Proposta de Teste [abril – 2018]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

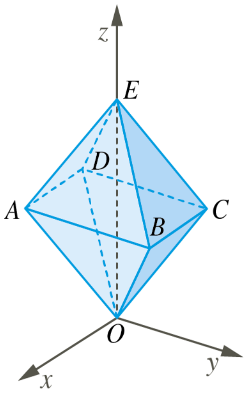
CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular $[OABCDE]$.
Sabe-se que:

. os vértices O e E pertencem ao eixo Oz;

. o plano BCE é definido pela equação $2y+\sqrt{2}\,z-12=0$;

. a reta AB é definida pela equação $(x, y, z)=\left(3, 0, 3\sqrt{2}\right)+k(0,1,0)$; $k\in\mathbb{R}$.



1.1. Determina as coordenadas do ponto B.

1.2. Considera todas as sequências de seis elementos formadas pelas letras O, A, B, C, D e E, que representam os vértices do octaedro.

Quantas dessas sequências começam por uma consoante e têm as vogais juntas?

(A) 108 **(B)** 360 **(C)** 60 **(D)** 120

1.3. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices do octaedro.

Determina a probabilidade de ser escolhido o vértice A, sabendo que a reta definida pelos vértices escolhidos não é paralela ao plano xOy.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z_A=3-2i$.

Seja S a região do plano complexo definida pela condição:

$$|z-z_A|\le|-3i| \;\wedge\; \operatorname{Im}(z)\le\operatorname{Im}(z_A)$$

O perímetro da região S, arredondado às centésimas, é igual a:

(A) 4,71 **(B)** 14,14 **(C)** 15,42 **(D)** 18,85

3. Numa casa houve uma rutura na instalação de água, tendo sido detetada uma mancha numa das paredes da casa.

A área da superfície da mancha foi aumentando até ao momento em que a rutura foi reparada. A partir desse momento a mancha foi diminuindo até desaparecer.

Admite que a área da mancha, t horas após ter sido detetada, é dada em metros quadrados, pela função definida por: $f(t)=\sqrt{\dfrac{2t+0,7}{e^{0,3t}}}$.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e resolve o seguinte problema:

Quanto tempo decorreu, após a reparação da rutura,

até a área da mancha atingir 25% da área detetada inicialmente?

Na tua resposta deves:

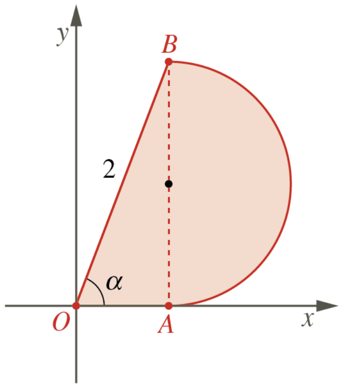
- Equacionar o problema.
- Reproduz num referencial o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizares na calculadora e assinalar pontos relevantes para a resolução do problema e as respetivas coordenadas.
- Apresentar a resposta na forma $\boxed{\cdots}$ h $\boxed{\cdots}$ min (os minutos arredondados às unidades).

FIM (Caderno 1)

Cotações						Total
Questões – Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.**	
Pontos	10	15	15	10	20	**70**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

1. Na figura, em referencial o.n. xOy, está representada uma região sombreada do plano constituída por um triângulo retângulo e um semicírculo.



Sabe-se que:

. $\overline{OB} = 2$

. a reta AB é paralela a Oy e o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;

. α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

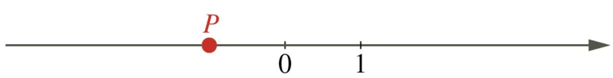
Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, que a cada valor de α faz corresponder a área da região da região sombreada.

1.1. Mostra que $\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(\alpha) = \sin(2\alpha) + \frac{\pi}{2}\sin^2 \alpha$.

1.2. Recorre ao resultado obtido em **1.1** e indica o valor de $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{8}} \dfrac{f(\alpha) - f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\alpha - \frac{\pi}{8}}$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi}{2}$ **(B)** $\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{2}$ **(C)** $\dfrac{\pi}{2}$ **(D)** $\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 12]$ medido em segundos.



A abcissa de P, em cada instante t, é dada por $x(t) = 2{,}5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$.

2.1. Mostra que $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

2.2. Responde às questões seguintes, atendendo ao resultado obtido em **2.1.**.

a) Determina $t \in [0, 12]$ tal que a distância de P à origem seja igual a 5.

b) Determina o valor de k de modo que $x''(t) = k\,x(t)$.

c) Calcula $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \dfrac{x(t)}{2t-1}$.

d) O valor da frequência deste oscilador harmónico é:

(A) $\dfrac{1}{5}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{4}$ **(D)** $\dfrac{1}{3}$

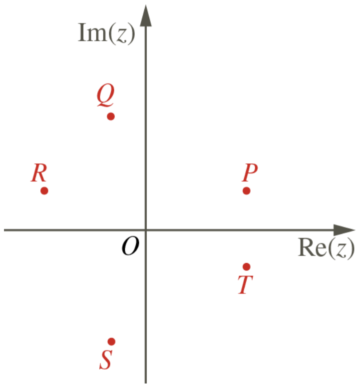
3. Na figura estão representados, no plano complexo, os pontos *P*, *Q*, *R*, *S* e *T*.

Sabe-se que:

. o ponto *P* é o afixo de um número complexo z;

. $w = -\overline{z}\,\mathrm{i}$

Qual dos pontos assinalados na figura pode ser o afixo do número complexo w?



(A) R **(B)** T **(C)** S **(D)** Q

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera:

$$z_1 = (2+\mathrm{i})^2 - 3\mathrm{i} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{5\mathrm{i}}{\overline{z_1}}$$

4.1. Representa na forma $a+b\mathrm{i}$; $a, b \in \mathbb{R}$ o número complexo z_2.

4.2. Representa no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição:

$$|z - z_1| \leq 2 \ \wedge \ |z| \geq 3$$

FIM (Caderno 2)

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.						
Pontos	10	15	15	10	20					Total	70
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	1.1.	1.2.	2.1.	2.2. a)	2.2. b)	2.2. c)	2.2. d)	3.	4.1.	4.2.	
Pontos	15	10	15	15	15	15	10	10	15	10	Total	130
Total											200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.1. Qualquer ponto da reta *AB* é do tipo $\left(3, k, 3\sqrt{2}\right)$; $k \in \mathbb{R}$.

Em particular, o ponto *B* é do tipo $\left(3, k, 3\sqrt{2}\right)$; $k \in \mathbb{R}$ e pertence ao plano *BCE*.

Então, $2 \times k + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - 12 = 0$. Daqui resulta que $k = 3$.

Se $k = 3$, então $B\left(3,\ 3,\ 3\sqrt{2}\right)$.

Resposta: $B\left(3,\ 3,\ 3\sqrt{2}\right)$

1.2. Para a primeira letra da sequência há três possibilidades.

O grupo das vogais e as restantes duas consoantes podem permutar entre si de $3!$ maneiras.

As vogais entre si podem permutar de $3!$ maneiras.

No total, o número de sequências a começar em consoante e as vogais juntas é dado por:

$$3 \times 3! \times 3!$$

$3 \times 3! \times 3! = 3 \times 6 \times 6 = 108$

Opção: (A) 108

1.3. Sejam *R* e *S* os seguintes acontecimentos:

R: “É escolhido o vértice *A*”

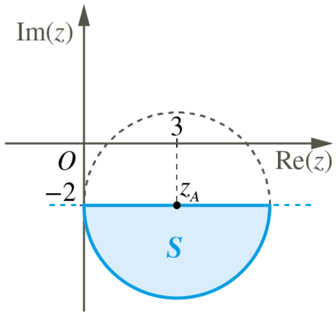
S: “A reta definida pelos pontos escolhidos não é paralela ao plano *xOy*”

Pretende-se obter o valor da seguinte probabilidade condicionada: $P\left(R \middle| S\right)$

$$P\left(R \middle| S\right) = \frac{P\left(R \cap S\right)}{P\left(S\right)} = \frac{\dfrac{{}^{2}C_{1}}{{}^{6}C_{2}}}{\dfrac{{}^{6}C_{2} - {}^{4}C_{2}}{{}^{6}C_{2}}} = \frac{\dfrac{2}{15}}{\dfrac{15-6}{15}} = \frac{2}{9}$$

Resposta: $\dfrac{2}{9}$

2. A condição dada define um semicírculo de raio 3, tal como está representado na figura.



Assim, o perímetro da região S é dado por:

$$2r + \frac{2\pi r}{2} = 2r + \pi r = 6 + 3\pi$$

$6 + 3\pi \approx 15,42$

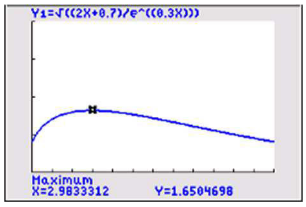
Opção: (C) 15,42

3. Área da mancha no momento em que foi detetada:

$$f(0) = \sqrt{\frac{0,7}{e^0}} = \sqrt{0,7}$$

O momento em que se procedeu à reparação corresponde ao máximo da função.

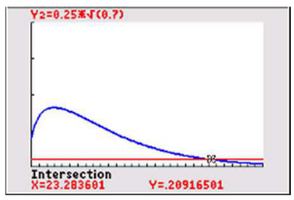
Após inserir a expressão da função na calculadora, identifica-se o instante em que esta atinge o valor máximo, considerando uma janela com $x_{mín} = 0$, uma vez que $t \geq 0$.



Verifica-se que esse instante ocorre para $t \approx 2,9833$.

Pretende-se resolver a equação $f(x) = 0,25 \times \sqrt{0,7}$.

Para isso, insere-se a função definida por 25% da área detetada inicialmente, ou seja, $g(x) = 0,25 \times \sqrt{0,7}$ e identifica-se o ponto de interseção dos gráficos de f e g, fazendo o ajuste necessário à janela de visualização.



Identifica-se o ponto de coordenadas: $(23,284;\ 0,209)$

O tempo decorrido após a reparação é dado por: $23,284 - 2,983 = 20,301$.

$0,301 \times 60 = 18,06$

Após a reparação decorreram, aproximadamente, 20,301 horas, ou seja, 20 h 18 min.

Resposta: 20 h 18 min

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

1.1. $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{2} \Rightarrow \overline{OA} = 2\cos\alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{2} \Rightarrow \overline{AB} = 2\sin\alpha$

Área do triângulo [OAB]: $\dfrac{\overline{OA}\times\overline{AB}}{2} = \dfrac{2\cos(\alpha)2\sin(\alpha)}{2} = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$

Raio do semicírculo: $\dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{2\sin\alpha}{2} = \sin\alpha$

Área do semicírculo de raio $r = \sin\alpha$: $\dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{\pi\sin^2(\alpha)}{2}$

Área da região sombreada: $f(\alpha) = \sin(2\alpha) + \dfrac{\pi\sin^2(\alpha)}{2}$

1.2. $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{8}} \dfrac{f(\alpha) - f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\alpha - \frac{\pi}{8}} = f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

$$f'(\alpha) = \left(\sin(2\alpha) + \frac{\pi\sin^2(\alpha)}{2}\right)' = 2\cos(2\alpha) + \frac{\pi}{2}\times 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\cos(2\alpha) + \frac{\pi}{2}\sin(2\alpha)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

Opção: (D) $\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

2.1. $5\cos\left(\dfrac{\pi t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 5\left(\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= 5\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\right) = 2{,}5\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\right) = x(t)$

Assim, tem-se $x(t) = 5\cos\left(\dfrac{\pi t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.2. **a)** $x(t)=5 \vee x(t)=-5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1 \vee \cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge t\in[0,12] \Leftrightarrow 2t+1=4k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge t\in[0,12] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{4k-1}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge t\in[0,12] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=1,5 \vee t=3,5 \vee t=5,5 \vee t=7,5 \vee t=9,5 \vee t=11,5$

Soluções: 1,5; 3,5; 5,5; 7,5; 9,5 e 11,5

b) $x(t)=5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$x'(t)=\left(5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=-5\times\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x''(t)=\left(-5\times\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=-5\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x''(t)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x(t)$$

Daqui resulta que $k=-\frac{\pi^2}{4}$.

Resposta: $-\frac{\pi^2}{4}$

c) $$\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{x(t)}{2t-1}=\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{5\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{5\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}{2y}$$

Fazendo $t-\frac{1}{2}=y$, tem-se:

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{5\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{5\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-5\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{2y\times\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\pi}}=$$

$$=-\frac{5\pi}{4}\lim_{\frac{\pi}{2}y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\frac{\pi}{2}y}=-\frac{5\pi}{4}\times 1=-\frac{5\pi}{4}$$

Resposta: $-\frac{5\pi}{4}$

d) $x(t)=5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Período da função: $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

Frequência do oscilador harmónico: $\frac{1}{T}=\frac{1}{4}$

Resposta: $\frac{1}{4}$

3. Se $z=a+b\mathrm{i}$, então $P(a,\ b)$.

$w=-\bar{z}\,\mathrm{i}=-(a-b\mathrm{i})\mathrm{i}=-(a\mathrm{i}+b)=-b-a\mathrm{i}$

Então, o afixo de w é o ponto de coordenadas $(-b,-a)$.

O ponto S é o único que pode ter coordenadas $(-b,-a)$.

Opção: (C) S

4.1. $z_1=(2+\mathrm{i})^2-3\mathrm{i}=4+4\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$

$z_2=\frac{5\mathrm{i}}{\overline{z_1}}=\frac{5\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}=\frac{5\mathrm{i}(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=\frac{-5+15\mathrm{i}}{10}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$

Resposta: $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$

4.2. $|z-z_1|\leq 2 \wedge |z|\geq 3$

$|z-z_1|\leq 2 \rightarrow$ Representa um círculo de centro no ponto $(3,\ 1)$ e raio 2.

$|z|\geq 3 \rightarrow$ Representa a parte exterior do círculo de centro $(0,0)$ e raio 3, incluindo a fronteira.