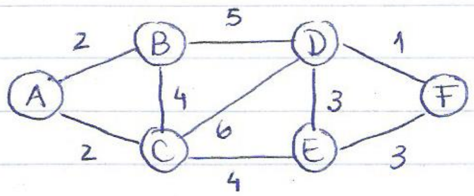
Redes

① Problema da árvore de suporte de custo mínimo

- aceder a todos os pontos, através do mínimo de ligações / custo etc

nº de ligações = nº de vértices − 1

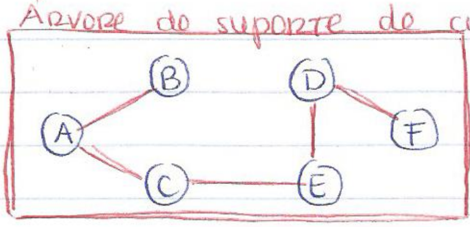
1.1. Algoritmo de Kruskal



1 - ordenar por ordem não decrescente dos pesos

arestas	peso		
(D,F)	1	✓	
(A,B)	2	✓	
(A,C)	2	✓	
(D,E)	3	✓	
(E,F)	3	×	forma ciclo
(B,C)	4	×	forma ciclo
(C,E)	4	✓	
(B,D)	5	×	já é grafo
(C,D)	6	×	" "

Árvore de suporte de custo mínimo (solução ótima)



custo = 1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 12

TS = {(D,F), (A,B), (A,C), (D,E), (C,E)}

Critério de paragem

- já é grafo conexo e sem ciclos, portanto já é árvore de suporte
  ↳ terminar

1.2. Algoritmo de Prim

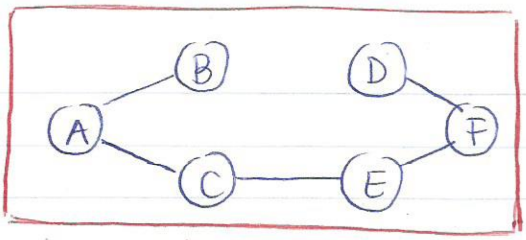
1 - escolher qualquer vértice para começar : VS = {C}

arestas	peso	
(A,C)	2	→ ligação ⊕ barata
(C,B)	4	
(C,D)	6	
(C,E)	4	

2 - desenhar C e fazer este esquema até termos tudo.

arestas	peso
(A,B)	2
(C,B)	4
(C,D)	6
(C,E)	4

→ ligação ⊕ barata



árvore de suporte de custo mínimo (solução ótima)

arestas	peso
(B,D)	5
(C,D)	6
(C,E)	4

arestas	peso
(C,D)	6
(B,D)	5
(E,D)	3
(E,F)	3

→ qqr uma

arestas	peso
(C,D)	6
(B,D)	5
(E,D)	3
(D,F)	1

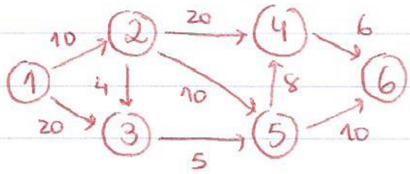
R12

2 Problema de caminho mais curto

forma ⊕ económica / rápida de ir de s a t

- minimizar distância ou custo a ir de um ponto ao outro.

⇒ Resolução ~~do problema~~ usando a formulação do problema de caminho mais curto



variáveis de decisão:

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se o arco } (i,j) \text{ estiver no caminho} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}, \forall (i,j) \in A$$

$$\min Z = 10x_{12} + 20x_{13} + 4x_{23} + 20x_{24} + 10x_{25} + 5x_{35} + 8x_{54} + 6x_{46} + 10x_{56}$$

s.a. $x_{12} + x_{13} = 1$ (sai 1 caminho do vértice 1)

$x_{46} + x_{56} = 1$ (chega 1 " ao " 6)

$x_{12} - x_{23} - x_{25} - x_{24} = 0$

$x_{13} + x_{23} - x_{35} = 0$

$x_{24} + x_{54} - x_{46} = 0$

$x_{35} + x_{25} - x_{54} - x_{56} = 0$

manutenção do fluxo ao longo do caminho - se entra um arco, este tem de sair

$x_{ij} \geq 0 \quad , \forall (i,j) \in A$

solver: solução ótima: $x_{..} = 1$ restantes $x_{ij} = 0$

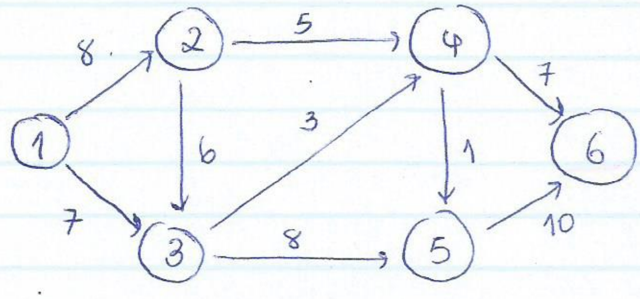
valor ótimo: $z = z$ caminho ⊕ curto: O → O → O

conclusão → a forma mais rápida/económica é fazer ... , e o custo total mínimo é ...

nº máximo de qqr coisa a realizar

3 Problema de Fluxo máximo

• qtidade máxima possível de enviar de A para B, por unidade de tempo.



variáveis de decisão

x_{ij} - quantidade de fluxo (ou produto) no arco (i,j) $\forall (i,j) \in A$

formulação em PL

$$\text{Max } Z = F$$

s.a.

$x_{12} + x_{13} = F$
$x_{46} + x_{56} = F$] o fluxo é gerado em 1 e absorvido em 6

$x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$
$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0$
$x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0$
$x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0$] conservação de fluxo ao longo do caminho - todo o fluxo que entra num vértice tem de sair de lá.

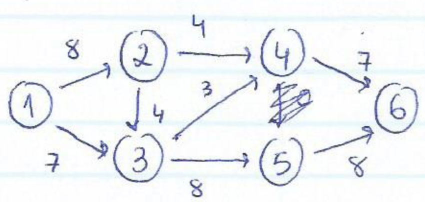
$x_{12} \leq 8$, $x_{13} \leq 7$, $x_{23} \leq 6$, $x_{24} \leq 5$, $x_{34} \leq 3$, $x_{35} \leq 8$
$x_{45} \leq 1$, $x_{46} \leq 7$, $x_{56} \leq 10$.
↳ não exceder a capacidade máxima de cada arco

$x_{ij} \geq 0$, $\forall (i,j) \in A$

solver solução ótima: $x_{12} = 8$ $x_{13} = 7$ $x_{23} = 4$ $x_{24} = 4$
$x_{34} = 3$ $x_{35} = 8$ $x_{45} = 0$ $x_{46} = 7$
$x_{56} = 8$

valor ótimo: $F = 15$ = fluxo máximo

sistema ótimo de fluxos é o seguinte:



forma mais econômica de mandar um x fluxo

4) Problema de Fluxo de Custo Mínimo

- semelhante ao fluxo ~~da~~ máximo

Função objetivo como a C+C

restrições como a do fluxo máximo
(c/ capacidades dos arcos)

Investigação Operacional

18 SET. 2014

Ana Catarina Nunes : catarina.nunes@iscte.pt
Gab D202 2^{as} e 5^{as} das 13h30 às 16h

Avaliação 25% teste intercalar
25% trabalho (1 a 5 alunos)
50% frequência
sem nota mínima

Ficha pedagógica individual e de grupo
Trazer caderno de exercícios (e-learning)

Linear	não linear
$2x_1 + 3x_2 + 4$	$2x_1 \cdot x_2 + x_3$
	$3x_1^2$
	e^x
	$\cos x$

⇒ as restrições incluem sempre a igualdade.

Exercício PL 1

① variáveis de decisão   aquilo que eu gostaria de saber

x_A - quantidade, em ton, a encomendar da fábrica A
x_B - " " " " B

② Formulação em PL

$\text{Max } Z = 4x_A + 3{,}5x_B$ (lucro em milhares de Euros)

s.a.

$x_A \leq 3$ (limite fornecido por A)

$x_A + x_B \leq 5$ (qtidade máxima a obter)

$x_A, x_B \geq 0$ (encomendar qtidades não-negativas)

Exercício PL 5

① variáveis de decisão

- custo de utilização das máquinas já é dado.
- não sabemos o nº de horas que precisamos de cada máquina - mas sabemos que a máquina C é usada em ambas as formas.
  ↳ o nº de horas depende da quantidade produzida em cada forma. Se a souber descubro o nº de horas.

x_i - quantidade em kg, a produzir semanalmente usando a forma de produção i, $i = 1$ (1ª forma), 2 (2ª forma)

② Formulação em PL

$$\min \text{ Custo} = \underbrace{10 \times \frac{15}{60} x_1 + 18 \times \frac{12}{60} x_2 + 12 \times \frac{10}{60} x_1 + 12 \times \frac{8}{60} x_2}_{\text{custo de utilização das máquinas}} + \underbrace{0{,}6 \times 3x_1 + 0{,}6 \times 2{,}5x_2 + 0{,}5(4x_1 + 5x_2)}_{\text{custo de aquisição das MP}}$$

s.a.

↱ converter minutos em horas

$\frac{15}{60} x_1 \leq 450$ (horas) (maq A)
$\frac{12}{60} x_2 \leq 400$ (maq B)
$\frac{10}{60} x_1 + \frac{8}{60} x_2 \leq 500$ (maq C)

→ não exceder as horas disponíveis

$3x_1 \leq 5550$ (MP1)
$2{,}5 x_2 \leq 3500$ (MP2)
$4x_1 + 5x_2 \leq 13\,500$ (MP3)

→ não exceder quantidade disponível de cada MP

$x_1 + x_2 \geq 3000$ quantidade mínima a produzir
$x_1, x_2 \geq 0$ produzir quantidades não negativas

22. set. 2014

PL 8

início 1º mês: 1000 m

	m1	m2	m3
Procura	10.000	12 000	8.000
Capacidade	12.000	10.000	11 000

lucro: 500 u.m/m
custo armaz.: 75 u.m/mês/m

Variáveis de decisão:

x_i - qtidade de corda, em metros, a produzir no início do mês i, $i = 1,2,3$

Formulação em PL: ↑ vendemos tudo o q produzimos ⊕ stock inicial

max lucro total

$$\max \text{ lucro} = 500\,(x_1 + x_2 + x_3 + 1000) \rightarrow \text{lucro c/ venda}$$

ou $(10000 + 12000 + 8000)$
pq sabemos q a procura ⊜ vendas

custos de armazenamento ←

$$-75\left[(1000 + x_1 - 10{,}000) + (1000 + x_1 - 10000 + x_2 - 12000) + 0\right]$$

↓ qtidade armazenada do 1º p/ 2º mês

s.a

(mês 1) $x_1 \leq 12000$
(m2) $x_2 \leq 10.000$
(m3) $x_3 \leq 11.000$
→ não ultrapassar capacidade produtiva em cada mês

(m1) inv ini? ← $1000 + x_1 \geq 10.000$
(m2) $\underbrace{(1000 + x_1 - 10.000)}_{\text{vendido em mês 1}} + x_2 \geq 12000$
(m3) $(1000 + x_1 - 10.000) + (x_2 - 12.000) + x_3 = 8000$
→ garantir a procura em cada mês

↳ garantir stock nulo no final do 3º mês

$x_1, x_2 \geq 0$ → produzir quantidades não negativas

⇓ Isto é um Planeamento Sequencial de Produção a 3 meses.

PL 13 → Planeamento sequencial de produção a 3 meses

variáveis de decisão

x_{ij} - quantidade de parafusos, em kg, a produzir no mês início do mês i, para vender no mês j

$i, j = 1,2,3$ com $i \leq j$

⇓

ou $i = 1$, $j = 1,2,3$
$i = 2$, $j = 2,3$
$i = 3$, $j = 3$

• procura min: 12000
" max: 15000

Formulação em PL

Max Lucro =

Restrições

s.a. $\begin{cases} x_{11} \geq 12.000 \\ x_{11} \leq 15.000 \end{cases}$ (m1)

$\begin{cases} x_{12} + x_{22} \geq 12000 \\ x_{12} + x_{22} \leq 15000 \end{cases}$ (m2)

$\begin{cases} x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 12000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 15000 \end{cases}$ (m3)

→ garantir a procura mínima e máxima em cada mês

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 20.000$ (m1)
$x_{22} + x_{23} \leq 11.000$ (m2)
$x_{33} \leq 15000$ (m3)

→ não exceder a capacidade produtiva em cada mês

nota: o stock nulo no final do 3º mês está implicitamente garantido pela definição de variáveis.

$x_{ij} \geq 0$, $i, j = 1,2,3$, $i \leq j$ → qtidades produzidas não negativas

Formulação em PL

$$\begin{aligned} \max \text{ lucro} = &\ 5(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{22} + x_{23} + x_{33}) \\ &- [1.(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 1,5(x_{22} + x_{23}) + 2x_{33}] \\ &- [0,25(x_{12} + x_{23}) + 2 \times 0,25(x_{13})] \end{aligned}$$

→ receita c/a venda
→ custo de produção
→ custo de armazenagem
↓ 2 meses armazenado

mesmo problema, outra formulação...

x_i - qtidade produzida, em kg, no mês i, $i = 1,2,3$
y_i - qtidade vendida, em kg, no mês i, $i = 1,2,3$

TPC

* variáveis do tipo x_{ij}:
  - quando a "procura ... não é fixa/exata
  - o produto não é eternamente consumível)

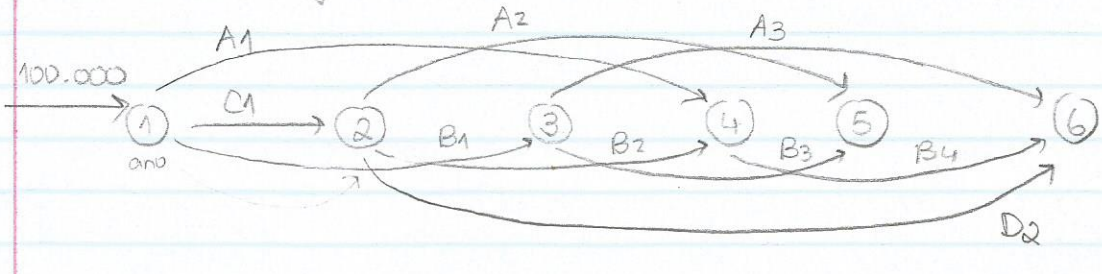
Exercícios até ao 16

24. SET. 2014

PL 9

variáveis de decisão

x_{ij} – capital, em euros, a investir na aplicação i, no início do ano j. $i = A$, $j = 1,2,3$; $i = B$, $j = 1,2,3,4$; $i = C$, $j = 1$; $i = D$, $j = 2$



Formulação em PL

$$\max Z = 100.000 + 0{,}09(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3}) + 0{,}08(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) + 0{,}05(x_{C1}) + 0{,}18\, x_{D2}$$ → maximizar capital acumulado

s.a. $x_{D2} \le 60.000$ (limite de investimento em D)

(início do 1º ano) $x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \le 100.000$ (ñ exceder capital disp no início de cada ano)

(início 2º ano) $x_{A2} + x_{B2} + x_{D2} \le 100000 - x_{A1} - x_{B1} - x_{C1} + 1{,}05\, x_{C1}$

(início 3º ano) $x_{A3} + x_{B3} \le 100.000 \left(- x_{A1} - x_{B1} - x_{C1} + 1{,}05 - x_{A2} - x_{B2} - x_{D2}\right) + 1{,}08\, x_{B1}$

(início 4º ano) $x_{B4} \le \underline{100.000 - x_{A1} - x_{B1} - x_{C1} + 1{,}05 - x_{A2} - x_{B2} - x_{D2} + 1{,}08\, x_{B1} - x_{A3} - x_{B3}}_{\text{investido}} + \underline{1{,}09\, x_{A1} + 1{,}08\, x_{B2}}_{\text{recuperado}}$

(início 5º ano) não há restrição

$x_{ij} \ge 0$, $i = A$ $j = 1,2,3$; $i = B$ $j = 1,2,3,4$; $i = C$ $j = 1$
$i = D$ $j = 2$ (investir quantias não negativas)

PL 14 "Problema de dietas ou de misturas"

A → $\geq 0{,}7\ Q_1$; $\leq 0{,}3\ Q_2$

B → $\leq 0{,}4\ Q_1$; $\geq 0{,}6\ Q_2$

$Q_1 \leq 45$ litros a 6 u.m / litro
$Q_2 \leq 40$ " a 4 um / litro
$A \leq 40$ " a 6 u.m
$B \leq 30$ " a 5 um

variáveis de decisão

x_{ij} - quantidade, em litros, utilizada de químico i, no produto j
$i = 1, 2 \qquad j = A, B$

Formulação em PL

$$\max \text{ lucro} = \overbrace{6(x_{1A} + x_{2A}) + 5(x_{1B} + x_{2B})}^{\text{receita}} - \Big[\underbrace{\overbrace{6x_{1A} + 4x_{2A}}^{\text{qtidade Qi no prod A} \times \text{custo}} + 6x_{1B}}_{\text{custo aq. dos químicos}} + 4x_{2B}\Big]$$

↓ maximizar o lucro

s.a.

(Q1) $x_{1A} + x_{1B} \leq 45$ (não exceder qtidade max disp, em litros, do Q1)
(Q2) $x_{2A} + x_{2B} \leq 40$ (do Q2)
(A) $x_{1A} + x_{2A} \leq 40$ } não ultrapassar qtidade máxima a vender, de cada produto
(B) $x_{1B} + x_{2B} \leq 30$

$x_{1A} \geq 0{,}7\,(\underbrace{x_{1A} + x_{2A}}_{\text{qtidade de produto A}})$ } garantir a composição p/ cada produto
$x_{2B} \geq 0{,}6\,(x_{1B} + x_{2B})$

$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2 \quad j = A, B$ qtidades não negativas

PL 15 Planeamento de Produção

variáveis de decisão

x_i - qtidade a produzir mensalmente, em ton, do produto i, $i = 1(\text{I}), 2(\text{II}), 3(\text{III})$

Formulação em PL

max $Z =$

s.a.

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4000$
$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 6000$
} não exceder a qtidade disponível do cada material

$x_1 \geq 200$
$x_2 \geq 200$
$x_3 \geq 150$
} procura mínima de cada produto

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1500$ (capacidade produtiva da fábrica)

$\Downarrow$ capacidade e tempo

$\boxed{x_1 \leq 1500}$ → assumindo que só produz prod 1

ou $x_2 \leq 3000 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2}x_2 \leq 1500}$ → " " 2

ou $x_3 \leq 4500 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{3}x_3 \leq 1500}$ → " " 3

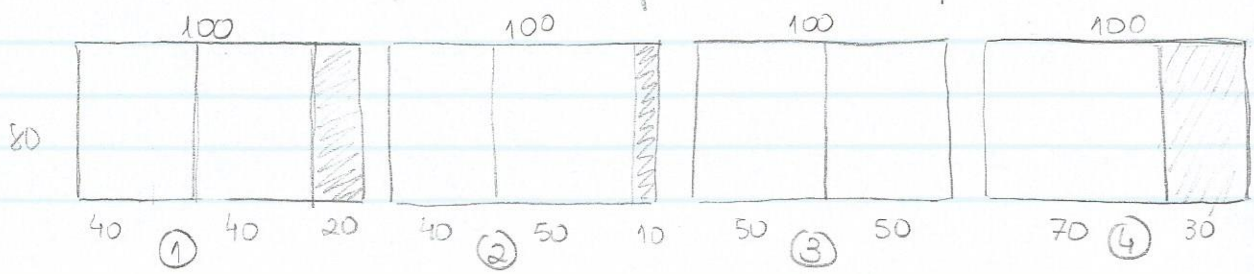
25. SET. 2014

PL 20 Problema do Trim-Loss ou de minimização de desperdícios

encomenda: possui? 80 x 40

medidas	nº	tipos de corte 1	2	3	4
80 x 40	50	2	1	0	0
80 x 70	40	0	0	0	1
80 x 50	60	0	1	2	0

1º determinar todos os tipos de corte possíveis



2º variáveis de decisão : (neste tipo de problema são sempre as mesmas)

x_i - nº de peças de vidro com, 80 × 100, a cortar segundo o corte de tipo i, $i = 1, 2, 3, 4$

3º Formulação em PL Inteira

↱ desperdício de 20 p/ cada peça cortada c/ corte tipo 1

$\min Z = 20x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 30x_4$

$+ (2x_1 + x_2 - 50) + (x_4 - 40) + (x_2 + 2x_3 - 60)$ ⇒ só se considera se o produzido a mais for desperdício e ñ inventário

(minimizar o desperdício)

s.a. ↱ se puséssemos igualdade arriscávamos ñ haver solução possível

$2x_1 + x_2 \geq 50$
$x_4 \geq 40$
$x_2 + 2x_3 \geq 60$

→ garantir a qtidade encomendada de cada medida

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ e inteiras → qtidades não negativas e inteiras

PL 24 Problema de Knap-Sack ou de Saco Mochila

montante disponível: 14×10^3 u.m

- tem de investir pela totalidade
- só pode investir uma vez em cada

→ PLI

variáveis de decisão

↱ binária

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se realizarmos o investimento do tipo } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3, 4$

Formulação em PLI Binária

$\max NPV = (16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4) \times 10^3$

↓ maximizar o NPV

s.a.

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$ (não exceder o montante)

$x_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2,3,4$

PL 29 Planeamento sequencial de Produção c/ custos fixos de instalação (custos de setup)

Equipamento : custo = € 60 /mês

cap = 100 ton

custos arm = €1/ton/mês

<u>variáveis de decisão</u>

x_i - qtidade, em toneladas, a produzir no mês i, $i = 1, \dots, 6$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se for instalado o equipamento no mês } i \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, 6$

<u>formulação em PLI Binária mista</u>

$$\min \text{ custo} = \underbrace{60(\overbrace{y_1 + y_2 + \dots + y_6}^{\sum_{i=1}^{6} y_i})}_{\text{custos c/ instalação de eq}} + \overbrace{(x_1 - 55) + (x_1 - 55 + x_2 - 40) + (x_1 - 55 + x_2 - 40 + x_3 - 58)}^{\text{custos de armazenamento}}$$

$$+ (x_1 - 55 + x_2 - 40 + x_3 - 58 + x_4 - 20) + (\dots)$$

s.a.

$x_i \leq 100 y_i$, $i = 1, \dots, 6$ → garante q só se pode produzir caso seja instalado equipamento e que não se excede a capacidade.

↳ se $y_i = 1$ podemos produzir, se $y_i = 0$ ñ podemos

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \geq 55 \\ x_1 - 55 + x_2 \geq 40 \\ x_1 - 55 + x_2 - 40 + x_3 \geq 58 \\ x_1 - 55 + x_2 - 40 + x_3 - 58 + x_4 \geq 20 \\ x_1 - 55 + x_2 - 40 + x_3 - 58 + x_4 - 20 + x_5 \geq 20 \\ x_1 - 55 + x_2 - 40 + x_3 - 58 + x_4 - 20 + x_5 - 20 + x_6 \geq 60 \end{array}\right] \text{ garantir a procura em cada mês}$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 6$ → qtidades não negativas

$y_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots, 6$

29. SET. 2014

$\boxed{PL\ 47}$ relativo a PL 46 a)

Planeamento de Produção

$\max Z = 4x_1 + 3x_2$ → maximizar o lucro

s.a. $x_1 + 2x_2 \leq 8$ → disponibilidade de MP1

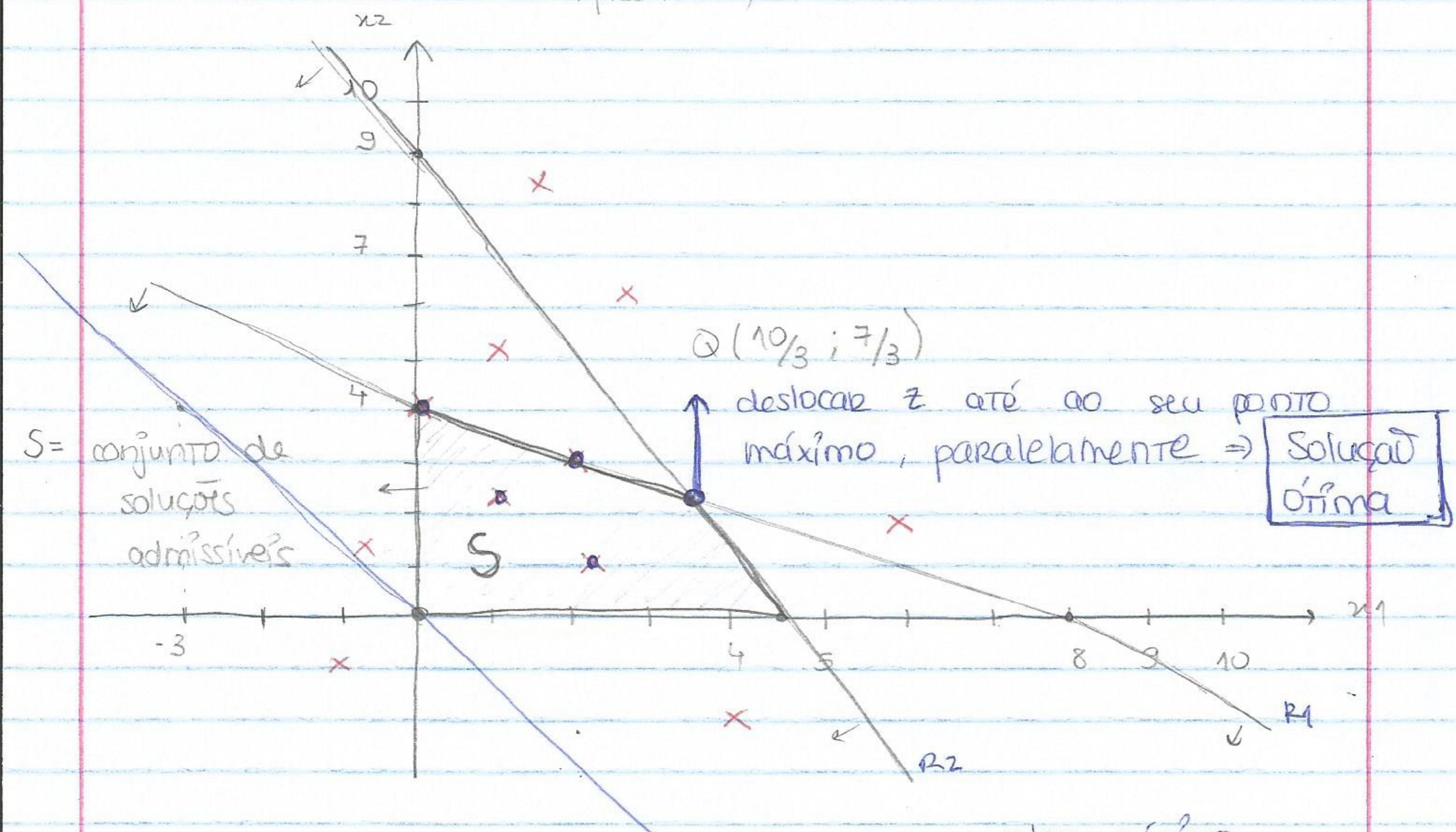
$2x_1 + x_2 \leq 9$ → " de MP2

$x_1, x_2 \geq 0$

↳ $m = 2$ restrições (técnicas) $n = 2$ variáveis {

x_i → nível de produção do produto i, $i = 1,2$

resolução gráfica: (nunca vamos avaliar isto, mas ajuda a compreensão)



$Z = 0$ → toma o valor mínimo

(R_1 : $x_1 + 2x_2 = 8$) ⇒ (0,4) (8,0) atribuir 0 a uma p/ descobrir a outra

(R_2 : $2x_1 + x_2 = 9$) ⇒ ($\frac{9}{2}$, 0) , (0,9)

f.o : $Z = 4x_1 + 3x_2$

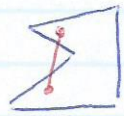
$Z = 0$; (0,0) (-3,4)

ver Folhas de Apoio : secção 4-9

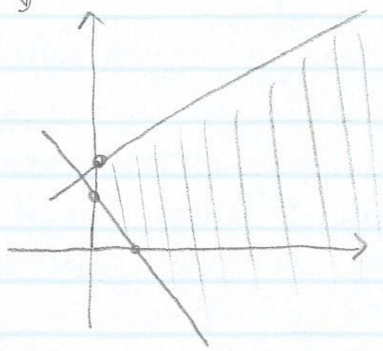
- solução possível : qqr ponto em $\mathbb{R}^2$, neste caso (x)
- " admissível : as que respeitam o modelo admissível (dentro das restrições (o)

⇓

pode ser : conjunto convexo   conjunto não convexo



aberto ou fechado
mas tem nº finito de extremos (mesmo que o conjunto ñ seja finito) fechado



conjunto infinito ou aberto com nº finito de pts extremos (3)

ou ponto ótimo Q = $\begin{cases} R1 \\ R2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10/3 \\ x_2 = 7/3 \end{cases}$

$z = 4 \times \frac{10}{3} + 3 \times \frac{3}{7} = \frac{61}{3}$ (valor ótimo)

⇓

Análise da solução (contextualizá-la)

solução óptima : $x_1 = 10/3$ → produzir 10/3 do produto 1
$x_2 = 7/3$ → " 7/3 do " 2

valor ótimo : lucro ótimo = 61/3

Análise das restrições

o ponto ótimo está sobre as restrições : logo neste caso não houve sobra de MP.

- R1 e R2 definem o ponto ótimo → são restrições ativas)

Logo, a MP1 e MP2 estão a ser usadas na sua totalidade.

No solver não temos gráfico...
como saber se há igualdade ou não?

$\max\ z = 4x_1 + 3x_2$

$\Rightarrow$ substituindo nas equações $(x_1 = \frac{10}{3}\ ;\ x_2 = \frac{7}{3}) \Rightarrow s_1 = s_2 = 0$

s.a. $x_1 + 2x_2 + s_1 = 8$

$2x_1 + x_2 + s_2 = 9$

$x_1, x_2 \geq 0$ ↳ variáveis de folga: associadas a R de $\leq$

$s_1, s_2 \geq 0$

$\Downarrow$

$m = 2$ restrições (técnicas)

$m + n = 4$ variáveis

mt importante

- um problema tem que ter sempre $\underline{m}$ variáveis básicas
- as variáveis básicas são as únicas que podem ter valores $\neq 0$ (mas podem ser nulas, tomar o valor zero)
- as variáveis ~~não básicas~~ restantes são não-básicas e são <u>sempre</u> nulas.

$\Rightarrow$ soluções básicas: tantas variáveis básicas quanto o n° de restrições

$\Rightarrow$ solução básica admissível: é uma solução básica em que todas as variáveis têm valores ≥ 0.

ponto extremo ótimo $(x_1, x_2) = (10/3\ ;\ 7/3)$

$\Downarrow$

SBA ótima: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (\underbrace{10/7\ ;\ 7/3}_{\text{var. básicas}}\ ;\ \underbrace{0\ ;\ 0}_{\text{var. } \bar{n} \text{ básicas}})$

$\boxed{\text{PL 47}}$

e) coef de x_1 na f.o aumentou p/ 5.

solução ótima?
valor ótimo?

$c_1 = 4$ (valor original $\rightarrow z = 4x_1 + 3x_2$)
novo valor $c_1^N = 5 \rightarrow$ nova f.o $= 5x_1 + 3x_2$
↓
altera-se o declive da F.O.

• o conjunto de soluções admissíveis ñ se altera pq não mexemos nas restrições

A solução ótima continua a ser o ponto $Q\left(\frac{10}{3};\frac{7}{3}\right)$
↳ nesta fase ainda só interessa ver isto no gráfico só a seguir (análise de sensibilidade é que vamos prová-lo)

Novo valor ótimo: Z = lucro ótimo $= 5\times\frac{10}{3} + 3\times\frac{7}{3} = \frac{71}{3}$

conclusão:
A solução ótima mantém-se (x_1, x_2) e consequentemente a base ótima também, ou seja continuamos a produzir os mesmos produtos e nas mesmas quantidades:

$x_1 = \frac{10}{3}$ de prod 1
$x_2 = \frac{7}{3}$ de prod 2

f) coef. de x_1 na f.o. aumentou para 7.
solução óptima? valor ótimo? comentar.

$c_1^N = 7 \Rightarrow Z = 7x_1 + 3x_2$

Observando a representação gráfica, vemos que o ponto ótimo passa a ser o ponto $(9/2 ; 0)$

substituindo nas equações

$$\Rightarrow \text{Nova Solução ótima: } \begin{cases} x_1 = 9/2 \rightarrow s_1 = 7/2 \\ x_2 = 0 \quad\quad s_2 = 0 \end{cases}$$

não básicas (x_2, s_2)

Novo pt óptimo: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = \left(\frac{9}{2}, 0, \frac{7}{2}, 0\right)$

variáveis básicas (x_1, s_1)

novo valor ótimo: $Z = 7\times\frac{9}{2} + 3\times 0 = \frac{63}{2}$ //

Comentário:

A base ótima mudou e consequentemente a solução ótima também se altera. Deixou de se produzir o produto 2 e passou a sobrar $7/2$ de MP1. (s_1)
(Produzir $9/2$ de produto 1 e não produzir produto 2.)
MP2 continua a ser usada na totalidade.

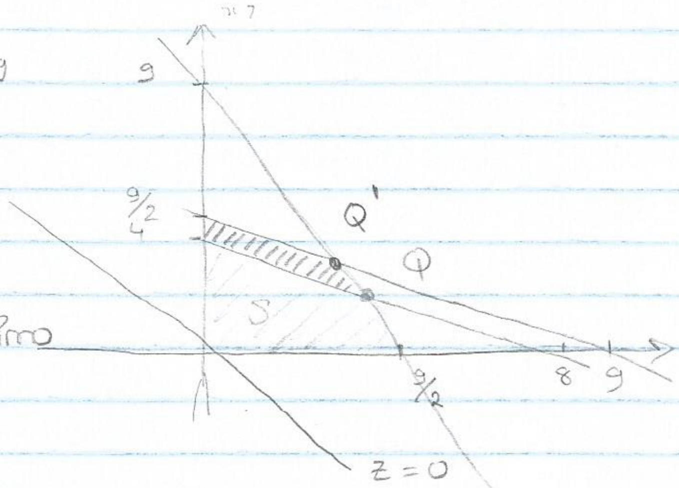
1. OUT. 2014

PL 47 (continuação)

a) Termo independente da 1ª restrição alterado para 9.

$b_1^N = 9 \Rightarrow R_1: x_1 + 2x_2 \leq 9$

(ver o efeito no gráfico)



Restrições ativas mantêm-se
↳ cuja interseção é o ponto ótimo

→ logo a base mantém-se

Novo solução ótima $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow s_1 = 0 \\ x_2 = 3 \rightarrow s_2 = 0 \end{cases}$

Novo ponto ótimo $\Rightarrow (x_1, x_2, s_1, s_2) = (3, 3, 0, 0)$

Novo valor ótimo $\Rightarrow 4 \times 3 + 3 \times 3 = 21$

→ Altera-se a região admissível
→ A F.O não se altera

O ponto ótimo continua a ser definido pelas restrições R1 e R2, ou seja, continuam a ser restrições ativas, ou seja a base ótima mantém-se e portanto, x_1 e x_2 continuam a ser as variáveis básicas. No entanto os valores de x_1 e x_2 alteram-se.

As variáveis não-básicas continuam a ser s_1 e s_2 porque os seus valores continuam a ser 0.

→ A solução ótima alterou-se, e com isso o valor ótimo.

b) $b_1^N = 10 \Rightarrow R1: x_1 + 2x_2 \leq 10$

→ R1 desloca-se para cima mais um pouco.
→ restrições ativas mantêm-se, e por isso a base ótima também
→ a solução ótima altera-se.

nova solução ótima: $V\left(\frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right) \Rightarrow x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{11}{3}; (s_1 = 0; s_2 = 0)$

[para calcular s_1 e s_2 nem precisa de substituir nas restrições os valores pq a solução ótima está na interseção das restrições → não ia sobrar nada]

novo valor ótimo: $z = 4 \times \frac{8}{3} + 3 \times \frac{11}{3} = \frac{65}{3}$

c) Em a): incremento em b_1: $9 - 8 = 1$
variação no v.o.: $21 - \frac{61}{3} = \frac{2}{3}$
⇓
por cada unidade incrementada em b_1 temos uma variação no valor ótimo de $2/3$.

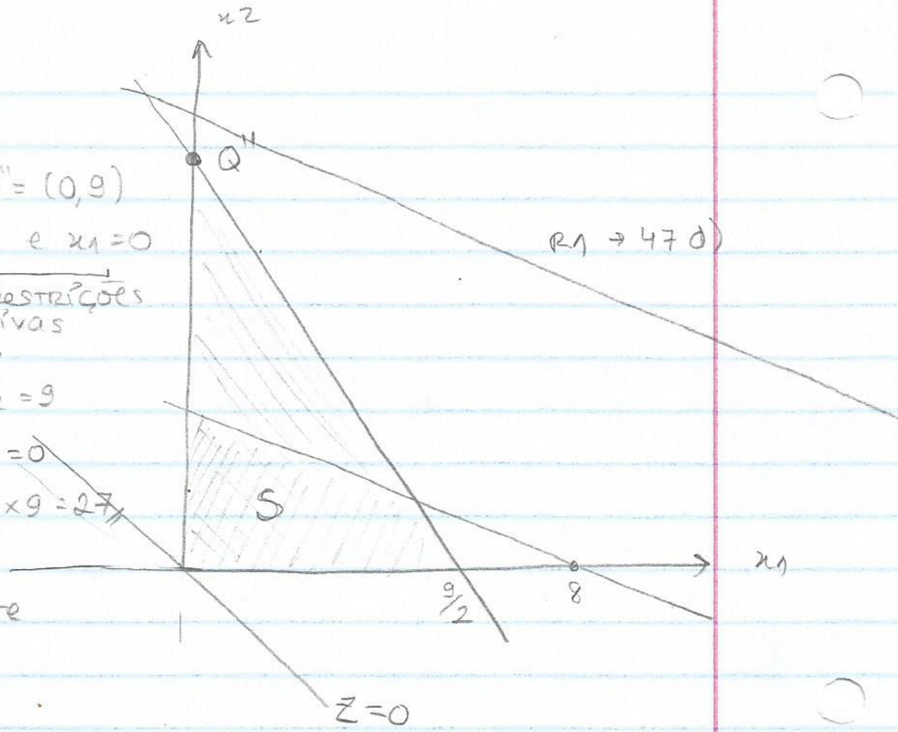
Em b): incremento em b_1: $10 - 8 = 2$
variação no v.o: $\frac{65}{3} - \frac{61}{3} = \frac{4}{3}$
⇓
mesma variação por unidade incrementada.

→ só quando a base mudar é que isto deixa de ser válido.

<u>conclusão</u>: a $\underbrace{\text{variação unitária}}_{\Delta \text{ por un. incrementada}}$ mantém-se

Δ por un. incrementada chama-se preço sombra.

d) $b_1^N = 20$



O ponto ótimo passa a ser $Q'' = (0,9)$
e passou a ser definido por $\underbrace{R1 \text{ e } x_1 = 0}_{\text{novas restrições ativas}}$

ou seja, a base ótima alterou-se.

nova solução ótima: $x_1 = 0$, $x_2 = 9$

$s_1 = 2$, $s_2 = 0$

novo lucro ótimo: $z = 4 \times 0 + 3 \times 9 = 27$

Incremento no termo independente

×

Δ por unidade incrementada
$= 12 \times \frac{2}{3} = 8$ → pela conclusão da alínea anterior

$\boxed{\Delta \text{ valor ótimo (nesta alínea)}: 27 - \frac{61}{3} = \frac{20}{3}}$ → verdadeira Δ

Logo a conclusão de c) deixou de ser válida porque a base ótima se alterou

2. OUT. 2014

Casos especiais de soluções (secção 6 folhas de apoio)

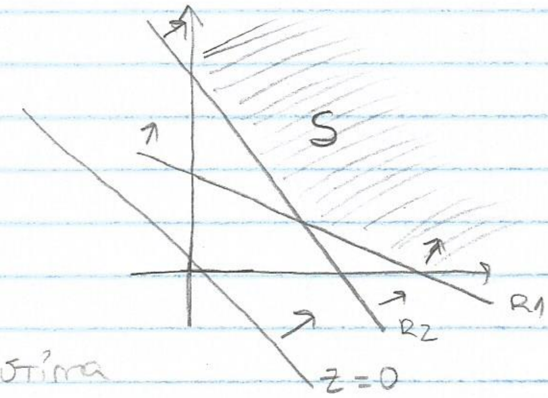
① Solução ótima ilimitada

max $Z = 4x_1 + 3x_2$

s.a. $x_1 + 2x_2 \geq 8$

$2x_1 + x_1 \geq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$



- como é máximo, a solução ótima é ilimitada
- se a F.O fosse min, a solução ótima seria limitada, apesar da região admissível ser ilimitada!

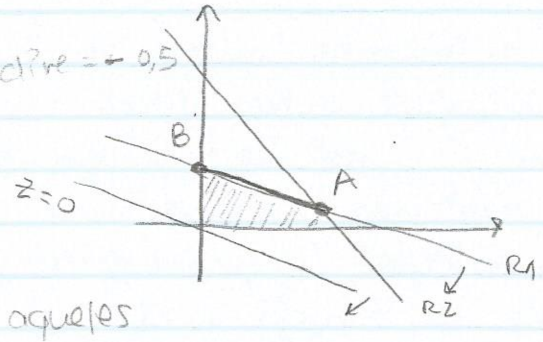
② soluções ótimas alternativas (múltiplas)

$\max Z = 1,5x_1 + 3x_2$ ↗ declive = −0,5

s.a. $x_1 + 2x_2 \leq 8$ ↗ declive = −0,5

$2x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$



• solução ótima são todos aqueles pontos. F.O. e R1 têm o mesmo declive então coincidem.

soluções básicas ótimas : $A = (10/3 ; 7/3)$

$B = (0, 4)$

Todas as soluções correspondentes ao segmento de reta [AB] são ótimas.

valor ótimo : $Z = 1,5 \times \frac{10}{3} + 3 \times \frac{7}{3} = 1,5 \times 0 + 3 \times 4 = 12$

③ Problema impossível

PL 47 g) c: $x_2 \geq 5$

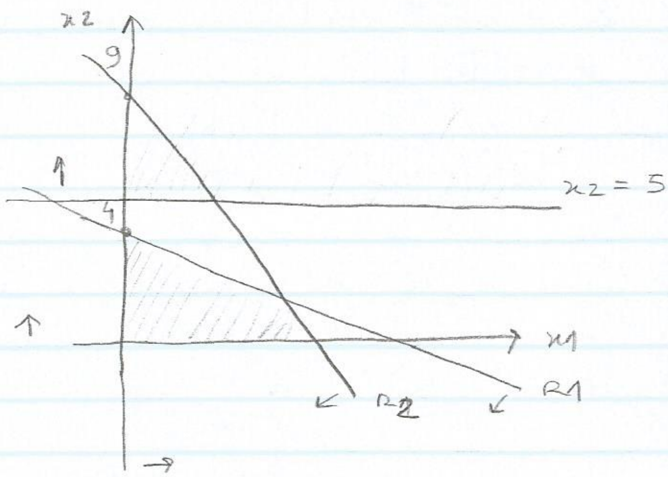
$\max Z = 4x_1 + 3x_2$

s.a. $x_1 + 2x_2 \leq 8$

$2x_1 + x_2 \leq 9$

$x_2 \geq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

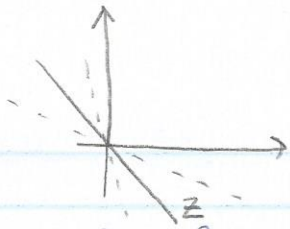


$S = \emptyset$, a região admissível é vazia, logo não existem soluções admissíveis e diz-se que o problema é impossível.

→ próxima aula : PC com Solver

Análise de sensibilidade

→ Alteração de c_j (coeficiente da variável x_j na f.o)



· Intervalo de sensibilidade de c_j:

$IS c_j$ é o intervalo dentro do qual a solução ótima se mantém, ou seja, a base ótima (variáveis básicas) mantém-se e os valores das variáveis também se mantém.

[i.e., continuam a produzir-se os mesmos produtos e nas mesmas quantidades. O valor ótimo pode alterar-se:

$\Delta z = (c_j^N - c_j) \times x_j$]

→ Alteração de b_i (termo independente da restrição i)

· Intervalo de sensibilidade de b_i:

$IS b_i$ é o intervalo dentro do qual a base ótima se mantém, ou seja, as variáveis básicas (e as restrições ativas) continuam a ser as mesmas, embora os valores das variáveis passam alterar-se.

[i.e., continuam a produzir-se os mesmos produtos, embora as quantidades possam alterar-se. Em geral o valor ótimo altera-se:

$\Delta z = (b_i^N - b_i) \times y_i$, onde y_i é o preço sombra da restrição i.]

nota: os intervalos de sensibilidade só são válidos se o parâmetro em causa for o único a sofrer alterações, isto é, se todos ~~se~~ mantiverem iguais aos valores originais.

- se 1 alterar: temos mesmo de analisar o IS para tirar conclusões
- se + que 1 alterar: análise e resultados do IS não são fiáveis, nem vale a pena olhar.

Preço Sombra

O preço sombra da restrição i = y_i = valor ótimo da variável dual associada à restrição i.

Dá a alteração ao valor ótimo da função objetivo por cada unidade adicional no termo independente b_i da restrição i.

nota 1: o preço sombra é válido desde que o novo valor de b_i esteja no intervalo de sensibilidade de b_i (i.e, se $b_i^N \in IS_{b_i}$)

nota 2: assume-se que o custo de cada unidade é igual ao custo de cada uma das b_i unidades anteriores; caso contrário será necessário fazer uma correção ao valor y_i, de modo a obter o verdadeiro impacto no valor da f.o.

PL 54 aparece sempre nas provas

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 12x_2 + 16x_3$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \overset{+s_1}{\le} 4000 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \overset{+s_2}{\le} 3000 \\ x_3 \overset{+s_3}{\le} 1000 \\ x_2 \overset{-t_4}{\ge} 200 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \\ s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0 \end{aligned}$$

a) O plano ótimo de produção, com o qual obteremos o lucro máximo de 20 400 u.m ($z = 20\,400$) consiste em produzir 200 unidades do prod 1, 200 do prod. 2 e 1000 de prod. 3 ($x_1 = 200$; $x_2 = 200$; $x_3 = 1000$.

análise das restrições (contextualizar os desvios nas restrições)

$\underbrace{\underbrace{s_1, s_2, s_3}_{\text{de folga}}, t_4}_{\text{variáveis de desvio}}$ — t_4 de excesso

A matéria-prima 1 está a ser usada na sua totalidade (s_1 = RHS − Final Value = 0)
Sobram 400 unidades da MP2 ($s_2 = 3000 - 2600$)

É produzida a quantidade máxima permitida do produto 3, assumida no contrato com clientes ($s_3 = 1000 - 1000 = 0$)
Está a ser produzida a qtidade mínima exigida do produto 2, assumida no 2° contrato com clientes (t_4 = Final value − RHS = 0)

b) custo de produção de P3 diminui?
como a F.O representa o lucro,
1 u.m. $\Rightarrow$ $c_3^N = 16 + 1 = 17$ $\rightarrow$ custo $\downarrow$, lucro $\uparrow$

Temos de ver o intervalo de sensibilidade, para ver se afeta a base ótima e solução ótima.

$c_3^N = 17 \Rightarrow IS_{c_3} = [16 - 1 ; 16 + \infty[= [15 ; +\infty[$

Logo, a base ótima e solução ótima mantêm-se, ou seja continuam a produzir-se os mm produtos e quantidades.
O lucro ótimo terá uma variação:
$\Delta z = (c_3^N - c_3) \times x_3 = (17 - 16) \times 1000 = 1000$
O lucro vai aumentar em 1000 u.m

c) $c_1^N = 10 - 3 = 7$ $\rightarrow$ custo de produção aumenta 3 u.m
lucro diminui 3 u.m

$IS_{c_1} = [10 - 2 ; 10 + 0{,}67] = [8 ; 10{,}67]$

O novo valor está fora do IS, logo a base ótima e solução ótima alteram-se e será necessário reotimizar a nova solução ótima e o novo lucro ótimo.
$\downarrow$
usando o solver, por exemplo

alínea extra: a empresa poderá adquirir mais 500 unidades de MP1, Quais as consequências

MP1 $\Rightarrow$ R1. $b_1^N = 4000 + 500 = 4500$

$IS_{b_1} = [4000 - 400 ; 4000 + 800] = [3600 ; 4800]$

$b_1^N \in IS_{b_1}$ A base ótima mantém-se e o preço sombra $y_1 = 5$ é válido. Ou seja, continuam a produzir-se os mesmos produtos embora as quantidades devem alterar-se.
(no PC - trabalho: colocar novo valor e calcular valores alterados)
O lucro ótimo terá uma alteração de $\Delta z = (b_1^N - b_1) \times y_1$
$= (4500 - 4000) \times 5 = 2500$

Isto é, o lucro ótimo aumenta 2500 u.m, o que é vantajoso para a empresa.

f) MP1 : custo unitário = 0,5 u.m
500 unidades adicionais = 2,5 u.m cada.

em h vimos que se o custo não fosse alterado, a aquisição seria vantajosa.

$b_1^N = 4500 \in IS_{b_1} = [3600 ; 4800]$

Logo, a base mantém-se ótima e o preço sombra $y_1 = 5$ é válido..

quanto eu vou lucrar a mais com aumento de MP1

O lucro ótimo terá uma variação de:

$$\Delta z = [b_1^N - b_1] \times [y_1 - (\text{novo preço} - \text{preço antigo})]$$

$$= 500 \times [5 - (2,5 - 0,5)] = 1500 > 0$$

conclusão:

O lucro ótimo aumenta logo é vantajosa a aquisição.

g) $\left.\begin{array}{l} b_1^N = 3700 \\ b_3^N = 1100 \end{array}\right] \to$ consequências?

A análise de sensibilidade só é válida se só se alterar um parâmetro do modelo de cada vez → neste caso não podemos usar

Por isso é necessário reotimizar para determinar as consequências da alteração proposta.

e) $b_1^N = 4000 + 1000 = 5000 \notin IS = [3600 ; 4800]$

Logo a base ótima altera-se e será necessário reotimizar (usando o solver por exemplo)

Solver

(1) Instalar o Solver

- File → Options → Add-ins : ativar Solver.
- Menu Data : já aparece o Solver

(2) Escrever info no Excel

célula obrigatória : escrever fórmula

célula obrigatória

			C	D	E	F	G	H
2			x_1	x_2	x_3	Lado Esq. rest	tipo rest	termos indep.
3		Var						
4	Max	F.O.	10	12	16	sum product (C4:E4;C$3;E$3)		
5								
6	Restrições	MP1	2	3	3	= C6 × C3 + D6 × D3 + E6 × E3	<=	4000
7		MP2	1	2	2	= sumproduct((C7:E7 ; C$3; E$3)	<=	3000
8		CC1			1		<=	1000
9		CC2		1			>=	200

—//

(3) Chamar o Solver

- Data → Solver

Definir objetivo : célula onde está a fórmula da FO (F$0)
Para Máximo
Alterando células de variáveis : C3 : E3
Sujeito às restrições : → Adicionar
- referência : carregar na célula que tem a fórmula da R1
- restrição : célula termo independente

ou

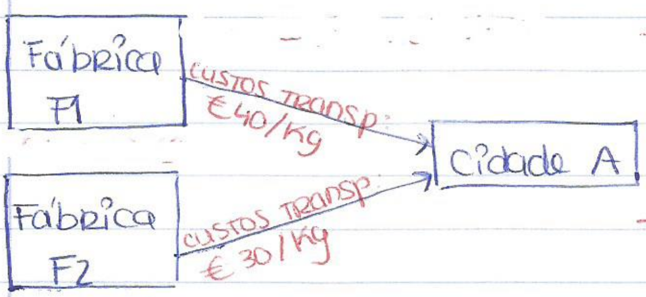
inserir todas as do mesmo tipo ao mesmo tempo
- ref : selecionar células
- restrição : " "

Marcar "tornar não negativas ..." pq todas são ≥ 0
método de resolução : LP Simplex
⇓ Resolver : palpite → encontrou S.O finita
- manter valores e escolher 2 primeiros relatórios
- novas folhas criam-se

↓ se não fossem, desmarcávamos e adicionavas à mão $x_1 \geq 0$, $x_2 < 0$ (...)

8. OUT. 2014

Caso de estudo



→ custo armaz.: € 30/Kg/mês
deteoração: 20%/mês
40 empregados/mês
produção 2Kg/emp/mês

→ custo armaz: € 10/Kg/mês
deteoração: 40%/mês
40 empregados/mês
produção 2Kg/emp/mês

	Procura		
mês	min	adic.	Preço venda/Kg
1	100	50	€ 1000
2	120	70	€ 1500
3	140	50	€ 1300

Q1 a) variáveis de decisão

a procura não é fixa por isso precisamos de 2 índices (p/ mês de produção e p/ mês de venda)
+ índice da fábrica

x_{ijk} - quantidade, em kg, de produto produzido na fábrica i durante o mês j, para satisfazer a procura durante o mês k, $i = \{A(F_1), B(F_2)$, $j, k = 1, 2, 3$, $j \leq k$

Formulação em PL

F.O max lucro = receitas - custos armaz/ - custos de transporte

onde: receitas $= 1000(x_{A11} + x_{B11}) + 1500(0{,}8\, x_{A12} + 0{,}6\, x_{B12} + x_{A22} + x_{B22}) + 1300(0{,}8^2 x_{A13} + 0{,}6^2 x_{B13} + 0{,}8\, x_{A23} + 0{,}6\, x_{B23} + x_{A33} + x_{B33})$

custos armazenamento $= 30(x_{A12} + x_{A23} + 1{,}8\, x_{A13})$ ⇒ F1

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{x_{A13}}_{1\text{ mês}} + \underbrace{0{,}8\, x_{A13}}_{2^{\circ}\text{ mês}}$$

$+ 10(x_{B12} + x_{B23} + 1{,}6\, x_{B13})$

custos de transporte $= 40(x_{A11} + 0{,}8x_{A12} + 0{,}8^2x_{A13} + x_{22} + 0{,}8x_{A23} + x_{A33})$
$+ 30(x_{B11} + 0{,}6x_{B12} + 0{,}6^2x_{B13} + x_{B22} + 0{,}6x_{B23} + x_{B33})$

Restrições

- Procura mínima e máxima, em cada mês

$x_{A11} + x_{B11} \geq 100$ } mês 1
$x_{A11} + x_{B11} \leq 100 + 50$

$0{,}8x_{A12} + 0{,}6x_{B12} + x_{A22} + x_{B22} \geq 120.$ } mês 2
$0{,}8x_{A12} \ldots \leq 120 + 70$

$0{,}8^2x_{A13} + 0{,}6^2x_{B13} + 0{,}8x_{A23} + 0{,}6x_{B23} + x_{A33} + x_{B33} \geq 140$ } mês 3
$0{,}8^2x_{A13} \ldots \leq 140 + 50$

- Capacidade produtiva em cada fábrica, em cada mês:

(F1) $x_{A11} + x_{A12} + x_{A13} \leq 2 \times 40$ } mês 1
(F2) $x_{B11} + x_{B12} + x_{B13} \leq 2 \times 40$
(F1) $x_{A22} + x_{A23} \leq 2 \times 40$ } mês 2
(F2) $x_{B22} + x_{B23} \leq 2 \times 40$
(F1) $x_{A33} \leq 2 \times 40$ } mês 3
(F2) $x_{B33} \leq 2 \times 40$

- Restrições de sinal

$x_{ijk} \geq 0$, $i = A(F1), B(F2)$, $j \leq k$

9. abr. 2014

Descrição e Análise do Plano Ótimo

→ Produzir 42,5 Kg de produto na Fábrica F1, no mês 1, para satisfazer a procura no mês 1 ($x_{A11} = 42{,}5$)
→ " 37,5 Kg ... Fábrica F1 ... no mês 2 (x_{A12}) = 37,5
⋮

Fazer quadro-resumo com a info

		mês produção j \ mês venda k	1	2	3	
Fábrica F1	quantidade produzida $x_{A_{jk}}$	1	42,5	37,5	0	TOTAL deteorado F1 mês 1 = 7,5
	qtidade deteorada		0	7,5 (20%)	0	TOTAL no mês de produção = 80
		2	—	80	0	
				0	0	
		3	—	—	80	
	TOTAL prod p/venda		42,5	117,5	80	TOTAL deteorado (F1) = 7,5
	TOTAL vendido no mês		42,5	110	80	TOTAL prod em F1 = 80 × 3 = 240
	receita TOTAL/mês		42500	165000	104000	total vendido proveniente de F1 = 232,5
						TOTAL receita F1 = 311.500
Fábrica F2	$x_{B_{jk}}$	1	80	0	0	total produzido em cada mês = 80
	nunca há deteoração já se vende tudo no pp mês	2	—	80	0	
		3	—	—	80	
						TOTAL deteorado F2 = 0
						TOTAL prod em F2 = 80 × 3 = 240
						total vendido prov de F2 = 240
						receita total F2 = 304.000
TOTAL (F1 + F2)						TOTAL produzido 480
						TOTAL deteorado 7,5
						TOTAL vendido 472,5
						TOTAL receita 615.000

→ A quantidade deteorada é de 7,5 kg, que resulta da produção de 37,5 kg na fábrica F1, no mês 1, para satisfazer a procura no mês 2, resulta da quantidade armazenada nesta fábrica do mês 1 para o mês 2. Não há outros armazenamentos e portanto não há mais quantidades deteoradas.

→ No total são produzidos 480 kg, resultando em 240 kg em cada fábrica. (x por fábrica, por mês)

→ No total são transportadas 472,5 kg de produto, sendo 232,5 kg provenientes de F1 e 240 de F2. (especificar F1 mês 1, mês 2...)

Análise do lucro ótimo

- O lucro ótimo (máximo) no final dos 3 meses é de €597.875. ($z = 597.875$)
- Total receitas = 615.000 (F1 = 311.500 ; F2 = 304.000)
- Custos armaz = total 1125 (F1 =)
- Custos transporte = total 16500 (F1 = 9300 ; F2 = 7200)

Análise das restrições

- Procuras : – no mês 1, foram fornecidos 122,5 Kg, ou seja, serão fornecidos 22,5 Kg acima da procura mínima ($s_1 = 122,5 - 100 = 22,5$) e 27,5 Kg abaixo da procura máxima ($t_2 = 150 - 122,5 = 27,5$)
  - no mês 2...
  - no mês 3...

- Capacidade produtiva :
  - a capacidade é totalmente utilizada em ambas as fábricas e em todos os meses ($s_1 = 80 - 80$; $i = A(F1), B(F2)$ 7... 12)
  (...)

13. OUT. 2014

Análise de sensibilidade

- Alterando receita no mês 1, altera $xA11$ e $xB11$
- " por exemplo, despesas transporte de F1, vai alterar todos os ~~custos~~ produtos que vêm de lá

⇓ (se for apenas num mês em particular, já é possível)

temos esta limitação.

(1) vários coeficientes podem alterar em simultâneo.

(2) termos independentes das restrições

- relativas à procura:

→ relativamente à procura máxima no mês 2, e desde que esta aumenta, no máximo 18 Kg, sabe-se que o incremento no lucro ótimo será de € 222,5 por cada Kg adicional. Pelo contrário, caso essa procura máxima diminua, no máximo, 22 Kg, então haverá uma redução de € 222,5 por cada Kg a menos.

→ Nos restantes casos, ou seja, para os restantes meses, as procuras mínimas e máximas podem variar dentro de determinados limites (dados pelos respetivos intervalos de sensibilidade), sem que o lucro ótimo se altere.

Por exemplo, a procura mínima no mês 1 pode variar entre zero e 122,5 kg ($IS_b =]100-\infty ; 100+22,5[=]-\infty ; 122,5[$) sem que o lucro ótimo se altere.

• Relativas às capacidades produtivas

→ Em todas as fábricas e em todos os meses, verifica-se que uma alteração na capacidade produtiva terá impacto no lucro ótimo, dado que os preços sombra das restrições correspondentes são diferentes de zero.

Em particular para a capacidade produtiva ~~da~~ da fábrica F1 no mês 1, sabemos que cada kg adicional de capacidade trará um aumento no lucro de € 960*, desde que esse acréscimo seja, no máximo de 27,5 kg.

Por outro lado, caso essa capacidade produtiva seja ~~...~~ reduzida, no máximo em 22,5 kg, então o lucro ótimo irá diminuir em € 960* por cada kg a menos.**

→ Para os restantes meses e fábricas tiram-se conclusões semelhantes, com as devidas adaptações aos preços ~~...~~ sombra e intervalos de sensibilidade respetivos

⇓

encaixar parte matemática

*preço sombra = €960

** $IS_{b7} = [80-22,5 ; 80+27,5]$

→ Haverá pequenas alterações nas quantidades produzidas, apesar de, sendo que a variação está no IS, a produção vai continuar a ser feitas nas mesmas fábricas e para vender nos mesmos meses.

→ Se um trabalhador souber que vai faltar, é preferível que falte no mês 1, impacto é menor (preço sombra)

→ Impacto da falta em F1 é menor que em F2

⇓

medido pelo preço-sombra. Só se verifica se variações forem dentro do IS.

QUESTÃO 2

	vencimento	produtividade
trabalhadores	€1200	2 kg
recontratados	€1400	2,5 kg
estagiários	€1000	1,5 kg

a) Manter variáveis de decisão de Q1
Novas " "

y_{ij} - nº de estagiários a contratar para fábrica i, no mês j, $i = \{A(F1), B(F2)\}$; $j = 1,2,3$

Z - nº de trabalhadores com formação profissional a recontratar no mês 3 para F1.

- Alterações na FO : incluir os custos com os trabalhadores

$$-1200(\overbrace{\underset{\text{mês 1}}{40} + \underset{\text{mês 2}}{20} + \underset{\text{mês 3}}{20}}^{F1}) - 1200(40+40+40)$$ → custos c/ trabalhadores são fixos

$-1000(y_{A1} + y_{A2} + y_{A3} + y_{B1} + y_{B2} + y_{B3})$ custos c/ estagiários

$-1400Z$ custos c/ recontratados

- Alterações nas restrições : mantêm-se restrições das procuras
alteram-se " da capacidade produtiva

F1:

$x_{A11} + x_{A12} + x_{A13} \leq 2 \times 40 + 1{,}5\,y_{A1}$ — mês 1
$x_{A22} + x_{A23} \leq 2 \times 20 + 1{,}5\,y_{A2}$ — mês 2
$x_{A33} \leq 2 \times 20 + 1{,}5\,y_{A3} + 2{,}5\,Z$ — mês 3

F2:

$x_{B11} + x_{B12} + x_{B13} \leq 2 \times 40 + 1{,}5\,y_{B1}$
$x_{B22} + x_{B23} \leq 2 \times 40 + 1{,}5\,y_{B2}$
$x_{B33} \leq 2 \times 40 + 1{,}5\,y_{B3}$

- Novas restrições : limite ao nº de estagiários em cada mês

$y_{A1} + y_{B1} \leq 100$
$y_{A2} + y_{B2} \leq 100$
$y_{A3} + y_{B3} \leq 100$

- limite ao nº de trabalhadores com curso profissional a recontratar : $z \leq 20$

- restrições de sinal : mantêm-se as anteriores

$y_{iz} \geq 0$ e inteiros , $i = A, B$, $j = 1, 2, 3$
$z \geq 0$ e inteiros

15.OUT. 2014

PL 19

x_{ij} → Planeamento seq de produção qd a procura não é fixa

Trabalho : 5 dias consecutivos
descanso : 2 "
nº mínimo de trabalhadores ?

Variáveis de decisão

x_i – nº de trabalhadores que começam a trabalhar no dia i,
$i = 1(2^a f), 2(3^a f), 3(4^a f), 4(5^a f), 5(6^a f), 6(Sab), 7(Dom)$.

Formulação em PLI

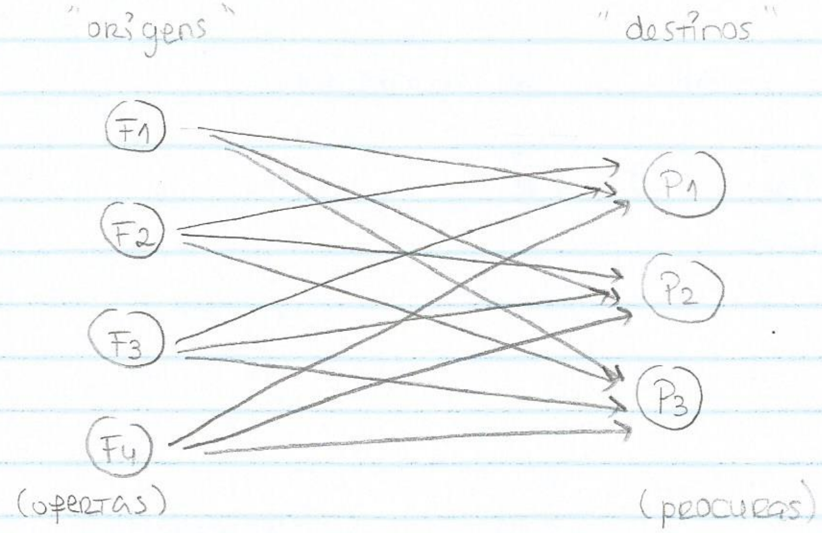
$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{ll}
(2^a f) & x_1 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 \geq 17 \\
(3^a f) & x_2 + x_1 + x_7 + x_6 + x_5 \geq 13 \\
(4^a f) & x_3 + x_2 + x_1 + x_7 + x_6 \geq 15 \\
(5^a f) & x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + x_7 \geq 19 \\
(6^a f) & x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 \geq 14 \\
(Sab) & x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 \geq 16 \\
(Dom) & x_7 + x_6 + x_5 + x_4 + x_3 \geq 11 \\
 & x_i \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{array}\right\}$$

garantir o nº mínimo de trabalhadores em cada dia da semana

PL 18 Problema de transportes



$\sum O_i = 90 = \sum P_i$

Variáveis de decisão

X_{ij} - quantidade semanal fornecida pela fábrica i do produto j, $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,3$

formulação em PL

ou $\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij}$

$\min z = 6x_{11} + 7x_{12} + 8x_{13} + \ldots + 3x_{42} + 9x_{43}$

$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = O_i, \; i = 1,2,3,4$

s.a.:
(F1) $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10$
(F2) $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20$
(F3) $x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30$
(F4) $x_{41} + x_{42} + x_{43} = 30$

quantidade a fornecer a cada fábrica

$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = P_j, \; j = 1,2,3$

(P1) $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 15$
(P2) $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 50$
(P3) $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 25$

garantir a procura de cada um dos produtos

$x_{ij} \geq 0$ (e inteiros) $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,3$

Formular como

PL 23 Problema de afetação

	Provas			
Candidatos	1	2	3	4
1	5	3	9	9
2	3	6	10	10
3	9	2	6	6
4	7	3	1	1

prova fictícia, pq 2 candidatos vão fazer a prova 3

⇓

O nº de provas = nº de candidatos, por isso está em equilíbrio.*

*(se não, íamos criar na mesma a prova fictícia mas os valores iam ser zero → p/ estar em equilíbrio)

Variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ realiza a prova } j, \; i,j = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Formulação em PL

min tempo total

$$\min Z = 5x_{11} + 3x_{12} + 9x_{13} + 9x_{14} + \ldots + 1x_{43} + 1x_{44}$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{ll} (C1) & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ (C2) & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ (C3) & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ (C4) & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \end{array}\right\} \text{cada candidato realiza 1 e 1 só prova}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (P1) & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ (P2) & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ (P3) & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ (P4) & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \end{array}\right\} \text{cada prova é realizada por um e um só candidato}$$

$$x_{ij} \geq 0 \; , \; i,j = 1,2,3,4$$

→ não é preciso pôr que $x_{ij} \in \{0,1\}$ pq as variáveis já o garantem

16. OUT. 2014

PL 27

variáveis de decisão

$x_j \begin{cases} 1 & \text{se o local } j \text{ for selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

$j = 1, 2, \ldots 10$

Formulação Linear em PLIB (binária)

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{10} x_j \cdot c_j \quad \text{(custo total)}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{10} x_j = 5 \quad \text{(selecionar exatamente 5 locais)}$$

(a) $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 2$ podemos escolher até 2

(b) $x_1 + x_2 \leq 1$ podemos " até 1

(c) $x_1 + x_7 + x_8 \leq 2$ " " até 2

(d) $x_3 + x_5 \leq 1$

$x_4 + x_5 \leq 1$

(e) $x_9 \leq x_2$ = (se x_2 for escolhido [1], o x_9 pode ser 0 ou 1
se x_2 for 0, o x_9 tem de ser 0

(f) $\sum_{j=1}^{10} l_j \cdot x_j \geq L$

$x_j \in \{0,1\}$, $j = [1, 10]$

PL 42

variáveis de decisão

$x_i \rightarrow$ qtidade (em ton) a produzir mensalmente do produto i, $i = 1, 2$

$y \begin{cases} 1 & \text{se decidirmos instalar equipamento p/ produzir P1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Formulação em PLIM (mista: inteiro e contínua)

$$\min Z = 800y + 2x_1 + 5x_2 \quad \text{(custo total)}$$

s.a.

$x_1 + x_2 \geq 500$ (prod total min)

$x_1 \leq M \cdot y_1$ (M permite que quando y_1 toma um valor de 1, x_1 tome um valor muito grande)
↳ até ao limite de produção de x_1

$x_i \geq 0$, $i = 1,2$

$y_1 \in \{0,1\}$

M é um valor positivo suficientemente grande.

PL 43

(a) $x_1 \leq 400\, y_1$ substituir o M por 400

(b) $x_2 \geq 150\, w$, $w \in \{0,1\}$ porque temos a escolha de produzir ou não P2

$x_2 \leq Mw$

se $w = 1 \Rightarrow x_2 \geq 150$

se $w = 0 \Rightarrow x_2 \geq 0$

esta resolve o problema

se $w = 0 \Rightarrow x_2 \geq 0$ ✓

se $w_1 \Rightarrow x_2 \leq M$

onde M é um valor positivo suficientemente grande

(c) $x_2 \geq 150\, w$, $w \in \{0,1\}$

$x_2 \leq 350\, w$

(d) $x_1 \geq 200\, v$ se $v = 0 \Rightarrow x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 350$ ✓

$x_2 \geq 350(1-v)$ se $v = 1 \Rightarrow x_1 \geq 200$, $x_2 \geq 0$ ✓

$v \in \{0,1\}$

este pode ser um valor qqr

(e) ~~$x_1 \leq 300\, u$~~ se $u = 0 \Rightarrow x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 400$

~~$x_2 \leq 400(1-u)$~~ se $u = 1 \Rightarrow x_1 \leq 300$, $x_2 \leq 0$ ×

~~$u \in \{0,1\}$~~

$x_1 \leq 300 + Mu$ se $u = 0 \Rightarrow x_1 \leq 300$, $x_2 \leq 400 + M$ ✓

$x_2 \leq 400 + M(1-u)$ se $u = 1 \Rightarrow x_1 \leq 300 + M$, $x_2 \leq 400$ ✓

$u \in \{0,1\}$

sendo M um valor positivo suficientemente grande

20. OUT. 2014

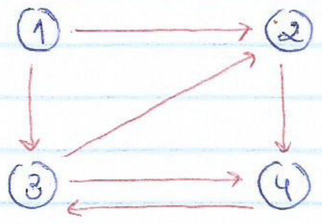
Redes

GRAFO: par ordenado $G = (V, A)$
V → conjunto finito de vértices
A → " de arcos contido em V×V.

exemplo 1:

$V = \{1, 2, 3, 4\}$ (conj. de vértices) $A = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,3)\}$ (conjunto de arcos)

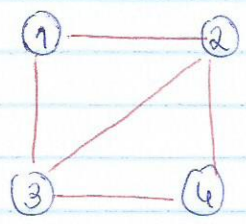
$G = (V, A)$



Este é um grafo orientado (só tem arcos)

exemplo 2:

$V = \{1, 2, 3, 4\}$ $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\}$ (conjunto de arestas)

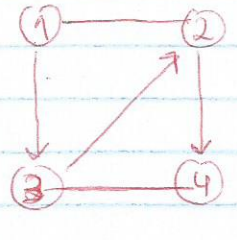


Este ~~[illegible]~~ é um grafo não-orientado (todas as ligações são arestas)

$G = (V, E)$

exemplo 3:

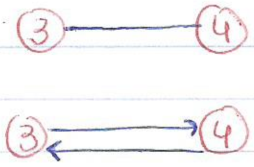
$V = \{1, 2, 3, 4\}$ $A = \{(1,3), (2,4), (3,2)\}$ conj. de arcos
$E = \{(1,2), (3,4)\}$ " de arestas



$G = (V, A \cup E)$
ou
$G = (V, A, E)$

Grafo misto
- tem ligações c/ orientação e sem orientação, contem arcos e arestas

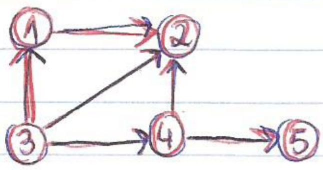
Aresta $(3,4)$
pode ser representada de
2 formas :



Rede : $R = (V, A, P)$
↳ pesos das ligações
(custos, distâncias, etc)

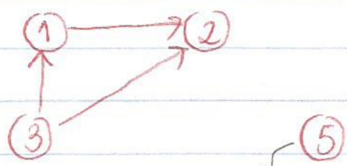
exemplo 4 :

Dado o grafo $G = (V, A)$



a1) subgrafo gerado por $V_1 = \{1, 2, 3, 5\}$

$G_{V_1} = (V_1, A_1)$



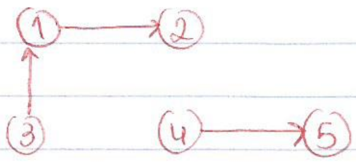
vértices isolado

ficamos só com as ligações que dizem respeito a estes vértices

a2) subgrafo gerado por $V_2 = \{1, 3\}$

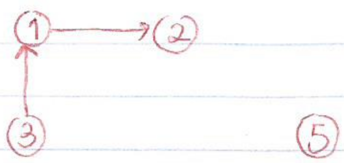
$G_{V_2} = (V_2, A_2)$

b1) Grafo parcial gerado por $A_1 = \{(1,2), (3,1), (4,5)\}$
quando o grafo é gerado por um conj de ligações vai conter todos os vértices do original mas só aquelas lig



$G_{A_1} = (V, A_1)$ → só estas ligações
↳ todos os vértices

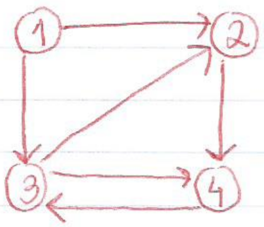
c) Subgrafo parcial gerado por $V_1 = \{1, 2, 3, 5\}$ e $A_1 = \{(1,2), (3,1)\}$
• combina as duas coisas



$G_{V_1, A_1} = (V_1, A_1)$

exemplo 5:

Dado o grafo $G = (V, A)$



Uma cadeia é a forma de eu chegar de um ponto ao outro sem me preocupar com a orientação.

(1) exemplos de cadeias de 4 para 2

$4 \leftarrow 2$

$4 \rightarrow 3 \leftarrow 1 \rightarrow 2$

$4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

o extremo anterior tem de ter um arco em comum com o arco seguinte
- orientação não é relevante
- mas só com arcos existentes

(2) Se a orientação for relevante chama-se caminho
- o único caminho é $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

- todos os caminhos são cadeias, mas nem todos os cadeias são caminhos

(3) exemplos de ciclos: é uma cadeia em que os extremos coincidem - saímos de um sítio e queremos lá voltar

- orientação não relevante

$1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$ $\qquad$ $4 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 4 \leftarrow 3 \rightarrow 2$ $\qquad$ $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

(4) Circuito: ciclo em que a orientação é relevante
ou caminho em que os extremos coincidem

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

$3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

22. OUT. 2014

última aula: Redes (secção 1 e 2)

hoje: Problema da árvore de suporte de custo mínimo
(secção 3, pp 6-10)

- qual o nº mínimo de ligações dado que de qualquer ponto conseguimos aceder a qualquer ponto.

⇓

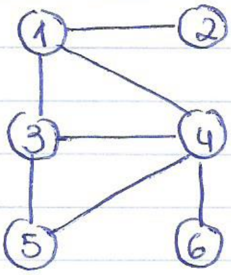
cadeia (não importa a orientação)

aplicações: em redes de telecomunicações
em redes de abastecimento

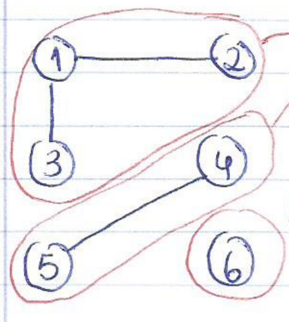
- uma árvore de suporte tem sempre:

→ nº de ligações = nº de vértices - 1
→ tem de ser um grafo conexo (de 1 vértice consigo chegar a qualquer outro)
sem ciclos

Exemplo Grafo conexo



- é possível de qualquer ponto da rede aceder a qualquer outro ponto (mesmo que fossem arcos, não nos preocupávamos com a orientação.

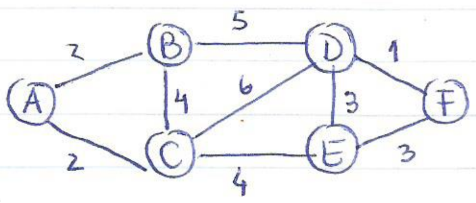


3 componentes conexas

- Grafo desconexo
→ 3 subgrafos conexos

Como saber qual o que oferece custo mínimo?
- Algoritmo de Prim
- Algoritmo de Kruskal

Exercício $\boxed{R2}$ Problema da Árvore de Suporte de Custo Mínimo

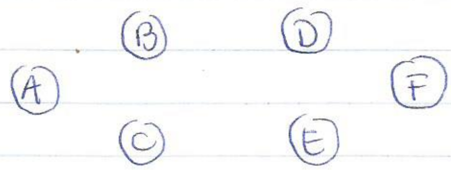


a) Algoritmo de Kruskal

1° - ordenar as arestas por ordem crescente dos seus pesos.

arestas	peso
(D,F)	1 ✓
(A,B)	2 ✓
(A,C)	2 ✓
(D,E)	3 ✓
(E,F)	3 × forma ciclo
(B,C)	4 × forma ciclo(custo)
(C,E)	4 ✓
(B,D)	5 × já é grafo
(C,D)	6 ×

conexo e sem ciclos, por isso já é árvore de suporte → terminar

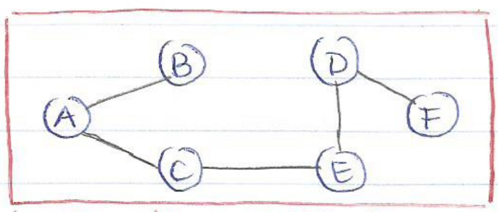


$Cs = 0$ neste momento o custo é 0.

$Vs = V$ (conj. de vértices)

$Ts = \emptyset$ (conj de arestas) não temos arestas ainda

2° passo - ir tirando arestas do topo da lista e adicionar à árvore desde que não forme ciclo.



árvore de suporte de custo mínimo (solução ótima)

(E,F) × forma ciclo

(B,C) × " "

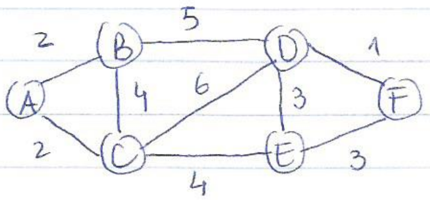
$Cs = 1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 12$

$TS = \{ (D,F), (A,B), (A,C), (D,E), (C,E) \}$

se formar ciclo, passa p/ a seguinte

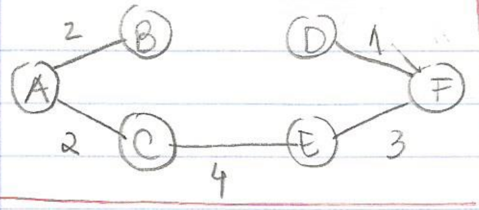
Critério de paragem → já é grafo conexo e sem ciclos, por isso já é árvore de suporte → terminar

b) Algoritmo de Prim



1° - escolher um vértice qualquer para começar

Vs = {vs} , onde vs é um vértice qqr de ℝ
Ts = ∅ , não existem arestas ainda
Cs = custo da árvore é nulo inicialmente



árvore de suporte de custo mínimo (solução óptima)

2° passo - das ligações a sair de C, escolhemos a mais barata.

vs = {C}

custo = 2 + 2 + 4 + 3 + 1 = 12

arestas	peso
(A,C)	2 → ligação (+) barata
(B,C)	4
(C,E)	4
(C,D)	6

arestas	peso
(A,B)	2 → ligação (+) barata
(C,B)	4
(C,D)	6
(C,E)	4

⇒ voltar a ligar os que já lá estão com os que não estão

arestas	peso
(B,D)	5
(C,E)	4 → (+) barata
(C,D)	6

arestas	peso
(B,D)	5
(C,D)	6
(E,D)	3
(E,F)	3

→ escolher qqr uma

arestas	peso
(B,D)	5
(C,D)	6
(E,D)	3
(F,D)	1

Critério de paragem → já tem n-1 = 6-1 = 5 arestas, logo já é árvore de suporte, e portanto → terminar.

23. OUT. 2014

secção 4 - Problema do caminho mais curto
(pp 10,11)

- caminho mais curto → minimizar distância ou custo de ir de um ponto ou outro

↓

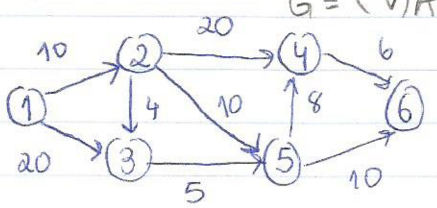
geralmente é com arcos. (ou seja, temos de respeitar a orientação), mas nem sempre

aplicações : - determinação do percurso mais eficiente entre um local. A e um local B (duração, custo, etc)
- planeamento de produção
- etc

algoritmos de resolução:
- não iremos dar nas aulas mas existem
- Algoritmo de Dijkstra
- Algoritmo de Floyd

R4

$G = (V, A)$



Aqui queremos ir de um sítio p/ outro sítio da melhor forma. Na árvore de suporte queríamos ligar todos os + baratos.

Determinar o caminho mais curto entre 1 e cada um dos restantes vértices.

- são caminhos independentes
- não quero ligá-los

Resolução de problema de C+C usando formulação em PL:
- será necessário fazer uma formulação em PL para cada um dos vértices de destino.

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } (i,j) \text{ estiver no caminho} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\forall (i,j) \in A$

Formulação em PL para o C+C entre os vértices 1 e 6:

$$\min Z = 10x_{12} + 20x_{23} + 20x_{13} + 4x_{23} + 5x_{35} + 10x_{25} + 8x_{54} + 6x_{46} + 10x_{56} \Rightarrow \text{ou} \sum_{(i,j)\in A} P_{ij} \cdot x_{ij}$$

s.a.

$x_{12} + x_{13} = 1$ (sai um caminho do vértice 1)

$x_{46} + x_{56} = 1$ (chega " " " 6)

$\underbrace{x_{12}}_{\text{entra}} - \underbrace{x_{23} - x_{25} - x_{24}}_{\text{sai}} = 0$ (cada vez que entra um arco, tem de sair um → a ≠ entre o que entra e o que sai tem de ser 0)

$x_{13} + x_{23} - x_{35} = 0$ (o caminho entre e sai do vértice 3)

$x_{24} + x_{54} - x_{46} = 0$ (" " " " " 4)

$\underbrace{x_{35} + x_{25}}_{\text{os que entram}} - \underbrace{x_{54} - x_{56}}_{\text{os que saem}} = 0$ (" " " " " 5)

$x_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in A$

27. OUT. 2014

Cacifo 112A (aula autónoma)

Problema C+C não é necessário explicitar que é binária, pq todas as variáveis têm valores de 0 ou 1.
↳ a não ser que hajam condições adicionais
• no geral, $x_{ij} \geq 0$ é suficiente

Secção 5 – Problemas de Fluxos numa Rede

em relação ao C+C, este tem também restrições de capacidade

hip 1: numa rede, há um ponto onde é gerado o fluxo e onde este é absorvido.
em todos os outros pontos tem de haver conservação do fluxo – pontos onde este passa.

hip 2: só há um pt gerador e pt absorsor.
→ na realidade ñ acontece (3 fábricas, 5 clientes)
→ adapta-se: cria-se um ponto fictício de origem antes das 3 fábricas, e um ponto após os clientes.

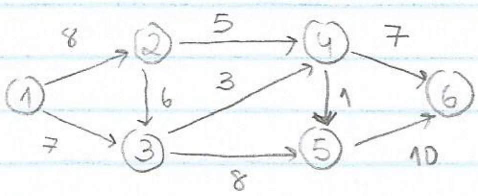
hip 3 → capacidades de cada arco são nºs inteiros
↳ garante que a solução é um nº inteiro

⇒ problema de fluxo máximo (pp 11-17)

• Determinar a quantidade máxima de um bem que é possível enviar de um local A para um local B, por unidade de tempo.

$\boxed{R7}$

rede 1:



Determinar fluxo máximo entre 1 e 6.

- variáveis de decisão:

x_{ij} - quantidade de fluxo (ou produto) no arco (i,j)
$\forall (i,j) \in A$

- formulação em PL

Max $Z = F$

o fluxo é gerado em 1
s.a. ↱ o fluxo é absorvido em 6

$x_{12} + x_{13} = F$
$x_{46} + x_{56} = F$
} não sabemos o valor do fluxo máximo "F"

$x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$
$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0$
$x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0$
$x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0$

→ conservação de fluxo no vértice i, i.e, a qtidade que entra terá de sair de lá.

$x_{12} \leq 8$, $x_{13} \leq 7$, $x_{23} \leq 6$, $x_{24} \leq 5$, $x_{35} \leq 8$, $x_{34} \leq 3$, $x_{45} \leq 1$, $x_{46} \leq 7$, $x_{56} \leq 10$ (não exceder a capacidade de cada arco)
↳ generalizando: $x_{ij} \leq u_{ij}$ $\forall (i,j) \in A$

$x_{ij} \geq 0, \ \forall (i,j) \in A$

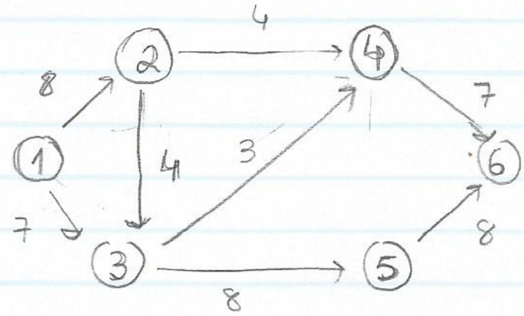
Resultado do solver

$x_{12} = 8 \quad x_{13} = 7 \quad x_{23} = 4 \quad x_{24} = 4 \quad x_{34} = 3$

$x_{35} = 8 \quad x_{45} = 0 \quad x_{46} = 7 \quad x_{56} = 8$

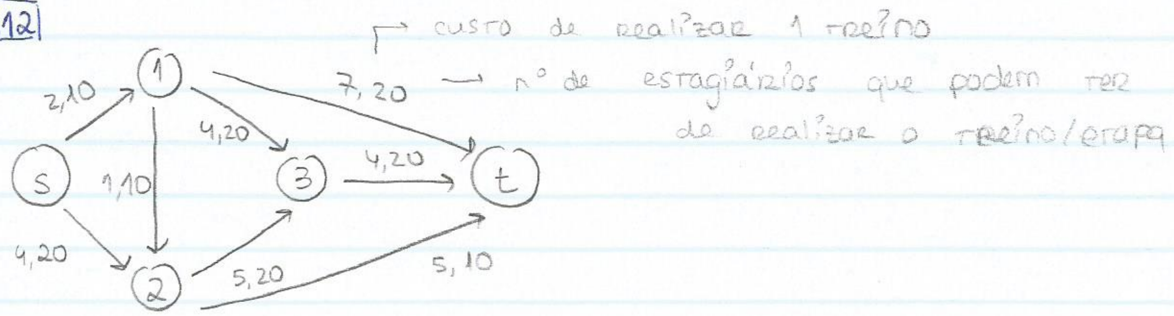
valor ótimo = F = 15 = fluxo máximo

O sistema ótimo de fluxos é o seguinte:



29. Out. 2014

$\boxed{R12}$



a) Resolver o problema de fluxo máximo entre s e t.

Variáveis de decisão

x_{ij} - quantidade de fluxo no arco (i,j), ou seja, o nº de estagiários que realizam o treino / etapa (i,j) $\forall i,j \in A$

Formulação em PL

Max F

s.a. $x_{s1} + x_{s2} = F$ (saem F estagiários de s)

$x_{1t} + x_{3t} + x_{2t} = F$ (chegam F estagiários a t)

$x_{s1} - x_{12} - x_{13} - x_{1t} = 0$

$x_{s2} + x_{12} - x_{23} - x_{2t} = 0$

$x_{13} + x_{23} - x_{3t} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_{s1} \le 10 \; ; \; x_{s2} \le 20 \; ; \; x_{12} \le 10 \; ; \; x_{13} \le 20 \\ x_{23} \le 20 \; ; \; x_{1t} \le 20 \; ; \; x_{3t} \le 20 \; ; \; x_{2t} \le 10 \\ x_{ij} \ge 0 \; , \; \forall (i,j) \in A \end{array}\right\} \text{não exceder a capacidade de cada treino.}$$

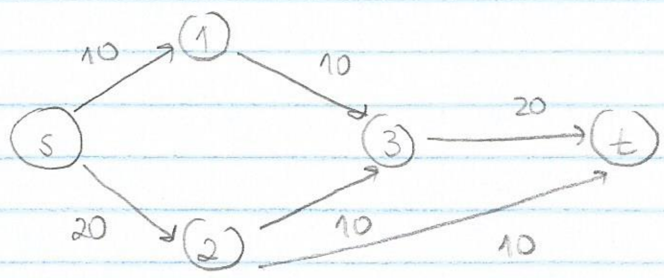
Nota: Conservação do fluxo no vértice i ⇒ Todo o fluxo que entra nesse vértice tem de lá sair.
A conservação de fluxo terá de se verificar para todos os vértices intermédios, i.e. para todos os vértices exceto o inicial e o final.

Resultado do Solver

Solução ótima: $x_{s1} = 10$; $x_{s2} = 20$; $x_{12} = 0$; $x_{13} = 10$
$x_{1t} = 0$; $x_{23} = 10$; $x_{2t} = 10$; $x_{3t} = 20$
$F = 30$

Valor ótimo : $F = 30$

Logo, o sistema ótimo de fluxos é :

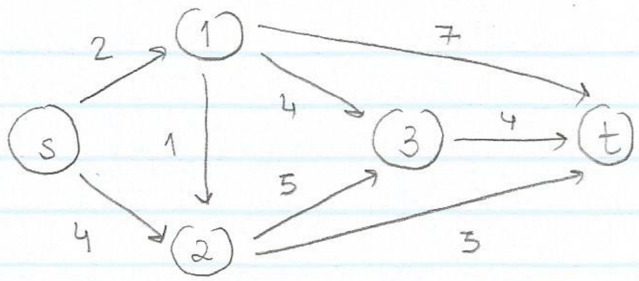


Conclusão:
· no máximo, poderão ser realizados 30 estagiários.

Nota: Desde que as capacidades sejam inteiras, está garantido que as solução serão inteiras.

b) A prova mais económica de realizar um estágio obtém-se resolvendo um problema de caminho mais curto entre s e t, considerando os pesos.

P_{ij} → custo de realizar o treino / etapa (i,j).



Variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } (i,j) \text{ está no caminho, i.e. se é realizada a etapa } (i,j) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

F.O.

$$\min Z = 2x_{s1} + 4x_{s2} + 1x_{12} + 4x_{13} + 7x_{1t} + 5x_{23} + 5x_{2t} + 4x_{3t}$$

s.a.

$$x_{s1} + x_{s2} = 1$$
$$x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} = 1$$
$$x_{s1} - x_{12} - x_{13} - x_{1t} = 0$$
$$x_{s2} + x_{12} - x_{23} - x_{2t} = 0$$
$$x_{13} + x_{23} - x_{3t} = 0$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad , \forall (i,j) \in A$$

Resultado do Solver

solução ótima : $x_{s1} = 1$, $x_{12} = 1$, $x_{2t} = 1$
restantes $x_{ij} = 0$

valor ótimo => $Z = 8$

Logo o caminho + curto é s → 1 → 2 → t

Conclusão : A forma mais económica de realizar um estágio corresponde a realizar as etapas (s, 1), (1,2) e (2,t), sendo então o custo total mínimo igual a 8 u.m.

30. OUT. 2014

$\boxed{R12}$ (continuação)

c) A forma mais económica de realizar 20 estágios é obtida resolvendo o problema de <u>Fluxo de custo mínimo</u>, entre s e t, de valor $\theta = 20$

<u>Variáveis de decisão</u>

x_{ij} – nº de estagiários a realizar a etapa/treino (i,j), $\forall (i,j) \in A$

(igual ao do fluxo máximo)

<u>Formulação em P.L</u>

igual ao caminho + curto

$$\min Z = 2x_{s1} + 4x_{s2} + 1x_{12} + 4x_{13} + 7x_{1t} + 5x_{2t} + 4x_{3t}$$

s.a. $x_{s1} + x_{s2} = 20$ (saem 20 estagiários de s)

$x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} = 20$ (chegam 20 " a t)

$$\left.\begin{array}{l} x_{s1} + x_{12} - x_{13} - x_{1t} = 0 \\ x_{s2} + x_{12} - x_{23} - x_{2t} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{3t} = 0 \end{array}\right\} \text{conservação de fluxo}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{s1} \leq 10, \quad x_{s2} \leq 20 \\ (\ldots) \\ x_{3t} \leq 20 \end{array}\right\} \text{capacidade dos arcos}$$

$x_{ij} \geq 0$, $\forall (i,j) \in A$

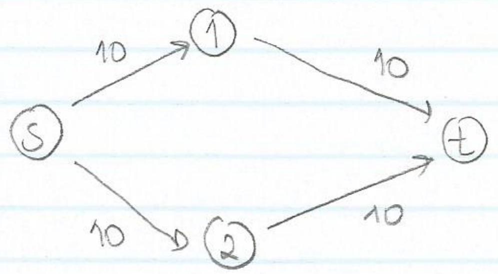
<u>Resultado do Solver</u>

solução ótima: $x_{s1} = 10$, $x_{s2} = 10$, $x_{1t} = 10$, $x_{2t} = 10$

restantes $x_{ij} = 0$

valor ótimo: $Z = 180$

Sistema ótimo de fluxos



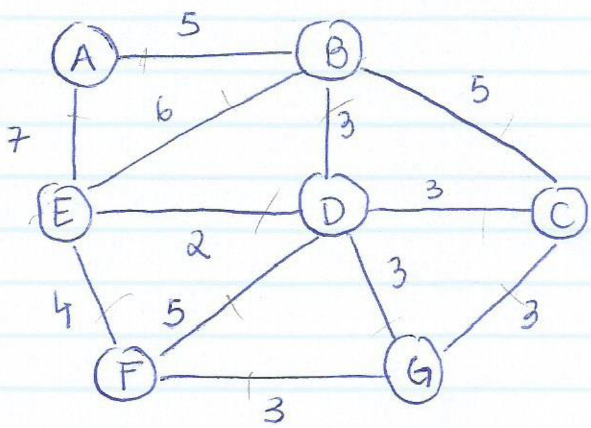
conclusão :

- a forma mais económica de realizar 20 estágios tem custo total de 180 u.m. e consiste em realizar 10 estágios constituídos pelas etapas (s,1) e (1,t) e mais 10 estágios compostos pelas etapas (s,2) e (2,t).

4 Problema do Fluxo de custo mínimo
(secção 5.2 pp 17-22)

- semelhante ao do fluxo máximo, não vale a pena falar aqui

B15

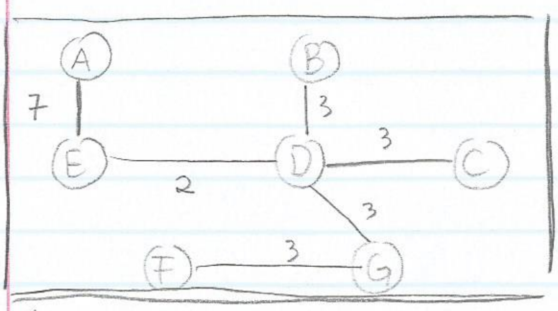


- Ligação (A,E) é prioritária
⇒ • Garantir ligação entre cada par de localidades
- Minimizar o custo total de construção

⇓

Problema de árvore de suporte de custo mínimo

Resolução usando o algoritmo de Kruskal
(nota: também poderíamos usar o algoritmo de Prim)



árvore de suporte de custo mínimo

- como (A,E) é prioritária temos de a incluir, seja barata ou não.

custo = 7 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21

ARESTAS	CUSTO	
(A,E)	7	✓ (aresta prioritária
(E,D)	2	✓
(B,D)	3	✓
(D,C)	3	✓
(D,G)	3	✓
(F,G)	3	✓
(E,G)	3	
(E,F)	4	
(F,D)	5	
(B,C)	5	
(A,B)	5	
(E,B)	6	

⇒ ordenação das arestas por ordem não decrescente do seu custo

já é grafo conexo sem ciclos

⇓

já é árvore de suporte

∘ TERMINAR

As ligações a estabelecer devem ser as apresentadas na árvore de suporte apresentada acima sendo o custo total mínimo igual a 21 u.m.

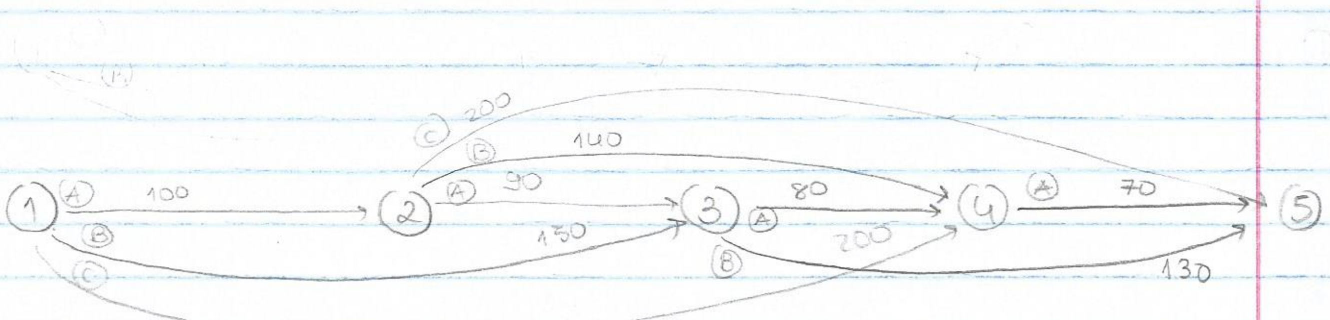
$\boxed{R6}$

		CUSTO			
Tipo Equip.	Durab.	1°	2°	3°	4°
A	1 ano	100	90	80	70
B	2 anos	150	140	130	~~120~~
C	3 anos	200	200	~~180~~	~~180~~

∘ os riscados ultrapassam o prazo, e são ~~+~~ caros do que os que fazem o mm efeito.

Rede representativa do problema

início do 1° ano   início do 2° ano   início do 3° ano   início do 4° ano   fim do 4° ano

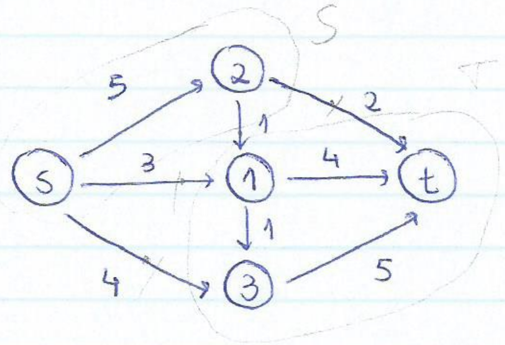


A forma mais económica de aquisição dos equipamentos ao longo dos 4 anos obtém-se resolvendo o problema de caminho mais curto entre o vértice 1 e o vértice 5.

3. nov. 2014

5.1 Problema de Fluxo Máximo

5.1.2. Corte de capacidade mínima (p13)



- um corte é um conjunto de arcos, que retirados da rede, inviabilizam a passagem de fluxo entre a origem e o destino

- cada corte é gerado a partir de um conjunto de vértices S.

  - requisitos de S

    - S tem sempre de conter o vértice inicial e nunca poderá conter o vértice final t.
    - T = V-S, é o conjunto complementar de S, ou seja contém todos os vértices que não estão em S. (incluindo o final)

Dado um conjunto de vértices S:
- o corte C será constituído por todos os arcos cujo vértice inicial esteja em S e o vértice final esteja em T.

exemplos:

para um conjunto de vértices S ⇒ define-se um corte

soma das cap de todos os arcos que compõem o arco

S	corte	capacidade
{s}	{(s,1)(s,2)(s,3)}	5+3+4=12
{s,2}	{(2,1)(2,t)(s,1)(s,3)}	1+2+3+4=10
{s,1,2,3}	{(2,t)(1,t)(3,t)}	2+4+5 = 11
{s,1,2}	{(2,t)(1,t)(s,3)(1,3)}	2+4+4+1=11
{s,1}	{(s,2)(s,3)(1,3)(1,t)}	5+4+1+4 = 14
(...)		

N - nº de vértices ⇒ nº de cortes possíveis $= 2^{N-2}$

Preposição: o fluxo máximo é sempre menor ou igual à capacidade de qualquer corte.

- ao fazer um corte sabemos que não passa fluxo, então, a capacidade desse corte contém toda a capacidade possível do fluxo.

a) Para determinar a forma mais económica de realizar o voo entre as cidades 1 e 6 devemos resolver o problema de c+c, entre 1 e 6, com pesos p_{ij} = custos dados sobre a rede.

Identificação do problema

(ñ é árvore de suporte pq não temos de passar em todos os pontos)

Formulação em PL

variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } (i,j) \text{ estiver no caminho}, \quad \forall (i,j) \in A \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

$$\min \ z = 10x_{12} + 15x_{13} + 23x_{24} + \dots + 20x_{56}$$

s.a.

$x_{12} + x_{13} = 1$ (sai um caminho de 1)

$x_{46} + x_{56} = 1$ (entra " em 6)

$$\left.\begin{array}{l} x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0 \\ x_{13} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} + x_{54} - x_{46} = 0 \\ x_{35} + x_{25} - x_{54} - x_{56} = 0 \end{array}\right\} \text{garantir a conservação de fluxo}$$

$x_{ij} \geq 0, \ \forall (i,j) \in A$

solver:

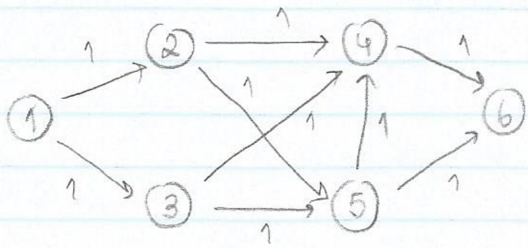
$x_{12} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{56} = 1$, restantes $x_{ij} = 0$

valor ótimo: $z = 37$

c+c: $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$

conclusão: o custo total mínimo é 37 u.m e terá de fazer escalas nas cidades 2 e 5

b) Não nos interessam os custos.



nº mínimo de arcos utilizados

⇓

adaptar o problema de c+c

- resolver o problema do c+c entre 1 e 6, com pesos nos arcos $p_{ij} = 1$, de modo a que seja contabilizada uma viagem caso o arco seja o arco usado.

<u>Teorema</u>: Fluxo Máximo é igual à capacidade do corte com capacidade mínima.

Como saber qual é o corte?
- é fácil com o Algoritmo não sei quê
- mas não precisamos de o saber

↓

só temos de saber o quê que pode ser um arco de capacidade mínima (neste caso, {(s,1)(s,3)(2,1)(2,t)} pq capacidade = 10

⇒ Para aumentar a capacidade de uma rede será necessário aumentar a capacidade de pelo menos um dos arcos do corte de capacidade mínima.

<u>Nota</u>: pode existir (+) do que um corte de capacidade mínima

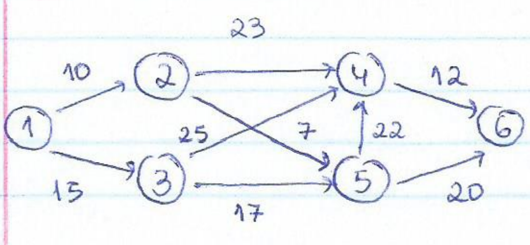
⇒ Caso a rede tenha mais do que um corte de capacidade mínima será necessário aumentar a capacidade de pelo menos um arco em cada corte de capacidade mínima.

<u>Na prática</u>

<u>Dizem-nos que</u>
Corte de capacidade mínima : {(2,1)(2,t)(s,1)(s,3)}

- aumentar capacidade da rede ⇒ aumentar capacidade de um dos arcos do corte de cap mínima
  - quero aumentar capacidade da rede em 15
  - escolher um arco, aumentar capacidade (pouco)
  - voltar a calcular fluxo mínimo
  - ir aumentando gradualmente
    - ↳ deve mudar qual o corte de cap mínima
  - escolher um arco do novo
  - repetir.

<u>P17</u>



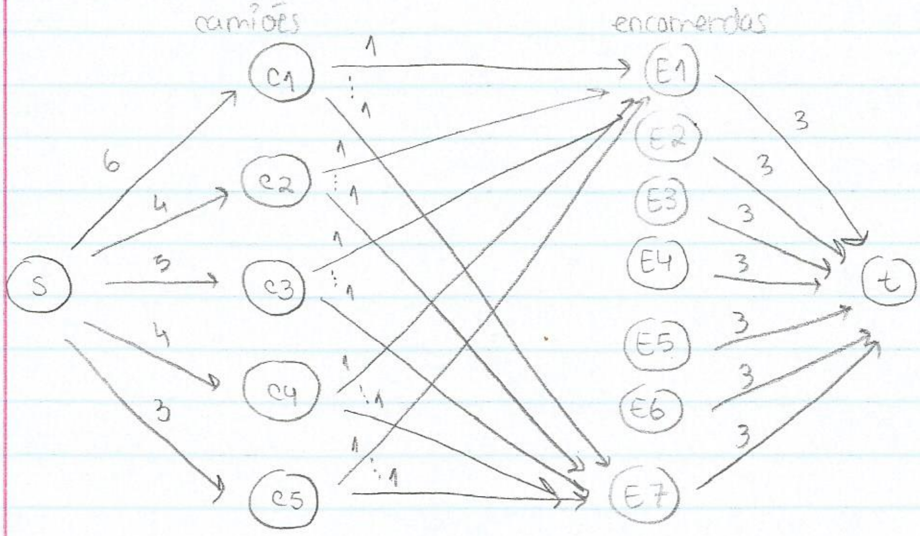
5. Nov. 2014

B16

7 tipos de encomendas : 3 unidades de cada

5 camiões : capacidades 6, 4, 5, 4, 3

cada camião não poderá transportar mais do que uma encomenda de cada tipo.



não há custos

↓

vértices

s - vértice inicial fictício

t - " final "

C_i - camião i , $i = 1, \dots, 5$

E_j - encomenda j , $j = 1, \dots, 7$

Arcos:

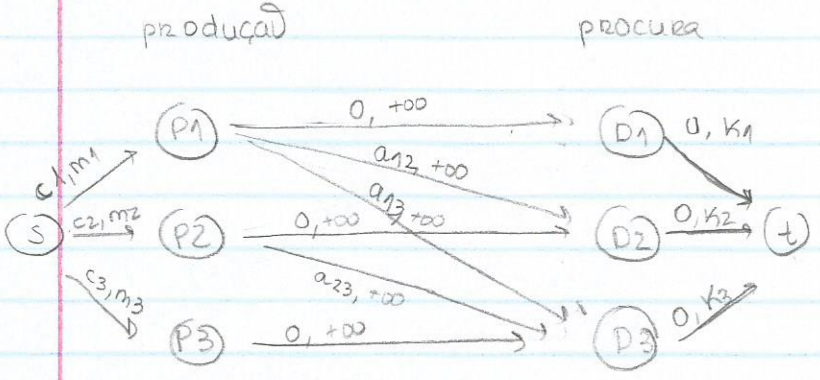
(C_i, E_j) com capacidade $u_{ij} = 1$, para garantir que cada camião leva, no máximo, 1 unidade de cada tipo de encomenda.

(S, C_i) com a capacidade de cada camião (6, 4, 5, 4, 3) para garantir que a capacidade não é excedida.

(E_j, t) com capacidade 3, pois existem 3 unidades de cada tipo de encomenda.

Para determinar o Plano Ótimo de transporte deverá ser resolvido um problema de Fluxo Máximo entre s e t, sobre a rede apresentada.

R18



vértices :

P_i - produção no mês i, $i = 1, 2, 3$

D_i - procura no mês i, $i = 1, 2, 3$

s - vértice inicial

t - " final

capacidade +00 : não há limite à capacidade armazenada

arcos : para representar os custos de armazenamento

(P_i, D_j) - representa a produção no mês i, para satisfazer a procura no mês j, $i, j = 1, 2, 3$, $i \leq j$

(s, P_i) - com custo unitário c_i = custo unit de produção ; com capacidade m_i = cap produtiva, para não exceder a cap produtiva no mês i

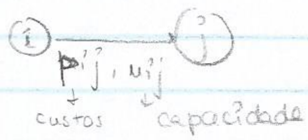
(D_j, t) - com custo unit 0 (não há custo associado), e capacidade K_i (procura no mês i, $i = 1, 2, 3$)

m_i - cap produtiva no mês i, $i = 1, 2, 3$
K_i - procura no mês i, $i = 1, 2, 3$
c_i - custo unitário de produção no mês i, $i = 1, 2, 3$
a_{ij} - " " de armazenamento p/o mês j " i, j, $i, j = 1, 2, 3$

são parâmetros, constantes que vamos ter de pôr na rede

* se fosse c+c, tudo teria de ser enviado pelo mesmo caminho → não acontece, temos de passar por todos os vértices / meses

* é fluxo de custo mínimo (capacidade e custo)

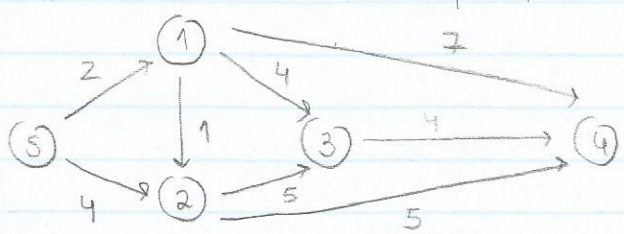


$P_i \rightarrow L_j$: armazenamento, sem restrição de capacidade

⇒ o plano ótimo a 3 meses, que minimiza o custo total é obtido resolvendo um problema de fluxo mínimo, entre s e t, de valor $\sigma = \min \left(\sum_{i=1}^{3} m_i , \sum_{j=1}^{3} K_j \right)$

Problema de c+ c pode ser resolvido como fluxo mínimo
↳ transformação

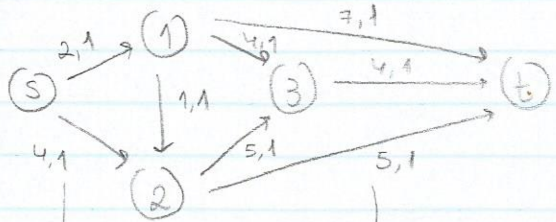
peso P_{ij}



caminho (+) curto

⇓

Fluxo de custo mínimo



- rede fica igual: há origem e destino
- aqui P_{ij} é os custos
- capacidade

↳ peso (p_{2t}) fica igual

capacidade u_{s2} = 1 ⇒ nota: ou qqr valor ≥ 1

problema de fluxo do custo mínimo entre s e t, do valor $\sigma = 1$ (σ = nº de unidades que queremos enviar)

∴ era c + c, quero ir de s p/ t, só preciso de lá passar uma vez.

6. nov. 2014

Planeamento de Projetos

- Análise Temporal: duração mínima do projeto
  consequências de atrasos, na conclusão do projeto
- Análise Económica: que atividades acelerar, mantendo mínimo de custos
- Análise de afetação de Recursos: como afetar os meus recursos, de forma produtiva.

Representação gráfica de Projetos

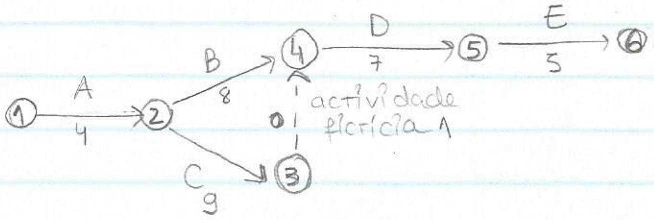
- Rede ANA : atividades nos arcos
- rede ANN : atividades representadas nos nodos (software Project)

Ex 1

Atividade	Duração	Precedências
A	4	–
B	8	A
C	9	A
D	7	B, C
E	5	D

Rede ANA : não pode haver arcos com a mesma origem e destino

atividade inicial – A (nenhuma precedência)
" final – E (nenhuma depende dela)



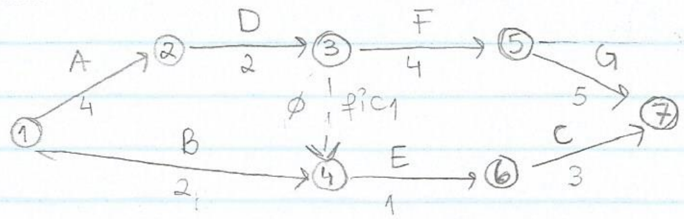
· os vértices têm de ser numerados por ordem.

Esta é a forma + correta pq não acrescentamos atividades fictícias à maluca.

Ex 2							
Atividade	A	B	C	D	E	F	G
Precedência	–	–	E	A	B, D	D	F
Duração	4	2	3	2	1	4	5

inicial → A e B final – C, G (não aparece na lista de precessores)

Rede ANA



· não podíamos fazer fic 1 (B,D) pq senão a F estava dependente da B, o que é mentira.

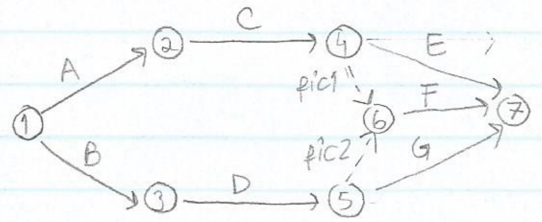
· desde que os precessores estejam numerados, é indiferente qual número.

Exercício

Atividade	A	B	C	D	E	F	G
Predecessor	–	–	A	B	C	C, D	D

inicial – A, B   final – E, F, G

rede ANA

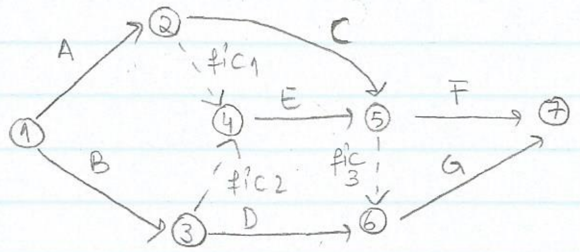


Ex 3

Atividade	A	B	C	D	E	F	G
Precedências	–	–	A	B	A, B	C, E	C, D, E

iniciais – A, B   finais – F, G

rede ANA



* Garantir que não há erros:
- começar no fim e verificar precedências

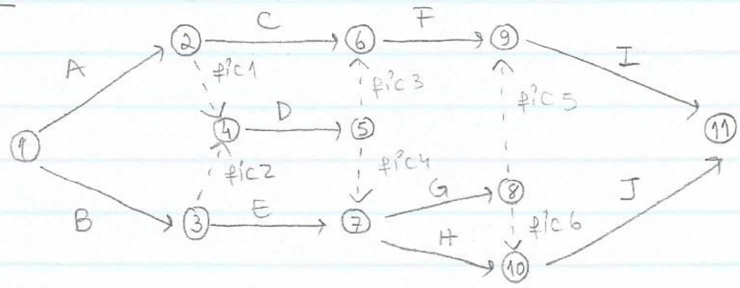
F e G dependem de C e de E
- não há nenhuma que dependa só de C ou só de E
- podemos então pô-las a terminar no mesmo vértice
- evita-se fictícias

P4

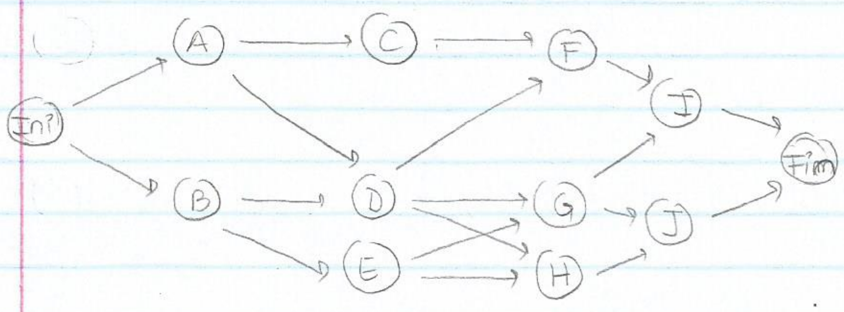
Atividades	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Precedências	–	–	A	A, B	B	C, D	D, E	D, E	F, G	G, H

não podemos juntar C e D no mm nodo nem F e G / G e H

rede ANA



Rede ANN



13. nov. 2014 15h30 Gab D202

Aula de revisões : 2ª feira às
3ª feira às

P2

c) (continuação)

$$\sigma^2 proj = \sum_{i \in cc} \sigma_i^2 = \frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9} \simeq 5,56$$

$$\sigma^2 proj = \frac{(b_i - a_i)^2}{36} = \sqrt{5,56} \simeq \underset{\Downarrow}{2,36}$$

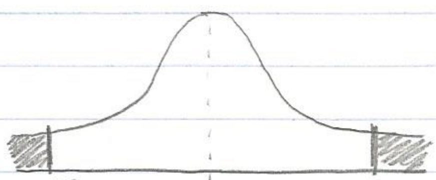
$$\sigma^2_A = \frac{(6-4)^2}{36} = \dots = \frac{1}{9}$$

$$\sigma^2_B = \frac{(10-2)^2}{36} = \frac{16}{9} \quad \sigma^2_C = \frac{16}{9} \quad \sigma^2_E = \frac{16}{9} \quad \sigma^2_G = \frac{1}{9}$$

nota : no caso de existir mais do que um caminho crítico, considera-se o de maior variância

$$T proj \;\dot{\cap}\; N(28 ; 2,36)$$

$$Z = \frac{T proj - 28}{2,36} \;\dot{\cap}\; N(0,1)$$



$$P[T proj \leq 20 \text{ semanas}] = P\left[\frac{T proj - 28}{2,36} \leq \frac{20-28}{2,36}\right]$$

$$= P[Z \leq -3,39] = P[Z \geq 3,39] = 1 - P[Z \leq 3,39] = 1 - \phi\, 3,39$$
$$= 1 - 0,997 = 0,003$$

Logo um prazo de conclusão menor que 20 semanas é irrealista.

Folgas : secção 3.1.1 (pp 8 - 10)

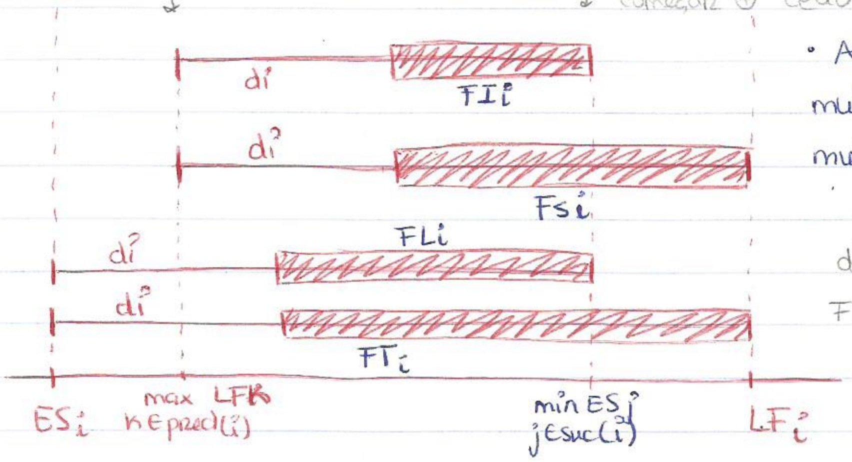
Uma folga mede o atraso máximo que uma atividade i pode sofrer, sem comprometer o prazo de conclusão do projeto.

① Folga Total : $FT_i = LF_i - (ES_i - d_i) = \boxed{LF_i - EF_i}$

ou $= LF_i - d_i - ES_i = \boxed{LS_i - ES_i}$

começa + tarde pq as anteriores acabaram + tarde

acaba + cedo para a próxima começar + cedo



- Atividades com folgas muito pequenas são muito sensíveis

di → duração da atividade

$FL_i \leq FT_i$

assumindo que a atividade pode começar o mais cedo possível e que poderá terminar o mais tarde possível.

(2) <u>Folga Livre</u> : assumindo que <u>todas</u> as atividades começam o mais cedo possível, quando é que cada uma se pode atrasar.

$$FL_i = \min_{j \in suc(i)} ES_j - (ES_i + d_i) = \min_{j \in suc(i)} ES_j - EF_i$$

$\min_{j \in suc(i)} ES_j < LF_i$ e $FT_i \geq FL_i$

(3) <u>Folga de segurança</u> : assumindo que todas as atividades podem terminar o mais tarde possível.

- as atividades atrás atrasaram-se, logo não posso começar mais cedo.

$$FS_i = (LF_i - d_i) - \max_{k \in pred(i)} LF_k = LS_i - \max_{k \in pred(i)} LF_k$$

(4) <u>Folga Independente</u> : assumindo que tudo correu mal atrás, ou seja essas acabaram o mais tarde possível, mas mesmo assim quero começar as seguintes o mais cedo possível

↓

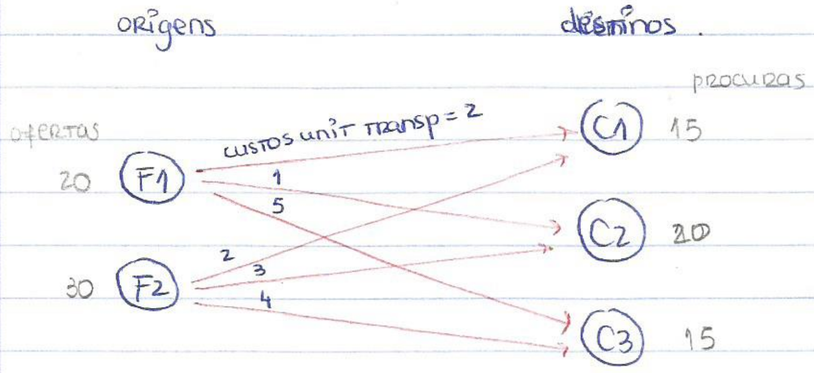
mistura entre FS e FL

$$FI_i = \max\left(0; \min_{j \in suc(i)} ES_j - \max_{k \in pred(i)} LF_k - d_i\right)$$

FTi é superior a todas.
FIi é inferior a todas.
Relação entre a FLi e FSi : depende do caso

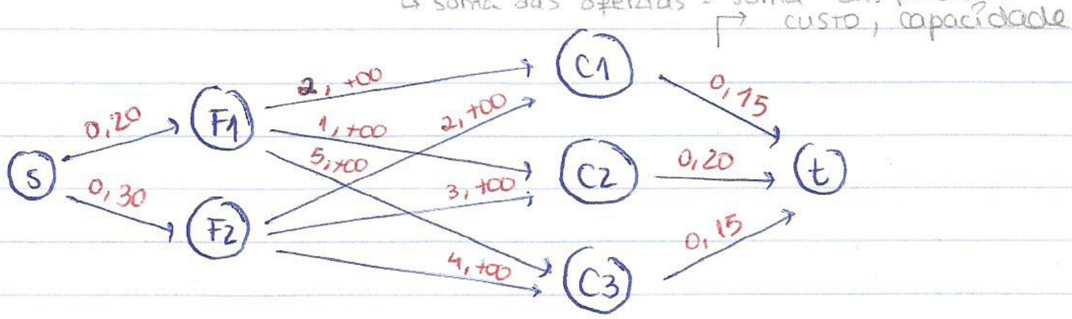
Redes → 5.2.2. (pp 18 - 22)

Problema de Transportes



Desta forma já está em equilíbrio
oferta = procura
(não é preciso criar clientes / fábricas fictícias

⇓ Problema de Transportes puro (em equilíbrio)
transformar num Problema de Fluxo de custo mínimo entre s e t, de $v = 50$
↳ soma das ofertas = soma das procuras



- ter uma única origem e único destino
- custos unitários também aparecem
- capacidade do arco → +∞ porque não temos informação sobre limitação (pomos +∞)
ou qualquer valor ≥ min (20, 15) caso do arco (F1, C1)

⇒ se não fosse puro (oferta > procura)
- criar C4 fictício (pôr em equilíbrio) se pedirem p/ formular em redes (tem mesmo de ser fluxo de custo mínimo
- v = min (soma das ofertas, soma das procuras)
apenas se não for p/ fazer em rede.

• se há custos de produção ⇒ custos entre S e F
• limitação de transporte ⇒ capacidade dos arcos entre C e F

17. Nov. 2014

TI 2013/2014

A1. b) A2. $IS_{c_2} =]-\infty\,;\,3+2]$ c) A3. d)
A4. a) pq o valor de x_3 é 0, não está a ser produzido (e mantém-se assim pq a solução ótima não muda) e por isso o lucro não muda.
A5. b) $b_4 \in IS_{s_4} = [0\,;\,2500]$ $\Delta z = -2(1000-500) = -1000$
A6. d) $b_1 \in IS_{b_1}$, base ótima mantém-se
$\Delta z = (9000-8000) \times 2{,}5 = 2500$
⇒ a solução ótima altera-se pq estamos a mexer nas restrições, elas estão a mudar de sítio (estamos a mexer nos coeficientes)
⇒ base ótima mantém-se pq estamos dentro do IS

[se a restrição não fosse ativa: preço sombra = 0, z e x pode não mudar, só a variável de desvio → solução ótima pode ou não mudar]

se c_j^N, b_j^N $\in IS$ ⇒ base ótima mantém-se
se ~~para~~ $c_j \in IS$, solução ótima tmb se mantém
Δz pode alterar
se $b_j \in IS$, solução ótima pode alterar-se

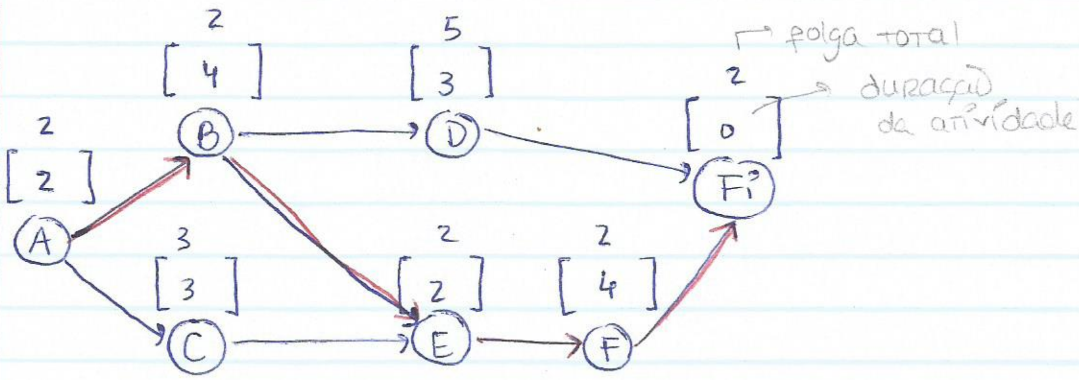
19. nov. 2014

Exercício de Projetos para aulas

duração mínima projeto

2c) Quais as alterações na d.m.p. nas atividades críticas e no caminho crítico produzidas por:

sec. 3.3 - sensibilidade da duração mínima do projeto (pp. 13-21) à duração das atividades



A vermelho: caminho crítico → caminho mais longo, composto por atividades críticas

↳ calcula-se com base nas folgas totais: todas as atividades com folga igual à da última secção podem pertencer ao caminho crítico.

caminho crítico constituído pelas atividades que têm a menor folga

Observação 1

· A redução ou aumento da duração da atividade i em K unidades de tempo origina uma redução ou aumento de K unidades de tempo em todos os caminhos que incluam a atividade i. (críticas ou não)

Observação 2

· Todos os caminhos críticos têm duração igual.
A d.m.p. diminui em K unidades de tempo sse a duração de todos os caminhos caminhos críticos diminuirem em K unidades de tempo.

(i) Reduzir d_D em 1 dia:

1º passo → ver se a atividade D é crítica

$FT_D = 5 > FT_{fi} = 2 \Rightarrow$ D não é atividade crítica

Se reduzimos a duração de D, a folga vai aumentar ainda mais. Sendo que a atividade não é crítica:
- a d.m.p mantém-se
- os caminhos críticos mantêm-se
- as atividades " "

A única coisa que altera é a duração dos caminhos onde aquela atividade entra (mas esses não são críticos)

ii) Reduzir d_B em 1 dia:

$FT_B = 2 = FT_{fi} = 2 \Rightarrow$ B é atividade crítica, logo todos os caminhos críticos em que B entra vão ter a sua duração reduzida em 1 dia

2º passo → Há outros caminhos críticos?
- se houver caminhos críticos que não incluam B, esses caminhos não vão ver a sua duração diminuir → logo a d.m.p não se ia alterar

A atividade B está em todos os caminhos críticos (neste caso só existe um)

depois da alteração ∴ $d.m.p^N = dmp - 1 = 11$

surgem novos cc?
→ caminho mais longo que não inclua B:
(c+L s/B): A - C - E - F c/ duração = 11
(análise antes da alteração)

nota: Sendo B atividade crítica e caso existissem outros caminhos críticos no início que não incluíssem B, então esses outros caminhos permaneceriam críticos e a d.mp. manter-se-ía.

⇓ Se existirem cc que não incluam B, posso reduzir à vontade que a d.m.p se mantém.

• Antes da alteração não há ⊕ caminhos críticos, logo uma mudança em B vai alterar a d.m.p.

DMP^A - redução de $B = 12 - 1 = 11$ ⇒ duração de C+L s/ B

⇒ { $d.m.p.^N = 11$
o c.c. anterior (A-B-E-F) → continua a ser crítico
surge um novo c.c. (A-C-E-F)
nova atividade crítica : C (atividade que não fazia antes parte do c.c.)

(não olhar para as folgas : elas mudam mas não temos de as calcular!)

iii) Reduzir d_B em 2 dias

$FT_B = 2 = FT_{Fi}$ ⇒ B é atividade crítica

• A atividade B está em todos os c.c., logo uma mudança na sua duração vai afetar a d.m.p.

→ Ao reduzir d_B em mais do que uma unidade, não podemos estimar nova d.m.p. (pq a nova duração deste caminho não é d.m.p já que há outro caminho ⊕ longo)

C+L s/ B : A-C-E-F, com duração = 11

$\underbrace{d.m.p.^A - \text{redução de } B = 12 - 2 = 10}_{\text{nova duração do caminho que era anteriormente crítico}} < 11 = \text{duração (C+L s/B)}$

Logo,
{ • o caminho crítico atual deixa de ser crítico
• surge um novo caminho crítico : A-C-E-F
• a dmp^N = duração (C+L s/ B) = 11
• atividades críticas : A, C, E, F

iv) Aumentar d_D em 1 dia

$FT_D = 5 > FT_{Fi} = 2$ ⇒ D não é atividade crítica

• Como estamos a aumentar a duração, podem aparecer novos c.c, como tal é importante analisar.

aumento de $D = 1 < FT_D - FT_{Fi} = \underbrace{5 - 2 = 3}_{\text{o nº de dias que pode aumentar sem se tornar crítica}}$

Logo,

$\begin{cases} \text{d.m.p. mantém-se em 12 dias (dmp = 12)} \\ \text{o c.c. mantém-se} \\ \text{as atividades críticas mantêm-se} \end{cases}$

v) aumento de d_C em 1 dias

$FT_C = 3 > FT_{Fi}$ ⟹ logo C não é atividade crítica

aumento de $d_C = 1 \; (=) \; FT_C - FT_{Fi} = 3 - 2 = 1$

⇓

Logo, C passa a ser atividade crítica.

$\begin{cases} \text{d.m.p.} = 12 \text{ mantém-se} \\ \text{c.c. A - B - E - F continua a ser crítico} \\ \text{surge um novo c.c. : A - C - E - F} \end{cases}$

vi) aumento de d_C em 2 dias

$FT_C = 3 > FT_{Fi}$ ⟹ logo C não é atividade crítica

aumento de $d_C = 2 \; (>) \; FT_C - FT_{Fi} = 3 - 2 = 1$

⇓

Logo, C passa a ser atividade crítica

$\begin{cases} \text{d.m.p. aumenta em (aumento } d_C - (FT_C - FT_{Fi})) = 2 - 1 = 1 \text{ dia} \\ \quad \hookrightarrow \text{ ou seja d.m.p}^N = 12 + 1 = 13 \\ \text{o c.c. anterior deixa de ser crítico (A - B - E - F)} \end{cases}$

novo c.c. : A - C - E - F

20. nov. 2014

2c (continuação)

vii. aumentar d_F em 1 dia:

$FT_F = 2 = FT_{Fi} \Rightarrow$ F é atividade crítica

logo como vamos aumentar a duração da atividade crítica, de certeza que a dmp vai aumentar

$dmp^N = dmp^a +$ aumento de F

$= 12 + 1 = 13$

Dado que a atividade F é crítica e está em todos os c.c. (neste caso só existe 1) então:

$\begin{cases} \text{as atividades críticas mantêm-se} \\ \text{os c.c. mantêm-se} \end{cases}$

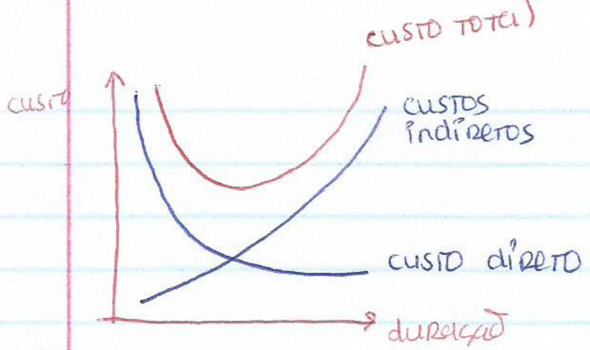
nota: caso existissem c.c. que não incluíssem F, então esses deixariam de ser críticos e apenas permaneceriam críticos aqueles que incluíssem F.
(os c.c. c/ F aumentam duração, logo os outros tornam-se necessariamente menores)

Sec. 4 - Redução da duração de projetos
(pp 22-30)

Motivos que poderão levar a ter de se reduzir a duração do projeto:

- o agendamento do projeto excede o prazo establecido
- evitar penalizações ou beneficiar de bonificações
- libertar recursos para outros projetos
- evitar condições climatéricas adversas
- compensação de eventuais atrasos

etc



→ custo direto : diz respeito à realização de cada atividade individualmente. (se encurto o projeto, tenho de pôr ⊕ recursos, é ⊕ caro

→ custo indireto : custos comuns a todo o projeto (ex: admin)

→ com base na curva de custo total conseguimos determinar a duração ótima do projeto.

- custo indireto não conseguimos calcular
- custo direto conseguimos

] → tendo um, conseguimos calcular custo total

Problema da redução da duração do projetos
(time cost trade-off problem / project acceleration problem)

• Para uma dada duração (d) pretendida, queremos saber quais as atividades a reduzir na sua duração e em quanto tempo reduzir a sua duração, de modo a que o custo direto seja mínimo. (no custo indireto não temos controlo, é determinado pelo gestor do projeto)
↓ f.o.

Reduzir a duração do projeto
↓
Reduzir a duração do caminho crítico
↓
Reduzir duração das atividades críticas
⇓
Decisão a tomar:
- que atividades reduzir?
- em quanto tempo reduzir cada uma delas?

Exercícios de projetos para aulas

(3) reduzir duração : começar na duração normal
parar na " mínima

Algoritmo de redução da duração de projetos

↳ escolher variável, testar, trocar, e de novo ciclicamente

→ Iteração Ø (Inicializações)

① Determinar os custos marginais das atividades por unidade de tempo

enunciado:

Atividades	Duração (dias) normal	Duração (dias) reduzida	custo direto (u.m) normal	custo direto (u.m) reduzida
A	2	1	1000	2000
B	4	2	2000	2500
C	3	2	1400	1800
D	3	2	1500	1800
E	2	1	800	1500
F	4	2	1600	2400
representação →	dK	$\underline{dK}$	cK	$\underline{cK}$

$$\Delta K = \frac{\underline{cK} - cK}{dK - \underline{dK}}$$

, o custo acrescido por cada unidade de tempo reduzida à duração da atividade

Tabela custo marginal

Atividade	custo marginal	Redução disponível (dias) Iteração Ø	Iter. 1	Iter 2	Iter 3	Iter 4	Iter 5
A	1000	1	1	1	1	1	0
B	250	2	1	1	0	0	0
C	400	1	1	1	0	0	0
D	300	1	1	1	1	1	1
E	700	1	1	1	1	0	0
F	400	2	2	0	0	0	0

↓
quanto é que podemos baixar ainda

② Determinar todos os caminhos possíveis

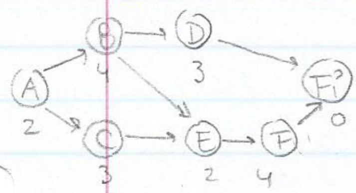


Tabela de caminhos possíveis

caminho	Duração (dias) Iter Ø	Iter 1	Iter 2	Iter 3	Iter 4	Iter 5
A-B-D	9	8	8	7	7	6
A-C-E-F	11	11	9	8	7	6
A-B-E-F	12	11	9	8	7	6

↓
duração do projeto

temos de manter atualização da duração do projeto p/ sabermos quando temos de parar de reduzir.

3° Calcular custo direto do projeto (somar os custos todos, pq o projeto só está concluído qd todas as atividades tiverem concluídas

custo direto do projeto na iteração $\emptyset = \Sigma CK = 8300$

Tabela Iterações

Iteração	Atividades reduzidas	valor da redução	duração do projeto	custo direto marginal	acrescido	projeto	novo caminho crítico
∅	—	—	12	—	—	8300	A-B-E-F
1	B	1	11	250	1×250	8300+250 = 8550	A-C-E-F
2	F	2	9	400	400×2	8550+800 = 9350	—
3	B, C	1	8	650	650×1	10.000	—
4	E	1	7	700	700×1	10.700	A-B-D
5	A	1	6	1000	1000×1	11.700	—

Iteração 1

1° Determinar as combinações de atividades cuja redução fará reduzir a duração do projeto.

combinação	A	B	E	F
custo marginal	1000	250	700	400

escolher a que tem o custo marginal menor
• combinação B

reduzir a duração da atividade B

2° Decidir em quantos dias reduzir a duração da atividade

Posso ↓ B em 2 dias, ia custar 500 u.m.
Se eu fizesse isso:
• caminho A-B-D ia ter duração 9
• " A-C-E-F " 11 (pq não inclui B)
• " A-B-E-F " 10

⇓

caminho crítico ia passar a ser A-C-E-F com dmp = 11, ou seja paguei p/ reduzir duração de B em 2 dias, mas o caminho ⊕ longo só baixa 1 unidade → não compensa.

Fazer:

$$\min\left(\begin{array}{l}\text{redução} \\ \text{disponível}\end{array} ; \begin{array}{l}\text{duração atual} \\ \text{do projeto}\end{array} \ominus \begin{array}{l}\text{duração c+L} \\ \text{s/ B}\end{array}\right)$$

$= \min(2, 12-11) = \min(2,1) = 1$

④ atualizar tabelas

Iteração 2

caminhos críticos: A-B-E-F] p/ reduzir duração do projeto,
A-C-E-F] reduzir duração do c.c.

combinações	A	B, C	E	F
custo marginal	1000	250+400=650	700	400

⇓

combinações que façam reduzir ambos os caminhos

Reduzir F : $\min(2 ; 11-8) = 2$

↳ caminho ⊕ longo existente que não inclui F : caminho A-B-D

como o valor mínimo é este, sabemos q̃ não surge um novo c.c.

Iteração 3

combinações	A	B, C	E
custo marg	1000	650	700

F não aparece pois já não pode reduzir mais

reduzir B e C : $\min(\underbrace{1}_{\text{redução de B}}, \underbrace{1}_{\text{redução de C}})$ → não há nenhum caminho sem B ou C, então a outra parcela ñ existe

Iteração 4

combinações	A	E
custo marg	1000	700

reduzir E : $\min(1 ; 8-7) = 1$

↳ como este tmb é mínimo, vai surgir novo c.c.

Iteração 5

temos de redefinir as combinações a reduzir porque, como há um c.c. novo, surgem novas combinações

Combinações de forma a que todos os caminhos sejam reduzidos

C.C. { A - B - D
A - B - E - F
A - C - E - F

combinações	A	~~B, C~~	~~D, E~~	~~D, F~~
custo marg	1000			

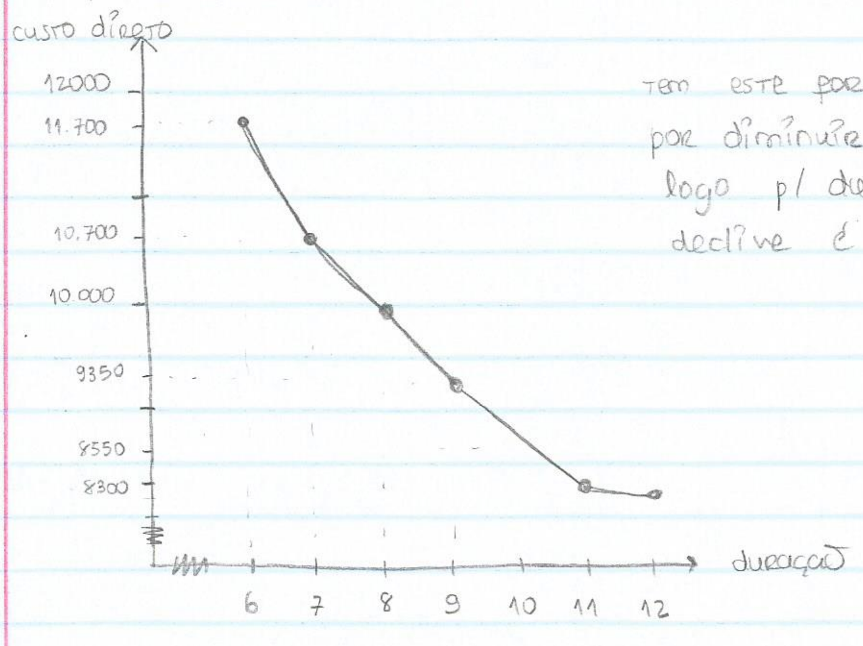
(uma delas ou ambas não tem redução disponível)

→ B e E não pq duplica no 2° C.C.

reduzir A em min (1) = 1
↳ ñ há C+L sem A

Iteração 6 : os C.C. mantêm-se os mesmos
não existem combinações de atividades que permitam reduzir duração do projeto → TERMINAR
(critério de paragem)
⇓ pode ser ≠, depende do enunciado
· já atingimos duração ou custo pretendido

Gráfico duração - custo direto



Tem este formato pq começamos por diminuir sempre as ⊕ baratas, logo p/ durações maiores o declive é menos acentuado.

25. nov. 2014

secção 5 - Gestão de recursos
(pp. 31 - 38)

$J = \{1, \dots n\}$ conjunto de atividades
d_j - duração das atividades j

F - data de fim da atividade j
a - quantidade máxima do recurso que estamos a controlar
assumimos que um recurso é escasso, como tal temos de o controlar
quantidade disponível em cada instante
$R(t)$ - quantidade de recurso que está a ser utilizada num determinado instante (instante t)
T - duração do projeto
em execução
$A(t)$ - conjunto das atividades ativas num determinado instante
$r(j)$ - quantidade de recurso necessária para a execução da atividade j num determinado instante

no instante em que termina já não consome recursos

$$\underbrace{F_j - d_j}_{\text{instante em que a atividade tem início}} \leq \underbrace{t}_{\text{instantes em que está ativa}} < \underbrace{F_j}_{\text{quando a atividade termina}}$$

Agendamento: $S = (F_1, F_2, \dots, F_n)$
datas de fim de cada atividade
definimos quando cada uma termina (consequentemente sabemos quando começa)

- agendamento de precedência admissível
- que respeita as precedências entre as atividades
- qqr agendamento tem de as respeitar

$$\underbrace{F_j - d_j}_{\text{data de início tem de ser maior que qqr uma precedente}} \geq \max_{h \in pred(j)} F_h$$

• agendamento de recurso admissível

- não exceder quantidade a disponível do recurso ao longo da realização do projeto.

$$\sum_{j \in A(t)} R_j \leq a \quad , \forall t \geq 0$$

sec 5.1 → Instrumentos de avaliação de agendamentos

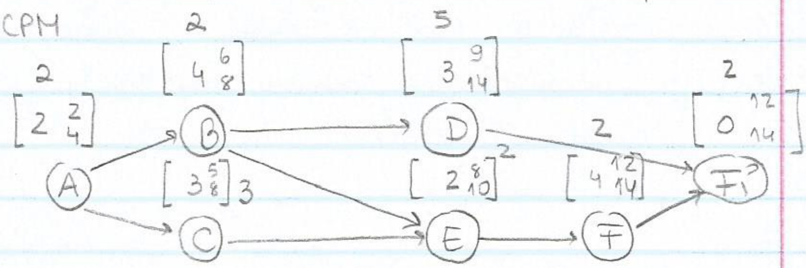
• ver folhas de apoio

Exercício de projetos para aulas

(4) a. Descrever os agendamentos $\boxed{S_E \text{ e } S_L}$ → obtidos pelo método CPM, garantem que é obtida a dmp.

<u>Agendamento S_E</u> - Aquele em que as atividades têm início o mais cedo possível ⇒ data de fim F_j da atividade j é a data de fim mais cedo obtida pelo método CPM

ou seja, $F_j = EF_j$



donde

$S_E = (2, 6, 5, 9, 8, 12)$
A B C D E F

↳ datas de fim + cedo possível (nº pequeno de cima)

↳ nºs em cima das caixas ⇒ FT_j

<u>Agendamento S_L</u> - a data de fim F_j da atividade j é a data de fim mais tarde de modo a não comprometer a d.m.p.

→ se fosse a não comprometer o prazo de conclusão do projeto, usávamos os nºs pequenos de baixo

→ mas o S_L não compromete a d.mp. que neste caso é menor que o prazo do projeto ⇒ temos de retirar folga

ou seja, $F_j = LF_j - \underbrace{FT_{Fi}}$

↳ folga dá-nos a ≠ entre o prazo de conclusão do projeto e a dmp.

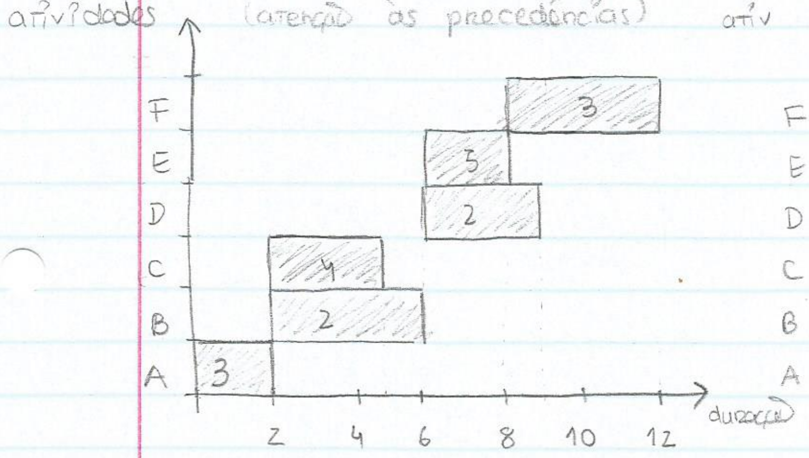
donde

$S_L = (4-2; 8-2; 8-2; 14-2; 10-2; 14-2)$ $\quad \boxed{FT_{Fi} = 2}$
A B C D E F

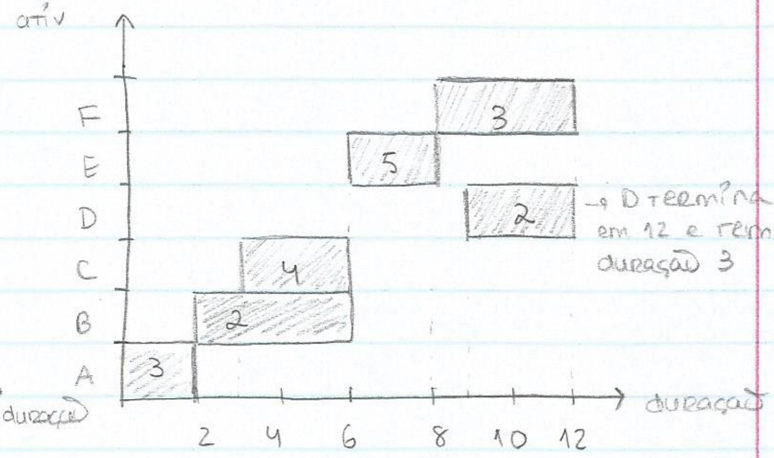
Entre SE e SL as únicas atividades que mudam são a C e a D, ou seja as não-críticas ⇒ as únicas que têm folga.

b) Diagrama de Gantt (dentro de cada atividade vou pôr o consumo de recursos a usar em c) → ver em enunciado)

para SE
↳ onde as atividades se desenrolam (atenção às precedências)



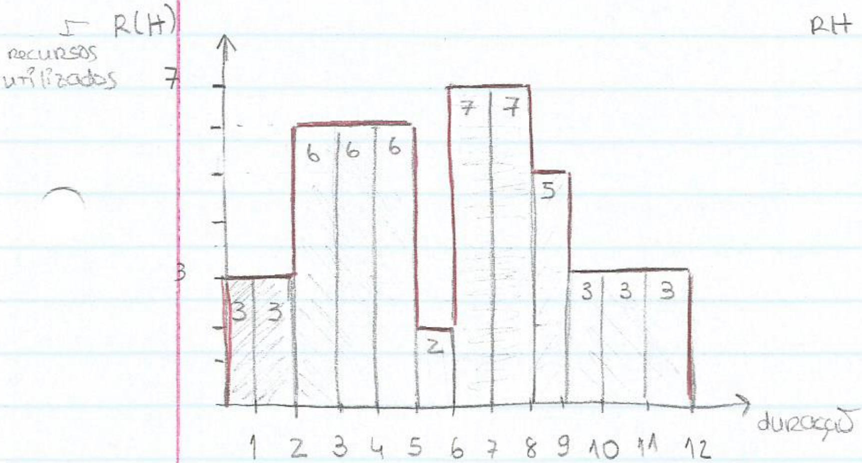
para SL



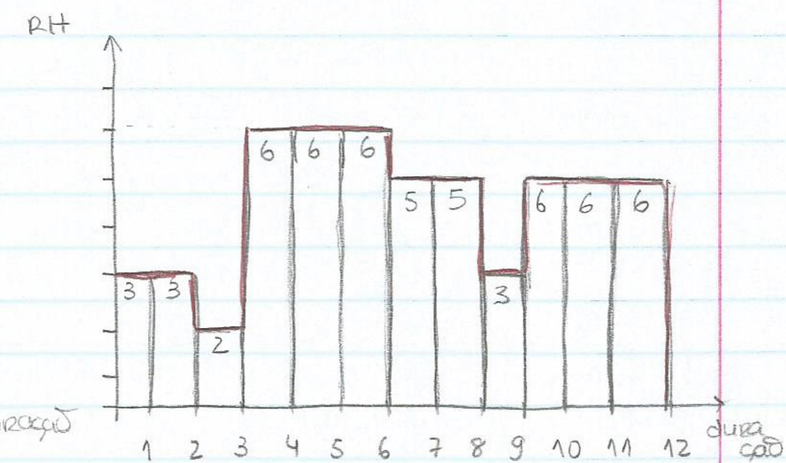
→ D termina em 12 e tem duração 3

c) Histograma de Alocação de Recursos (HAR)

para SE



para SL



⇒ Diagrama de Gantt : planificação das atividades } instrumentos
⇒ HAR : distribuição dos recursos que precisamos } mt importantes

d) Perfis de alocação de recursos : linha do perfil do histograma
↳ feito a vermelho em c)

27. nov. 2014

secção 5.2 - Afetação de recursos (pp. 36-39)

Exercício de projetos para aulas

(5) Estão disponíveis 5 unidades de recurso ⇒ a = 5

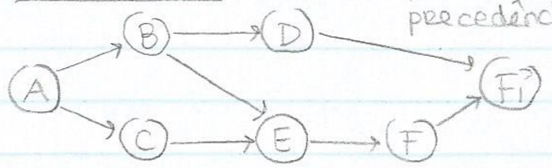
- Regras de prioridade : menor folga total desempate com menor duração.
(se não nos derem regra de prioridade, escolhemos uma fácil, como a duração)

Algoritmo : Heurística SGS - paralela

↳ produzem uma solução admissível (neste caso, garantem precedências e não exceder os recursos), mas não necessariamente a S.O.

j atividade	d_j duração	r_j recursos necessários	FT_j folga total
A	2	3	2
B	4	2	2
C	3	4	3
D	3	2	5
E	2	5	2
F	4	3	2

mt importante : ñ esquecer precedências !!



Heurística SGS-paralela : fornece um agendamento que respeita as precedência entre as actividades (i.e. precedência - admissível) e que não excede a qt. de recurso existente (i.e. recurso admissível)

(1º) ordenar as atividades usando a regra de prioridade fornecida.
(ordenamos com base na folga total, se houver empate usamos a duração, se ainda houver empate fazemos como quisermos)

A, E, B, F, C, D

atenção : a regra de prioridade serve apenas para definir a ordem de agendamento das atividades quando, num mesmo instante existir mais do que uma atividade que possa ser agendada.

Ter em atenção que as atividades selecionáveis num dado instante nunca poderá violar a relação de precedência entre as atividades.

Instante	atividades terminadas	atividades seleccionáveis	recurso disponível	atividades agendadas	Datas de fim
0	—	A(2;3)	5	A(2;3)	$F_A = 0+2 = 2$
			5-3=2		
2	A(2;3)	B(4,2) C(3,4)	2+3=5	B(4,2)	$F_B = 2+4 = 6$
		C(3,4)	5-2=3	recurso disponível não deixa agendar C	
6	B(4,2)	C(3,4) D(3,2)	3+2=5	C(3,4)	$F_C = 6+3 = 9$
		D(3,2)	5-4=1	recurso disp. não deixa agendar D.	
9	C(3,4)	E(2,5) D(3,2)	1+4=5	E(2,5)	$F_E = 9+2 = 11$
		D(3,2)	5-5=0	recurso disp não deixa agendar D.	
11	E(2,5)	F(4,3) D(3,2)	0+5=5	F(4,3)	$F_F = 11+4 = 15$
		D(3,2)	5-3=2	D(3,2)	$F_D = 11+3 = 14$
			2-2=0		

No instante 0 só há uma atividade inicial ⇒ A (duração ; recursos)
↳ Atividade é selecionável. Se houverem recursos suficientes fica agendada.
A termina, depois podemos fazer B e C (com base nas precedências).
Ordenamos com base na regra de prioridade.
Atualizamos constantemente os recursos.

→ Todas as atividades estão já agendadas → TERMINAR
(critério de paragem)

Agendamento obtido: $S = (F_A, F_B, \ldots, F_F) = (2, 6, 9, 14, 11, 15)$
com uma duração $T = \max F_j = 15$ dias

[mas atenção que, como isto é uma heurística não sabemos se esta é a duração mínima]

Atividades selecionáveis - atividades cujos predecessores já estão todos terminados, de forma a garantir a precedência entre atividades (que nunca poderá ser violada!)

i) De entre as atividades seleccionáveis num dado instante, estas serão agendadas usando a ordem de prioridade estabelecida.

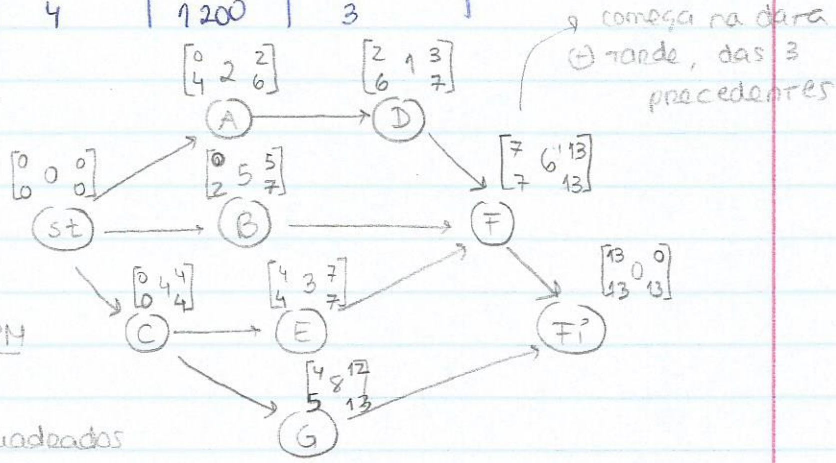
ii) Caso o recurso não seja suficiente para uma dada atividade prioritária, tenta-se agendar a que vem a seguir na ordem de prioridade (se esta for seleccionável também).

1. Dez. 2014

P12

Atividades	Duração normal (semana)	Custo normal	(sem) duração reduzida	Custo reduzido	Recurso necessário
A	2	500	1	800	8
B	5	900	3	1080	5
C	4	800	3	1000	2
D	1	400	1	400	4
E	3	1200	2	1800	6
F	6	700	4	900	5
G	8	600	4	1200	3

a) dmp = ?
caminho crítico (cc)



Para responder qual é a d.m.p → aplicar método CPM

→ datas mais cedo (preencher quadrados
↳ ex: atividade A começa quando st acaba, no zero, e acaba 2 momentos depois)

$ES_{st} = 0$

$ES_F = \max(3,5,7) = 7$

$EF_F = 7 + 6 = 13$

$dmp = EF_{Fi} - ES_{st} = 13 - 0 = 13$ semanas

→ datas mais tarde (começamos no final e fazemos o mesmo raciocínio

$LF_{Fi} = EF_{Fi} = 13$

ex: $LF_C = \min(4,5) = 4$

$LS_C = 4 - 4 = 0$

→ atividades críticas são tais que

$FT_i = FT_{Fi} \Rightarrow FT_B = 7-5 = 2$ (exemplo)

$FT_{Fi} = 0$, donde as atividades críticas são C, E, F.
Os caminhos críticos são totalmente constituídos por atividades críticas donde existe um único caminho crítico: C → E → F

b) reduzir dmp para 10 semanas?
menor custo direto

⇒ Algoritmo de redução da duração de projetos

- Tabela custo marginal : $\Delta_B = \frac{1080 - 900}{5-3} = 90$

Tabela caminhos possíveis

caminho	duração It Ø	It 1	It 2	It 3
A-D-F	9	8	8	7
B-F	11	10	10	9
C-E-F	13	12	11	10
C-G	12	12	11	10

Tabela custo marginal

Atividade	custo marginal	redução disponível It Ø	It 1	It 2	It 3
A	300	1	1	1	1
B	90	2	2	2	2
C	200	1	1	0	0
D	—	0	0	0	0
E	600	1	1	1	1
F	100	2	1	1	0
G	150	4	4	4	3

Iteração 1

combinações	C	E	F
custo marginal	200	600	100

dmp - duração c+L sem F

reduzir F em min (2 ; 13 - 12) = 1
custo acrescido
= 1 × 100 = 100 u.m

como não podemos reduzir tudo sabemos que surge um novo c.c.

Iteração 2

combinações	C	E, G	F, G
custo marginal	200	750	250

reduzir C em min (1 ; 12 - 10) = 1 → logo não aparece novo c.c.
custo acrescido = 1 × 200 = 200 u.m
só para, custo total acrescido = 100 + 200 = 300 u.m.
duração = 11 > 10 ⇒ continuar

critério de paragem

duração = 10 semanas ⇒ terminar

Iteração 3

combinações	E, G	F, G
custo marginal	750	250

todos os caminhos incluem F e G logo não temos de nos preocupar com novos C.C. que surjam.

reduzir F e G em $\min(1,4) = 1$

custo acrescido = $1 \times 2.50 = 250$ u m

custo total acrescido = $250 + 300 = 550$ u.m

conclusão:

Logo é possível reduzir para 10 semanas, o que vai representar um acréscimo de 550 u.m em custo direto.

como? reduzir C em 1 semana; F em 2 semanas, e G em 1 semana.

c) 14 unidades de recurso disponíveis semanalmente

regras de prioridade: maior duração, com desempate menor FT

Heurística SGS - Paralela

ordenar segundo a regra: (G, F, B, C, E, A, D)

Instante	atividades terminadas	atividades seleccionáveis	recurso disponível	atividade agendada	datas de fim
0	—	B(5;5) C(4;2) A(2;8)	14	B(5;5)	$F_B = 0 + 5 = 5$ ✓
		C(4;2) A(2;8)	9	C(4;2)	$F_C = 0 + 4 = 4$ ✓
		A(2;8)	7	não pq não há recurso suficiente	
4	C(4;2)	G(8;3) E(3;6) A(2;8)	7+2=9	G(8;3)	$F_G = 4 + 8 = 12$
	—	E(3;6) A(2;8)	6	E(3;6)	$F_E = 4 + 3 = 7$ ✓
		A(2;8)	0	não agendada pq não há rec. disp	
5	B(5;5)	A(2;8)	0+5=5	—	não agendada pq não há recursos disponíveis
7	E(3;6)	A(2;8)	5+6=11 11-8=3	A(2;8)	$F_A = 7 + 2 = 9$ ✓
9	A(2;8)	D(1;4)	3+8=11 11-4=7	D(1;4)	$F_D = 9 + 1 = 10$
10	D(1;4)	F(6;5)	7+4=11 11-5=6	F(6;5)	$F_F = 10 + 6 = 16$

F não pq precisa q D esteja feita

critério de paragem: todas as atividades já estão agendadas ⇒ terminar

Agendamento obtido: S = (9; 5; 4; 10; 7; 16; 12)

duração: $\max F_j = 16$ semanas

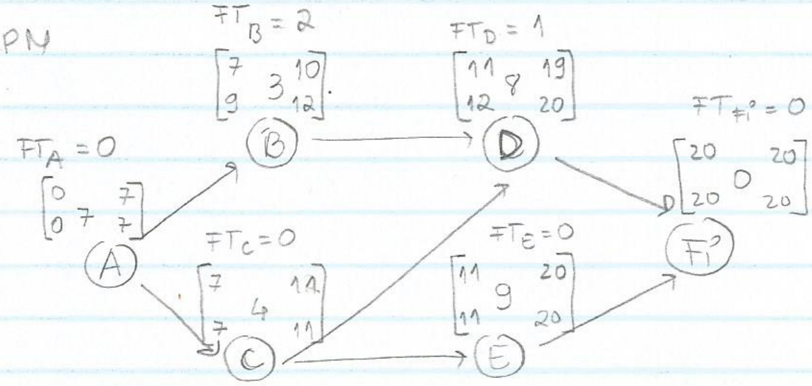
Agendamento SE tem uma duração = dmp = 13 semanas. Logo haverá um atraso de 3 semanas com o agendamento S.

3. Dez. 2014

Exame 16. jan. 2013

Q5. a) dmp => método CPM

- datas mais cedo



$ES_A = 0$

$ES_D = \max(10; 11)$

(...)

$dmp = EF_{Fi} - ES_A = 20 - 0 = 20$ dias

b) Temos de ver as atividades que têm folga total nula, ou seja as atividades críticas.

se $FT_i = FT_{Fi}$

→ Datas mais tarde : não nos dão data de conclusão, então assumimos $LF_{Fi} = EF_{Fi}$ (andar para trás)

$LF_C = \min(12, 11)$
$LF_A = \min(9, 7) = 7$
$LS_C = 11 - 4 = 7$

} exemplificar alguns cálculos

→ Folgas totais das atividades

$FT_B = 12 - 10 = 2$

Dado que $FT_{Fi} = 0$, então as atividades críticas são : A, C, E

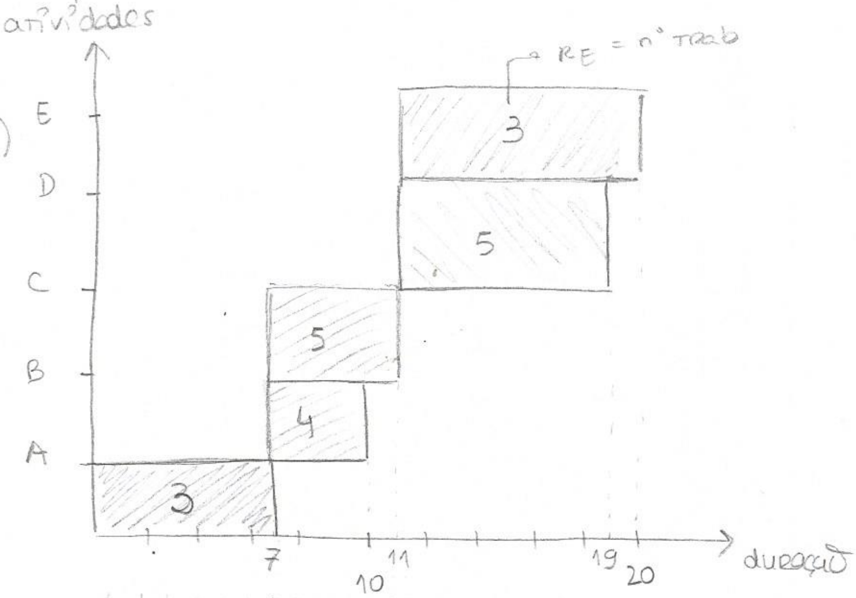
Existe um único caminho crítico : A → C → E

c) prazo = 18 dias → redução de 2 dias

→ Algoritmo de redução da duração de projetos

d) Disponibilidade : até 7 trabalhadores por dia

Agendamento S_E é recurso admissível?



Agendamento $S_E = (\overset{A}{7}; \overset{B}{10}; \overset{C}{11}; \overset{D}{19}; \overset{E}{20})$

é tal que cumpre a dmp e todas as atividades são agendadas para terminar o mais cedo possível, $F_j = EF_j$.

em vez do Diagrama de Alocação de recursos fazemos a barra ⟹ recursos utilizados (nº trab)

3 3 3 3 3 3 9 9 9 5 8 8 8 8 8 8 8 8 3

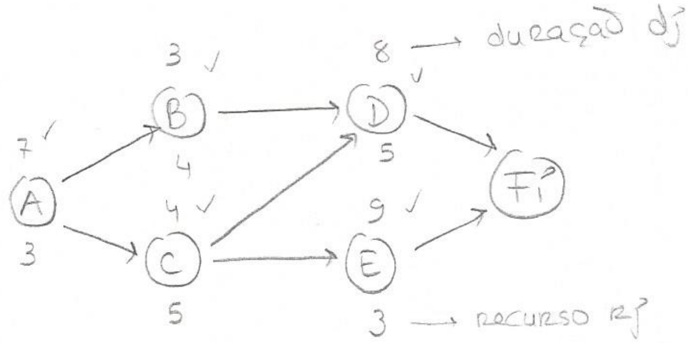
conclusão : o agendamento S_E não é recurso admissível porque há vários dias em que são necessários mais de 7 trabalhadores. Por exemplo, no dia 8 são precisos 9 trabalhadores.

e) Para ser admissível : recurso admissível e precedência admissível

4. Dez. 2014

Heurística SGS - Paralela

regra de prioridade : maior duração
(E, D, A, C, B)



Instante	Atividades terminadas	Atividades seleccionáveis	recurso disponível	atividades agendadas	datas de fim
0	—	A (7,3)	8 8 - 3 = 5	A(7,3)	7
7	A(7;3)	C(4;5) B(3;4) B(3;4)	5+3 = 8 8-5 = 3	C(4;5) recurso insuficiente p/ agendar B	7+4 = 11
11	C(4;5)	E(9;3) B(3;4)	5+3 = 8 8-3 = 5 5-4 = 1	E(9;3) B(3;4)	11 + 9 = 20 11 + 3 = 14
14	B(3;4)	D(8;5)	1+4 = 5 5-5 = 0	D(8;5)	14+8 = 22

critério de paragem : já foram agendadas todas as atividades → TERMINAR

Agendamento S = (7 ; 14 ; 11 ; 22 ; 20)

Iteração ∅ - Tabela Custo Marginal ⇒ dmp = 20 > 18
" Caminhos possíveis

Tabela Custo Marginal

		Redução disponível			
Atividades	custo mg	iteração 0	iteração 1	iteração 2	iteração 3
A	2000	3	3	3	
B	1500	1	1	1	
C	2500	2	2	2	
D	300	3	3	2	
E	700	3	2	1	

$$\Delta A = \frac{9000 - 3000}{7 - 4} = \frac{6000}{3} = 2000$$

Tabela Caminhos Possíveis

	Duração (dias			
caminho	iteração 0	iteração 1	iteração 2	iteração 3
A → B → D	18	18	17	
A → C → D	19	19	18	
A → C → E	20	19	18	

Iteração 1 → do caminho crítico

Combinações atividades	A	C	E
custo mg	2000	2500	700

Reduzir E em min (3 ; 20 - 19) = 1

(redução disp; dmp - caminho + longo sem E)

logo aparece novo C.C: A → C → D

dmp = 20 - 1 = 19 dias > 18 dias
custo direto acrescido = 1 × 700 u.m = 700 u.m

Iteração 2

combinações atividades	A	C	D, E
custo marginal	2000	2500	1000

podemos
Reduzir D e E em min (3 ; 2) = 2

(redução disp D; redução disp E)

ñ há 3° membro pq todos os caminhos têm D ou E

Para obter a duração de 18 dias basta reduzir D e E em 1 dia. → Terminar

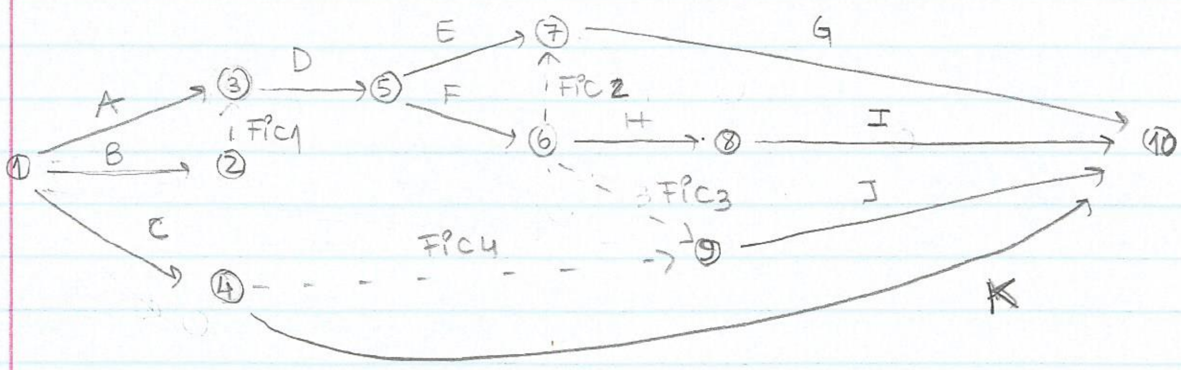
custo direto acrescido = 1 × 1000 = 1000 u.m
custo total direto acrescido = 700 + 1000 = 1700 u.m → custo mínimo para obter uma duração de 18 dias.

- Reduzir a atividade D em 1 dia e a atividade E em 2 dias.

Q6

Atividades	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Pred	–	–	–	A,B	D	D	E,F	F	H	C,F	C

Rede ANA



Q1 montante disponível = € 250.000
atingir no mínimo 50.000 px
max índice de percepção da qualidade

a)

Variáveis de decisão

x_i – nº de vezes que o meio publicitário i é usado para publicitar o novo produto, $i = 1, \ldots, 5$ (num período de 2 meses)

Formulação em PL

$$\max IPQ = 3 \times 12.000\, x_1 + 7 \times 1500\, x_2 + 8 \times 2000\, x_3 + 2 \times 6000\, x_4 + 3 \times 9000\, x_5$$ (percepção da qualidade)

s.a. $12.000\, x_1 + 8000\, x_2 + 12.000\, x_3 + 9000\, x_4 + 51.000\, x_5 \leq 250.000$ (montante disp)

$12.000\, x_1 + 15.000\, x_2 + 2000\, x_3 + 6000\, x_4 + 9000\, x_5 \geq 50.000$ (pop a atingir)

$x_1 \leq 4$; $x_2 \leq 2$; $x_3 \leq 8$; $x_4 \leq 60$; $x_5 \leq 8$ ↳ utilização máxima de cada tipo de meio publicitário

$x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 5$
e inteiros

b) $6000\, x_4 + 9000\, x_5 \geq 18000$
ou
$1500\, x_2 + 2000\, x_3 \geq 3000$

precisamos de uma binária

⇓

$6000\, x_4 + 9000\, x_5 \geq 18.000\, y$

$1500\, x_2 + 2000\, x_3 \geq 3000\,(1-y)$

$y \in \{0;1\}$

c) $x_4 + x_5 \geq 6Z$ $\Rightarrow Z = 0 \Rightarrow x_4 + x_5 \geq 0$ X

$x_4 + x_5 \leq MZ$ por isso acrescentar:

$Z \in \{0;1\}$ $Z=0 \Rightarrow \begin{cases} x_4 + x_5 \geq 0 \\ x_4 + x_5 \leq 0 \end{cases}$ ✓

com M é um valor positivo suficientemente grande, ou qqr valor $\geq 60+8$

$Z = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dots \geq 6 \\ \dots \leq M \end{cases}$ ✓