

Investigação Operacional

Licenciatura em Gestão

3.º Ano

Ano Lectivo 2013/14

Programação Linear

Texto elaborado por:

Maria João Cortinhal (Coordenadora)

Anabela Costa

Maria João Lopes

Ana Catarina Nunes

1. Optimização

O significado de **optimizar** depende da natureza do problema em estudo. Por exemplo, optimizar pode significar:

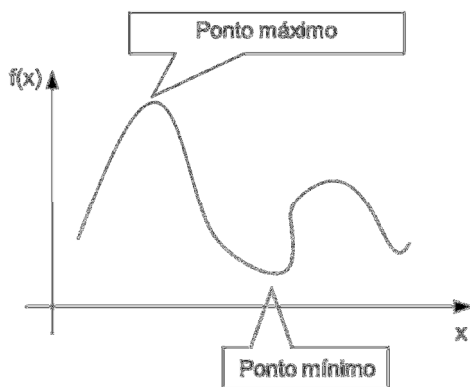
- Determinar a solução que origina o melhor lucro/custo, ou, alternativamente;
- Determinar a solução que origina o menor consumo de recursos escassos.

A optimização pode dividir-se em duas categorias:

- Optimização não condicionada;
- Optimização condicionada.

A **optimização não condicionada** pode resolver problemas em que se pretende determinar a solução que optimiza (maximiza ou minimiza) a função em estudo, mas em que não são impostas quaisquer condicionantes às variáveis envolvidas.

Exemplo:



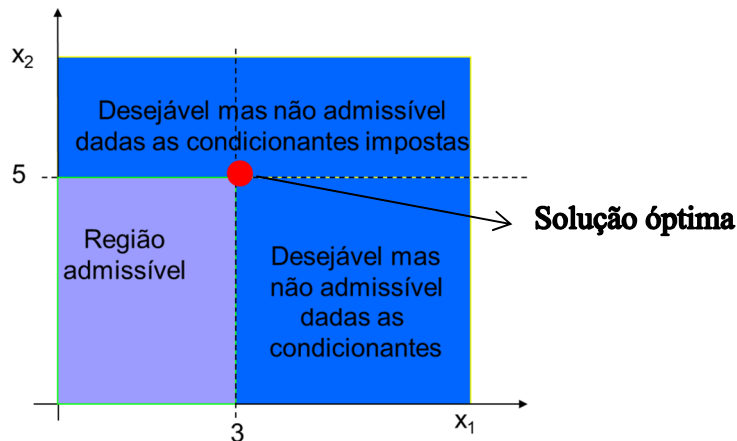
Na **optimização condicionada**, continuamos a querer determinar a melhor solução, mas neste caso as variáveis envolvidas têm de respeitar um conjunto de condicionantes. Apesar do conjunto de soluções ser mais restrito, a resolução de problemas de optimização condicionada é, em geral, mais difícil.

Exemplo

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como se pode observar na figura seguinte, o conjunto de condicionantes impostas limita o conjunto de soluções possíveis (região admissível).



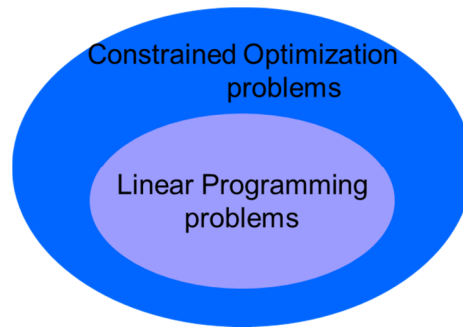
A explicitação matemática de um problema de optimização condicionada exige a definição das seguintes entidades:

- **Variáveis** (também designadas por **variáveis de decisão**): os seus valores são desconhecidos quando se inicia a resolução do problema e, normalmente, representam elementos que se podem ajustar ou controlar;
- **Função objectivo (f.o.)**: uma função matemática das variáveis que exprime o objectivo. É requerido maximizar ou minimizar a função objectivo;
- **Restrições**: equações e/ou inequações que impõem as condições que as soluções têm que verificar, por exemplo, o número de trabalhadores que estão disponíveis para trabalhar numa determinada máquina;
- **Limites das variáveis** (também designados por **restrições de sinal**): os valores que as variáveis podem assumir são limitados.

2. Programação Linear

Programação Linear (PL) significa **planear utilizando expressões lineares**, ou seja, são **requeridas expressões matemáticas lineares**.

Os problemas de programação linear são um subconjunto dos problemas de optimização condicionada:



A formulação matemática de um problema em PL consiste na definição de um modelo de PL.

O **Modelo geral de programação linear** é definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} \text{MAX (MIN) } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad \rightarrow \text{FUNÇÃO OBJECTIVO} \\ \text{s.a: } \left. \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n (\leq, =, \geq) b_m \end{array} \right\} \rightarrow \text{RESTRIÇÕES TÉCNICAS} \\ x_1, x_2, \dots, x_n (\geq 0, \leq 0, \text{livres}) \quad \rightarrow \text{RESTRIÇÕES DE SINAL} \end{array}$$

onde:

- x_j , $j = 1, \dots, n$, são as variáveis de decisão (i.e., são as variáveis que descrevem as decisões a tomar);
- c_j , $j = 1, \dots, n$, são os coeficientes das variáveis x_j na função objectivo – podem traduzir o lucro ou o custo associado à variável x_j ;
- a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, são os coeficientes técnicos das restrições;
- b_i , $i = 1, \dots, m$, são os termos independentes das restrições;
- Z , é o valor da função objectivo – pode traduzir o lucro ou o custo associado ao problema.

Note-se que, sendo um modelo em PL, só se podem considerar expressões matemáticas lineares, ou seja, em que as variáveis só podem ser multiplicadas por uma constante, não podendo existir produto de variáveis nem outro tipo de funções de variáveis (e.g., raízes, logaritmos, etc.).

Se todas as variáveis forem não negativas ($x_j \geq 0$, $j=1, \dots, n$), as restrições de sinal são designadas por **restrições de não negatividade**.

Para além do modelo geral, podem definir-se modelos na forma standard:

Forma standard de tipo máximo

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s.a. } & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ & \dots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Forma standard de tipo mínimo

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s.a. } & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\ & \dots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Num modelo em PL, estão subjacentes as seguintes **hipóteses**:

- **Proporcionalidade:** o resultado de uma actividade é proporcional ao nível dessa actividade. Se uma unidade de uma actividade j proporciona um lucro igual a k (ou consome k unidades do recurso i) x_j unidades proporcionam um lucro de $k \times x_j$ (ou consomem $k \times x_j$ unidades do recurso i). Esta hipótese exclui situações em que existem custos fixos, ou custos/lucros que dependam do nível das actividades;
- **Aditividade:** o valor da função objectivo (ou o consumo de um dado recurso) é a soma dos contributos (ou dos consumos) de cada uma das actividades. Esta hipótese exclui situações em que há interacção entre actividades, situações em que existem ganhos ou perdas por considerar mais do que uma actividade;
- **Divisibilidade:** cada variável de decisão pode tomar valores fraccionários – por exemplo, num plano de produção pode produzir-se 0,3 de objecto;
- **Exactidão:** cada parâmetro (coeficiente da f.o., coeficiente técnico ou termo independente) é conhecido com alguma exactidão.

Note-se que, as hipóteses de proporcionalidade e de aditividade são garantidas pelas expressões lineares. Por outro lado, a divisibilidade é expressa pelas restrições de não negatividade.

Em casos reais, é possível encontrar problemas de PL com milhares de variáveis e milhares de restrições.

Os avanços nas metodologias de resolução, bem como nos computadores, permitem que problemas deste tipo possam ser resolvidos num período de tempo considerado razoável.

A formulação em PL não é um exercício trivial pois, não só requer a análise cuidada da informação, como também não existe um procedimento único para a efectuar. No entanto, listam-se seguidamente algumas sugestões:

- i) Identifique o objectivo do problema;
- ii) Identifique as variáveis de decisão e as restrições;
- iii) Escreva a função objectivo e as restrições: utilize a informação do problema para determinar os coeficientes das variáveis na função objectivo e nas restrições;
- iv) Adicione as restrições implícitas, como sejam as restrições de sinal.

Exemplo

Formule o seguinte problema em PL:

Um comerciante pretende obter uma quantidade não superior a 5 toneladas de certo produto. Esta quantidade pode ser encomendada a duas fábricas A e B. A fábrica A garante um lucro de 4 mil Euros por tonelada mas não pode fornecer mais de 3 toneladas. A fábrica B garante um lucro de 3.5 mil Euros por tonelada e pode fornecer qualquer quantidade. Qual o esquema de encomenda que origina um lucro máximo?

Considerem-se as seguintes **variáveis de decisão**:

x_i – quantidade de produto (em toneladas) a encomendar à fábrica i , $i = A, B$;

O problema pode ser formulado em PL da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX } Z = 4x_A + 3.5x_B & \text{(maximizar o lucro)} \\ \text{s.a. } x_A + x_B \leq 5 & \text{(encomendar quantidade não superior a 5 t)} \\ x_A \leq 3 & \text{(fáb. A não fornece mais de 3 t)} \\ x_A, x_B \geq 0 & \text{(encomendar quantidades não negativas)} \end{array}$$

3. Alguns problemas tipo

O problema de dietas ou misturas

Este problema consiste em determinar a composição de um ou mais produtos com algumas propriedades, a partir de um conjunto de componentes possuidoras, em diferentes proporções, dessas propriedades. O objectivo é, geralmente, minimizar o custo total dos produtos.

Na formulação deste problema, as variáveis de decisão são, regra geral:

x_{ij} que representam a quantidade de componente i que faz parte do produto j ,
 $i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$

As restrições dependem do problema em estudo. São exemplo, a imposição de quantidades ou proporções mínimas/máximas de determinada componente ou propriedade na composição dos produtos.

O problema trim-loss

Este problema consiste em determinar os planos de corte de uma matéria prima que satisfaçam a procura e simultaneamente minimizem os desperdícios, visto que as linhas de produção da matéria prima não têm em conta a estrutura da procura. Para este tipo de problemas, há que começar por enumerar todas as formas de corte possíveis, bem como os respectivos desperdícios inerentes a cada corte.

Suponham-se k cortes. Definem-se como variáveis de decisão:

x_j que representam o número de peças de matéria prima cortadas segundo o corte j ,
 $j=1,\dots,k$.

As restrições dependem do problema em análise, envolvendo usualmente a satisfação das procuras.

O problema de investimentos

Este problema consiste em planear a aplicação de capital em m investimentos, durante um intervalo de tempo pré-determinado (dividido em n períodos), de forma a maximizar os rendimentos.

Nesse caso ter-se-á as variáveis de decisão:

x_{ij} que representam o capital aplicado no investimento do tipo i , no início do período j ,
 $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$.

No caso em que o número n de períodos é superior a 1, em cada período j ter-se-á que definir restrições que limitam o capital a investir e que são escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{capital a investir} &\leq \text{capital inicial} - \text{capital investido} \\ &\quad + \text{capital já recuperado} + \text{lucro já obtido} \end{aligned}$$

O problema de planeamento sequencial de produção

Este problema consiste em determinar o planeamento de produção de m produtos para n períodos de tempo, podendo o objectivo ser a minimização do custo total de produção ou a maximização do lucro total. Para cada período são conhecidas as capacidades de produção, as procuras, os custos de produção e armazenamento.

Assim, as variáveis de decisão podem ser definidas como:

x_{ij} que representam a quantidade produzida do bem i no período de tempo j ,
 $i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$.

As restrições estão, em geral, relacionadas com a satisfação das procuras e a limitação de capacidades existentes.

O problema de Transportes

Este problema consiste na determinação do plano de transporte de custo mínimo de um produto, entre um conjunto de m origens às quais estão associadas disponibilidades D_i , $i=1,\dots,m$, e um conjunto de n destinos aos quais estão associadas procuras P_j , $j=1,\dots,n$. Designa-se por c_{ij} o custo unitário de transporte da origem i para o destino j .

Considerando as variáveis de decisão:

x_{ij} que representam a quantidade a transportar da origem i para o destino j , $i=1,\dots,m$,
 $j=1,\dots,n$,

este problema pode ser formulado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a: } \sum_{j=1}^n x_{ij} &= D_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= P_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Esta formulação pressupõe a existência de equilíbrio: $\sum D_i = \sum P_j$. Caso tal situação não se verifique, será necessário acrescentar uma origem fictícia (se $\sum D_i < \sum P_j$) ou um destino fictício (se $\sum D_i > \sum P_j$).

O problema de Afectação

Este problema consiste em distribuir um conjunto de n tarefas a igual número de agentes para as realizar, de forma que cada tarefa seja realizada por um único agente e cada agente realize uma só tarefa. Designa-se por c_{ij} o custo da tarefa i ser realizada pelo agente j .

Definindo as variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a tarefa } j \text{ for realizada pelo agente } i \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

com $i=1,\dots,n, j=1,\dots,n$, o problema pode ser formulado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a: } \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} &\in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Note-se que, caso o número de tarefas seja diferente do número de agentes, será necessário criar agentes fictícios ou tarefas fictícias para obter a igualdade.

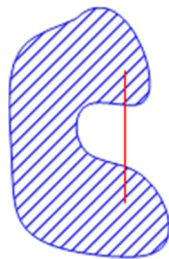
4. Definições e propriedades

Seja P um problema de Programação Linear com n variáveis de decisão e m restrições técnicas. Definem-se:

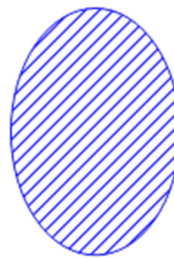
- **Solução:** qualquer vector de valores das variáveis de decisão.
- **Solução admissível:** qualquer vector de valores das variáveis de decisão que satisfaça as restrições (incluindo as restrições de sinal) do problema.
- **Região admissível:** o conjunto de todas as soluções admissíveis, o qual é designado por S.
- **Solução óptima:** a solução admissível que leva a f.o. a um máximo (ou mínimo).

Em PL, são válidas as seguintes propriedades:

- A **região admissível S** de um problema de PL é um conjunto convexo fechado com um número finito de pontos extremos.

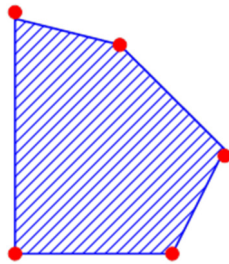


Conjunto não convexo



Conjunto convexo

- ii) Existindo óptimo finito (max ou min) de um problema de PL, a f.o. assume-o num ponto extremo de S; no caso de atingir o óptimo em mais de um ponto extremo, toda a combinação linear convexa destes pontos corresponde a uma solução óptima.



5. Resolução de problemas de programação linear

A resolução de um problema de Programação Linear pode fazer-se recorrendo ao método do Simplex.

A aplicação do Método do Simplex sem recurso a um software, obriga a que as variáveis de decisão sejam todas não negativas. Caso existam variáveis não positivas ou livres, é necessário efectuar substituições dessas variáveis de forma a obter um modelo em que todas as variáveis sejam não negativas. Além disso, também obriga à transformação das restrições técnicas de desigualdade em restrições de igualdade. Esta transformação faz-se com recurso a variáveis de desvio (variáveis de folga ou de excesso) do seguinte modo:

- Cada restrição do tipo ' \leq ': $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$
 Considera-se a **variável de folga** s_i e obtém-se a igualdade:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + s_i = b_i$$
- Cada restrição do tipo ' \geq ': $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \geq b_i$
 Considera-se a **variável de excesso** t_i e obtém-se a igualdade:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n - t_i = b_i$$

Consideremos um problema de PL em que existam n variáveis de decisão e m restrições de desigualdade, a partir das operações descritas anteriormente ir-se-á obter um problema com $n+m$ variáveis, podendo então definir-se:

- **Solução básica:** uma solução que satisfaça as restrições funcionais e em que n variáveis assumem o valor nulo e as restantes m variáveis constituem uma base do sistema de m restrições (i.e., a submatriz dos seus coeficientes tem determinante não nulo).
- **Solução básica admissível (SBA):** uma solução básica onde os valores das variáveis básicas são não negativos.

O Método do Simplex é um método iterativo que resolve problemas de Programação Linear. Partindo de um ponto extremo (Solução Básica Admissível inicial), vai visitar pontos extremos adjacentes, com a garantia de que as soluções que vão sendo sucessivamente obtidas nunca pioram o valor da f.o.

O Solver do Excel é um dos programas que pode ser utilizado para resolver problemas de programação linear através do Método do Simplex.

Quando se pretende resolver um problema de PL usando o Solver, não é necessário efectuar a substituição de variáveis acima referida, sendo apenas necessário indicar qual o tipo das variáveis que não são livres. Para além disso, deverão ser inseridas as restrições originais, ou seja, sem proceder à sua transformação de desigualdades em igualdades, conforme descrito acima. No entanto, a análise dos resultados, obtidos pelo Solver, é feita assumindo esses mesmos pressupostos de transformação das restrições.

6. Análise de resultados

Da análise dos outputs gerados pelo Solver podem ser retirados:

- O valor óptimo da f.o.;
- O valor óptimo das variáveis de decisão e das variáveis de desvio;
- O preço sombra associado a cada restrição i (normalmente representado por y_i).

Dada a restrição $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n (\leq, =, \geq) b_i$, $i=1, \dots, m$, a interpretação do **preço sombra** y_i , $i=1, \dots, m$, é a seguinte:

Se for possível aumentar o termo independente b_i em uma unidade, então o efeito produzido no valor da f.o. é igual a y_i (i.e., se $y_i > 0$ então o valor da f.o. aumenta y_i ; caso $y_i < 0$, o valor da f.o. diminui y_i). **Nota:** nesta análise, assume-se que a unidade extra do termo independente b_i tem o mesmo custo que as anteriores b_i ; caso não tenha, é necessário ter-se em consideração esses custos para determinar o real impacto no valor da f.o..

Para além disso, para efeitos da análise de sensibilidade, é possível identificar os intervalos de variação:

- Para os coeficientes, na f.o., das variáveis de decisão x_j (c_j), de forma que a solução óptima não se altere; ou
- Para os lados direitos das restrições (b_i), de forma a que as variáveis básicas, na solução óptima, não mudem.

Recorde-se que, para efeitos de análise de sensibilidade, assume-se a variação de um e apenas um dos coeficientes, mantendo todos os outros constantes.

Segue-se um resumo sintético acerca das conclusões a retirar quando se efectua uma alteração num coeficiente da f.o. ou num termo independente.

Análise do Intervalo de Sensibilidade para c_j (ISc_j) – Caso c_j (coeficiente da variável x_j na f.o.) seja alterado para c_{jN} , podem ocorrer duas situações:

- se $c_{jN} \in ISc_j$, então:
 - a solução óptima mantém-se (i.e., as variáveis continuam a ter os mesmos valores);
 - o valor óptimo pode alterar-se: $Z^N = Z + \Delta Z = Z + (c_{jN} - c_j) \times x_j^*$ (x_j^* designa o valor de x_j na solução óptima);
- se $c_{jN} \notin ISc_j$, então a base óptima altera-se e, conseqüentemente, a solução óptima e o valor óptimo também se alteram. É necessário reoptimizar (por exemplo, usando o Solver).

Análise do Intervalo de Sensibilidade para b_i (ISb_i) – Caso b_i (termo independente da restrição i) seja alterado para b_{iN} , podem ocorrer duas situações:

- se $b_{iN} \in ISb_i$, então:
 - a base óptima mantém-se (i.e., as variáveis básicas são as mesmas), embora os valores das variáveis possam alterar-se (novos valores podem ser determinados através do Solver);
 - o preço sombra da restrição i , y_i^* , mantém-se;
 - o valor óptimo pode alterar-se: $Z^N = Z + \Delta Z = Z + (b_{iN} - b_i) \times y_i^*$;
- se $b_{iN} \notin ISb_i$, então a base óptima altera-se e, conseqüentemente, a solução óptima e o valor óptimo também se alteram. É necessário reoptimizar (por exemplo, usando o Solver).