Novo Espaço – Matemática A 10.º ano

Proposta de Teste **[Março 2017]**

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1.ª Parte

Para cada questão indica a opção que consideras correta.

1. No espaço, em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considera a esfera definida pela condição $x^2+\left(y+1\right)^2+z^2\leq 4$.

Um ponto A do 3.º octante pertence à esfera. As coordenadas de A podem ser:

(A) $\left(-1,1,1\right)$ **(B)** $\left(-1,-1,2\right)$ **(C)** $\left(-1,-1,-1\right)$ **(D)** $\left(-1,-2,1\right)$

2. Em relação a um referencial o.n. $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ sabe-se que $\vec{u}=3\vec{i}-8\vec{j}+\vec{k}$ e $A\left(3,0,-6\right)$.

Se $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, então pode concluir-se que as coordenadas do ponto B são:

(A) $\left(-6,8,-5\right)$ **(B)** $\left(3,-8,1\right)$ **(C)** $\left(6,-8,-5\right)$ **(D)** $\left(0,-8,7\right)$

3. Em relação a um referencial o.n. Oxy considera a reta r paralela ao eixo das ordenadas e que passa no ponto $A\left(-2,6\right)$.

O valor de k para o qual o ponto $P\left(3k-4,8k+2\right)$ pertence à reta r é:

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** -2 **(C)** 1 **(D)** $\frac{2}{3}$

4. Considera a função f , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $f\left(x\right)=\frac{1-3x}{2}$.

Seja f^{-1} a função inversa de f . Então, pode concluir-se que $f^{-1}\left(-10\right)$ é igual a:

(A) 7 **(B)** $\frac{1}{10}$ **(C)** 10 **(D)** $\frac{2}{31}$

5. Considera a família de funções afins f definida por $f\left(x\right)=2x+kx-5;\ \ k\in\mathbb{R}$.

Os valores de k para os quais as funções desta família são decrescentes são:

(A) $\left]-\infty,0\right[$ **(B)** $\left]-\infty,-2\right[$ **(C)** $\left]2,+\infty\right[$ **(D)** $\left]-\infty,2\right[$

2.ª Parte

Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Num plano, em relação a um referencial o.n. Oxy, considera o ponto $A\left(\frac{1}{2},3\right)$ e as retas r e s definidas por:

$$r: \begin{cases} x=-1+3k \\ y=5-4k \end{cases}, \ k\in\mathbb{R} \qquad\qquad s:\ 4x+3y-24=0$$

1.1. Mostra que:

a) o ponto A pertence à reta r;

b) as retas r e s são paralelas.

1.2. Sejam B e C os pontos de interseção da reta s, respetivamente, com o eixo Ox e com o eixo Oy. Determina o perímetro do triângulo $[OBC]$.

2. No espaço, em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considera o vetor $\vec{u}(-1,2,-3)$ e o ponto $A(-2,3,-1)$.

Seja r a reta que passa em A e tem a direção do vetor $\vec{u}$.
Determina as coordenadas do ponto P, interseção da reta r com o plano $z=2$.

3. Considera as funções f e g tais que $f: A\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- $G_f=\{(-1,2),(0,0),(1,3),(2,2),(3,6)\}$
- $g(x)=-\frac{2x}{3}+2$

3.1. Indica o contradomínio da função f.

3.2. Indica, justificando o valor lógico da proposição:

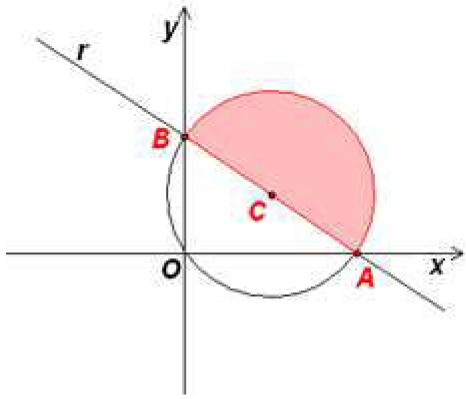
$$\forall x_1,x_2\in A,\quad x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

3.3. Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representadas uma reta r e uma circunferência de centro C.

Sabe-se que:

- a reta r é uma representação gráfica da função g, sendo A e B os pontos de interseção, respetivamente, com Ox e com Oy;

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência de centro C.



Define por uma condição a região colorida da figura, incluindo a fronteira.

4. Considera as funções afins f e g tais que $f(x)=3x-1$ e $g(x)=\frac{x}{2}+1$.

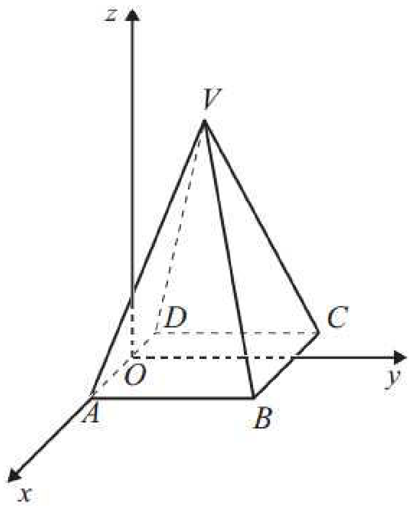
4.1. Determina $f \circ g(4)$.

4.2. Considera os conjuntos:

$$A=\{x:\ f(x)>0\} \qquad \text{e} \qquad B=\{x:\ g(x)\leq 0\}$$

Representa sob a forma de intervalo de números reais o conjunto C, sendo $C=\overline{A\cup B}$.

5. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.



Sabe-se que:

• a base $[ABCD]$ está contida no plano xOy;

• os vértices A e D pertencem a Ox e O é o ponto médio de $[AD]$;

• o vértice V tem coordenadas $(0, x, 2x+1)$, $x>0$.

5.1. Indica , em função de x, as coordenadas dos vértices da base da pirâmide.

5.2. Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina as coordenadas do vértice V de modo que o volume da pirâmide seja 20 (unidades de volume).

Na tua resolução deves apresentar:

– a expressão da função que a cada valor de x faz corresponder o volume da pirâmide;
– reproduzir num referencial o gráfico ou gráficos visualizados na calculadora;
– assinalar o ponto relevante para a resposta e indicar a abcissa desse ponto, arredondada às décimas;
– utilizar o valor referido no ponto anterior e indicar as coordenadas do vértice V.

FIM

	Cotações															
	1.ª Parte					2.ª Parte										
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**1.1. a)**	**1.1. b)**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**
Cotações	8	8	8	8	8	12	12	20	20	10	12	20	12	15	12	15

1.ª Parte

1. $A(x, y, z)$ tal que $x<0 \wedge y<0 \wedge z>0 \wedge x^2+(y+1)^2+z^2 \leq 4$.

Opção (D)

2. $\vec{u}(3,-8,1)$, $A(3,0,-6)$ e $B(x, y, z)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(x-3, y, z+6)$

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=3 \\ y=-8 \\ z+6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-8 \\ z=-5 \end{cases}$$

O ponto B tem coordenadas $(6,-8,-5)$.

Opção (C)

3. Uma equação da reta r: $x=-2$

O ponto $P(3k-4, 8k+2)$ pertence à reta r se e só se $3k-4=-2$, ou seja, $k=\frac{2}{3}$.

Opção (D)

4. $f(x)=-10 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{2}=-10 \Leftrightarrow x=7$

$f^{-1}(-10)=7$

Opção (A)

5. $f(x)=(2+k)x-5$

A função f é decrescente se e só se $2+k<0$, ou seja, $k<-2$.

Opção (B)

2.ª Parte

1.1. a) $A\left(\frac{1}{2},3\right)$

O ponto A pertence à reta r se e só se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = -1+3k \\ 3 = 5-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como existe $k = \frac{1}{2}$, conclui-se que A pertence à reta r.

1.1. b) Das equações paramétricas da reta r identifica-se o vetor $\vec{v}(3,-4)$ como sendo um vetor diretor da reta r. O declive da reta r é igual a $-\frac{4}{3}$.

A reta s pode ser representada pela seguinte equação na forma reduzida: $y = -\frac{4}{3}x+8$, sendo o declive $-\frac{4}{3}$. Como as retas r e s têm igual declive, conclui-se que são paralelas.

1.2. s: $y = -\frac{4}{3}x+8$

A interseção da reta s com o eixo Ox é o ponto $A(x,0)$ tal que $0 = -\frac{4}{3}x+8$, ou seja, $x = 6$.

Assim, tem-se $A(6,0)$.

A interseção da reta s com o eixo Oy é o ponto $B(0,y)$, sendo y a ordenada na origem da reta s, ou seja, 8. Assim, tem-se $B(0,8)$.

O perímetro do triângulo $[OBC]$ é dado por: $\overline{OB}+\overline{OA}+\overline{AB}$.

$\overline{OB} = 8$, $\overline{OA} = 6$ e $\overline{AB} = \sqrt{(6-0)^2+(0-8)^2} = \sqrt{36+64} = 10$

Assim, tem-se $\overline{OB}+\overline{OA}+\overline{AB} = 8+6+10 = 24$.

O perímetro do triângulo $[OBC]$ é igual a 24 (unidades de comprimento).

2. Uma equação vetorial da reta r:

$$(x,y,z) = (-2,3,-1)+k(-1,2-,3)\ , k \in \mathbb{R}$$

O ponto P tem coordenadas $(x,y,2)$ e pertence à reta r.

Assim, tem-se:

$$(x,y,2) = (-2,3,-1)+k(-1,2,-3),\ k \in \mathbb{R}$$

Daqui resulta que:

$$\begin{cases} x=-2-k \\ y=3+2k \\ 2=-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+\dfrac{2}{3} \\ y=3-\dfrac{4}{3} \\ k=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \\ k=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

O ponto P tem coordenadas $\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right)$.

3.1. $D'_f=\{f(-1),f(0),f(1),f(2),f(3)\}$

$f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=6$

$D'_f=\{0,2,3,6\}$

3.2. A proposição $\forall x_1,x_2\in A,\quad x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ é falsa.

Basta observar que a função f é não injetiva. Pois, $-1\neq 2$ e $f(-1)=f(2)=2$.

3.3. $g(x)=-\frac{2x}{3}+2$

A reta r pode ser definida pela equação $y=-\frac{2x}{3}+2$.

O ponto A tem coordenadas $(x,0)$ e $0=-\frac{2x}{3}+2$, ou seja, $x=3$. Assim, o ponto A tem coordenadas $(3,0)$. O ponto B tem coordenadas $(0,2)$, atendendo a que 2 é a ordenada na origem da equação reduzida da reta r .

O ponto C, centro da circunferência, é o ponto médio de $[AB]$. Assim, tem-se $C\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)$, ou seja, $C\left(\frac{3}{2},1\right)$.

O raio da circunferência é igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$. Como $\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{13}$, o raio é igual $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

A região colorida representada na figura pode ser definida pela condição:

$$y\geq -\frac{2x}{3}+2 \wedge \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2\leq\frac{13}{4}$$

4. $f(x)=3x-1$ e $g(x)=\frac{x}{2}+1$

4.1. $f\circ g(4)=f(g(4))=f(3)=8$

Assim, tem-se: $f\circ g(4)=8$.

4.2. $A=\{x:\ f(x)>0\}$ e $B=\{x:\ g(x)\le 0\}$.

$$f(x)>0 \Leftrightarrow 3x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3} \qquad A=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$$

$$g(x)\le 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+1\le 0 \Leftrightarrow x+2\le 0 \Leftrightarrow x\le -2 \qquad B=\left]-\infty,-2\right]$$

Então, $A\cup B=\left]-\infty,-2\right]\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$. Daqui resulta que $\overline{A\cup B}=\left]-2,\frac{1}{3}\right]$.

5.1. $V(0,x,2x+1)$

Sendo a pirâmide quadrangular regular, a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano xOy é o ponto de coordenadas $(0,x,0)$, centro do quadrado $[ABCD]$.

Coordenadas dos vértices da base da pirâmide:

$A(x,0,0)$, $B(x,2x,0)$, $C(-x,2x,0)$ e $D(-x,0,0)$

5.2. Área da base da pirâmide, em função de x, é dada por $(2x)^2$, ou seja, $4x^2$.

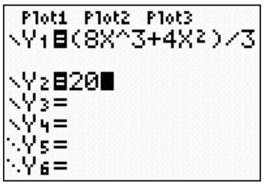
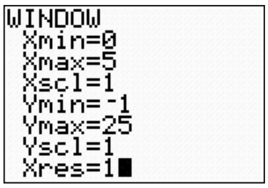
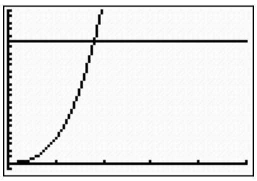
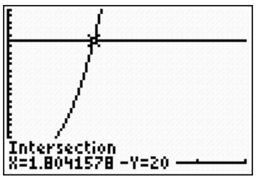
Altura da pirâmide, em função de x, é igual à cota do vértice V, ou seja, $2x+1$.

Volume da pirâmide, em função de x, é igual a $\frac{1}{3}\times(4x^2)(2x+1)$, ou seja, $\frac{8x^3+4x^2}{3}$.

Pretende-se determinar x, de modo que $\frac{8x^3+4x^2}{3}=20$.

Recorrendo à calculadora, pode-se obter o valor pretendido procedendo tal como é sugerido a seguir.

Resolver graficamente a equação $\frac{8x^3+4x^2}{3}=20$.

1. Definir funções.		**2.** Escolher a janela de visualização adequada.	
3. Visualizar as representações gráficas.		**4.** Identificar o ponto de interseção dos gráficos e obter respetivas coordenadas.	

O valor de x arredondado às décimas é 1,8.

Assim, as coordenadas do vértice V são $(0;\ 1{,}8;\ 4{,}6)$.

Nota: a ordenada e a cota são valores não exatos.

FIM