \leq 3.1 \quad (18)$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 1.5x_3 + 0.4x_4 \leq 2.5 \quad (19)$$

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4 \quad (20)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (21)$$

É possível estender o problema básico de selecção de projectos de forma a incluir as seguintes características:

1. Projectos com diferentes períodos de execução
2. Projectos com diferentes datas de início e/ou fim
3. Adição de fluxos financeiros provenientes de projectos já completados
4. Projectos com rendimentos periódicos
5. Transporte de capital de ano para ano
6. Projectos mutuamente exclusivos
7. Projectos com início definido numa janela temporal

Vejamos como modelar cada uma destas situações.

3.1.1 Projectos com diferentes períodos de execução

Projectos com diferentes durações são facilmente tratáveis se definirmos os requisitos de capital, em qualquer ano em que o projecto não exista, como sendo 0. Por exemplo, se o projecto 1 tem a duração de 2 anos em vez de 3, a restrição de requisitos de capital para o ano 3 passará a ser:

$$0x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4$$

em vez de

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4$$

3.1.2 Projectos com diferentes datas de início e/ou fim

Projectos com diferentes datas de início e/ou fim são tratados de forma semelhante à situação anterior. Basta definirmos os requisitos de capital, para qualquer ano em que o projecto não exista, como sendo 0. Por exemplo, se o projecto 1 começa e termina no ano 2, o projecto 2 começa no ano 2 e o projecto 4 termina no ano 2, as restrições de requisitos de capital para cada ano passarão a ser:

- Ano 1: $0x_1 + 0x_2 + 1.5x_3 + 0.1x_4 \leq 3.1$
- Ano 2: $0.3x_1 + 0.2x_2 + 1.5x_3 + 0.4x_4 \leq 2.5$
- Ano 3: $0x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0x_4 \leq 0.4$

3.1.3 Adição de fluxos financeiros provenientes de projectos já completados

Se o projecto 1 terminar ao fim do segundo ano e o rendimento líquido associado puder ser utilizado como capital disponível no ano seguinte, a restrição de requisitos de capital para o ano 3 passará a ser

$$0x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4 + 0.2x_1$$

em vez de

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4$$

Note-se que a parcela $0x_1$ indica que o projecto 1 termina antes do ano 3 e portanto, nesse ano, não terá requisitos de capital.

3.1.4 Projectos com rendimentos periódicos

Na versão original do problema assume-se que o rendimento de cada projecto é recebido após a conclusão do mesmo. Nesta extensão, assume-se que existem projectos que apresentam rendimentos periódicos, os quais poderão ser utilizados para financiar projectos novos ou em curso. Consideremos o projecto 1 que, originalmente, apresentava um rendimento líquido total de 0.2. Suponhamos agora que este projecto apresenta um rendimento líquido de 0.15 ao fim do segundo ano e os restantes 0.05 no final do terceiro ano. Suponhamos ainda que este rendimento antecipado pode ser utilizado como capital disponível no terceiro ano. A restrição de requisitos de capital relativa ao ano 3 passará a ser:

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4 + 0.15x_1$$

em vez de

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4$$

3.1.5 Transporte de capital de ano para ano

No exemplo originalmente formulado tem-se capital disponível para cada ano (3.1 no ano 1, 2.5 no ano 2 e 0.4 no ano 3). É possível que, em alguns anos, o capital disponível não seja totalmente utilizado na execução dos projectos escolhidos. Suponhamos que era possível transportar para o ano seguinte 25% deste capital não utilizado. Nestas circunstâncias, as restrições relativas aos requisitos de capital para cada um dos três anos tomarão a seguinte forma:

- Requisitos de capital no ano 1:

$$0.5x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 + 0.1x_4 \leq 3.1$$

- Requisitos de capital no ano 2:

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 1.5x_3 + 0.4x_4 \leq 2.5 + 0.25[3.1 - (0.5x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 + 0.1x_4)]$$

- Requisitos de capital no ano 3:

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 \leq 0.4 + 0.25[2.5 + 0.25[3.1 - (0.5x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 + 0.1x_4)] - (0.3x_1 + 0.2x_2 + 1.5x_3 + 0.4x_4)]$$

3.1.6 Projectos mutuamente exclusivos

Suponhamos que os projectos 1 e 2 são mutuamente exclusivos, ou seja, poderemos optar por realizar um ou o outro, mas não ambos. Esta situação pode ser contemplada introduzindo a

restrição adicional:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

Note-se que uma solução admissível para o problema terá necessariamente que incluir uma das três possíveis combinações seguintes:

1. $x_1 = x_2 = 0$: nenhum dos projectos será executado
2. $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$: apenas o projecto 1 será executado
3. $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$: apenas o projecto 2 será executado

A solução $x_1 = x_2 = 1$, que corresponde a ambos os projectos serem executados, não é possível pois a condição $2 \leq 1$ é uma condição impossível.

3.1.7 Projectos com início definido numa janela temporal

Suponhamos que o projecto 1 poderá ter início no ano 1 com as características definidas anteriormente, ou no ano 2 com características diferentes: o mesmo rendimento de 0.2 ao fim do terceiro ano mas com requisitos de capital nos anos 2 e 3 de 0.9 e 0.4, respectivamente. Esta situação poderá ser contemplada com a introdução de uma nova variável binária y definida da seguinte forma:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{realizar o projecto 1 com início no ano 2} \\ 0, & \text{não realizar o projecto 1 com início no ano 2} \end{cases}$$

e com a redefinição da variável x_1 :

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{realizar o projecto 1 com início no ano 1} \\ 0, & \text{não realizar o projecto 1 com início no ano 1} \end{cases}$$

Mantêm-se as restrições relativas aos requisitos de capital para o ano 1, enquanto que para os anos 2 e 3 passarão a ser:

- Ano 1: $0.3x_1 + 0.2x_2 + 1.5x_3 + 0.4x_4 + 0.9y \leq 2.5$
- Ano 2: $0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 + 0.4y \leq 0.4$

É ainda necessário adicionar mais uma restrição que impeça que o projecto possa ter início em mais do que um ano, ou seja, em que se garanta que projecto 1 não possa ser iniciado no ano 1 e no ano 2. Esta situação traduz-se recorrendo à seguinte restrição adicional:

$$x_1 + y \leq 1$$

Por último, é necessário alterar a função objectivo de modo a incorporar o rendimento associado ao projecto 1, caso este se inicie no ano 2:

$$\max Z = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 + 0.1x_4 + 0.2y$$

3.2 Exemplo 2: Problema de localização

Uma empresa pretende expandir o seu negócio, através da abertura de novas fábricas e de novos armazéns de revenda. Após efectuar um estudo de mercado, foi possível determinar que apenas dois locais, A e B, reuniam as condições necessárias à eventual instalação de uma nova fábrica e/ou armazém. Os valores relativos ao NPV (*Net Present Value*), bem como ao investimento requerido, expressos em milhões de euros, encontram-se na tabela seguinte:

	NPV		Investimento	
	Local A	Local B	Local A	Local B
Fábrica	8	4	6	2
Armazém	6	2	5	1

Tabela 4: NPV e investimento, em milhões de euros

Sabendo que:

- podem ser instaladas duas fábricas mas, no máximo, um armazém,
- caso se instale um armazém este deve ser instalado no mesmo local que uma fábrica
- o capital disponível é de 10 milhões de euros

onde deverão ser instaladas as fábricas e o armazém de forma a maximizar o NPV total?

Definição das variáveis de decisão

Neste exemplo, pretende determinar-se em que locais devem ser instaladas as fábricas e o armazém. Deste modo, as variáveis de decisão serão binárias e definidas da seguinte forma:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a infra-estrutura } i \text{ for instalada no local } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que $i = 1$ representa a fábrica e $i = 2$ o armazém, e $j = A, B$.

Restrições

No que se refere ao capital disponível para investimento temos que:

$$6x_{1A} + 2x_{1B} + 5x_{2A} + 1x_{2B} \leq 10$$

Por outro lado, há que garantir que, no máximo, poderá ser instalado um armazém:

$$x_{2A} + x_{2B} \leq 1$$

e que, caso se instale um armazém, este deverá ser instalado no mesmo local que uma fábrica. Esta última condicionante pode ser descrita como:

1. Um armazém só pode ser instalado no local A se tiver sido instalada uma fábrica no local A
2. Um armazém só pode ser instalado no local B se tiver sido instalada uma fábrica no local B

o que, em termos de restrições, se traduz por:

$$\begin{cases} x_{2A} \leq x_{1A} \Leftrightarrow x_{2A} - x_{1A} \leq 0 \\ x_{2B} \leq x_{1B} \Leftrightarrow x_{2B} - x_{1B} \leq 0 \end{cases}$$

Função Objectivo

Pretende maximizar-se o NPV total. Assim, a função objectivo será:

$$\max Z = 8x_{1A} + 4x_{1B} + 6x_{2A} + 2x_{2B}$$

Formulação do problema

A formulação do problema em PLIB é:

$$\max Z = 8x_{1A} + 4x_{1B} + 6x_{2A} + 2x_{2B} \tag{22}$$

s. a:

$$6x_{1A} + 2x_{1B} + 5x_{2A} + 1x_{2B} \leq 10 \tag{23}$$

$$x_{2A} + x_{2B} \leq 1 \tag{24}$$

$$x_{2A} - x_{1A} \leq 0 \tag{25}$$

$$x_{2B} - x_{1B} \leq 0 \tag{26}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2; j = A, B \tag{27}$$

3.3 Exemplo 3: Planeamento de produção com custos fixos (custos de *setup*)

Uma fábrica pode produzir dois tipos de produtos, A e B, ao custo de 2 u.m. e 3 u.m., por tonelada, respectivamente. A produção de qualquer um dos produtos requer a preparação

de uma máquina, que para o produto A tem o custo de 10 u.m. e para o produto B de 12 u.m.. Para satisfazer a procura, a produção conjunta tem que ser de, pelo menos, 20 toneladas. Como deve ser feito o planeamento de produção de forma a minimizar o custo total de produção?

Definição das variáveis de decisão

Neste problema de planeamento de produção, é requerida a preparação de uma máquina. Dado que a preparação dessa máquina tem custos adicionais, que não estão relacionados com as quantidades a produzir e que têm que ser contabilizados, vai ser necessário arranjar uma forma de os incluir na função objectivo. Sendo assim, para além das variáveis x_j que irão representar as toneladas a produzir de cada produto j , $j = A, B$, vai ser necessário recorrer à definição de variáveis adicionais que permitam contabilizar o custo de preparação da máquina. Dado que a preparação da máquina está dependente da escolha de uma entre duas opções – produzir ou não produzir –, então serão utilizadas as seguintes variáveis binárias:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $j = A, B$.

Restrições funcionais

Se, por um lado, é necessário garantir que a produção mínima é respeitada:

$$x_A + x_B \geq 20$$

por outro lado, é necessário relacionar as variáveis x_i e y_i de forma a garantir que só pode haver produção se houver preparação da máquina. Em linguagem matemática, o que se pretende é que

1. Se $y_i = 1$ então $x_i > 0$
2. Se $y_i = 0$ então $x_i = 0$

Se ambas as variáveis y_i e x_i fossem binárias bastaria fazer $x_i = y_i$. Contudo, como as variáveis x_i podem assumir qualquer valor não negativo, é necessário garantir que o lado esquerdo da restrição anterior pode assumir qualquer valor não negativo. Para tal, basta fazer $x_i \leq My_i$, em que M é um número suficientemente grande.

Função objectivo

A função objectivo será dada por:

$$\min Z = 2x_A + 3x_B + 10y_A + 12y_B$$

Formulação do problema

A formulação do problema é:

$$\min Z = 2x_A + 3x_B + 10y_A + 12y_B \quad (28)$$

s. a:

$$x_A + x_B \geq 20 \quad (29)$$

$$x_A \leq My_A \quad (30)$$

$$x_B \leq My_B \quad (31)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j = A, B \quad (32)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = A, B \quad (33)$$

em que M representa um número suficientemente grande.

Nota: Neste exemplo, dado que existem dois tipos de variáveis – não inteiras e binárias – a formulação do problema é designada por formulação em Programação Linear Inteira Mista (PLIM).

Generalizando, se existem n actividades cada uma delas com a seguinte estrutura de custos:

$$f_j = \begin{cases} k_j + c_j x_j, & \text{se } x_j > 0 \\ 0, & \text{se } x_j = 0 \end{cases}$$

em que:

- x_j representa o nível da actividade j
- k_j representa o custo de *setup* ($k_j \geq 0$)
- c_j representa o custo unitário da actividade j

e cujo objectivo é otimizar uma função $Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$ sujeita a um conjunto de restrições lineares.

O problema pode ser formulado em PLIM definindo as variáveis de decisão binárias:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j > 0 \\ 0, & \text{se } x_j = 0 \end{cases}$$

obtendo-se a seguinte formulação:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n c_j x_j + k_j y_j \quad (34)$$

s. a:

$$AX \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (35)$$

$$x_j \leq M y_j \quad j = 1, \dots, n \quad (36)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n \quad (37)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (38)$$

3.4 Exemplo 4

Uma universidade necessita de adquirir 1100 computadores pessoais, podendo para o efeito recorrer a 3 vendedores. O vendedor 1 dispõe de 500 computadores a um preço unitário de 5000 u.m., exigindo o valor de 500 u.m. pela entrega e o vendedor 2 tem disponíveis 900 computadores a um preço unitário de 4000 u.m., exigindo o valor de 350 u.m. pela entrega. Finalmente, o vendedor 3 pode fornecer 400 computadores a um preço unitário de 6000 u.m. e exige o valor de 250 u.m. pela entrega. Formule em Programação Linear Inteira de modo a minimizar o custo total de aquisição dos computadores.

Variáveis de decisão

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se a universidade adquirir computadores ao vendedor } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $i = 1, 2, 3$ e

x_i = número de computadores adquiridos, pela universidade, ao vendedor i , $i = 1, 2, 3$.

Formulação do problema

A formulação do problema em PLI é:

$$\text{Min } Z = 5000x_1 + 4000x_2 + 6000x_3 + 500y_1 + 350y_2 + 250y_3 \quad (39)$$

s. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1100 \quad (40)$$

$$x_1 \leq 500y_1 \quad (41)$$

$$x_2 \leq 900y_2 \quad (42)$$

$$x_3 \leq 400y_3 \quad (43)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, 3 \quad (44)$$

$$x_j \geq 0 \text{ e inteiras} \quad j = 1, 2, 3 \quad (45)$$

Vamos agora ver como se alteraria a formulação se fosse necessário incluir alguma das seguintes restrições:

- só podem ser adquiridos computadores a um dos vendedores 2 ou 3:

$$y_2 + y_3 \leq 1$$

- se forem adquiridos computadores ao vendedor 3, então também têm que ser adquiridos computadores ao vendedor 1; o que se pretende é que:

$$\begin{cases} \text{se } y_3 = 1 \text{ então } y_1 = 1 \\ \text{se } y_3 = 0 \text{ então } y_1 = 0 \text{ ou } y_1 = 1 \end{cases}$$

Desta forma, basta que $y_3 \leq y_1$

- se forem adquiridos computadores ao vendedor 2, então tem que ser adquirido todo o lote que este vendedor possui; pretende-se que $x_2 = 0$ ou $x_2 = 900$, ou seja,

$$\begin{cases} \text{se } y_2 = 0 \text{ então } x_2 = 0 \\ \text{se } y_2 = 1 \text{ então } x_2 = 900 \end{cases}$$

Neste caso, basta acrescentar à formulação a restrição $x_2 = 900y_2$ e retirar a restrição $x_2 \leq 900y_2$