Nome: ____

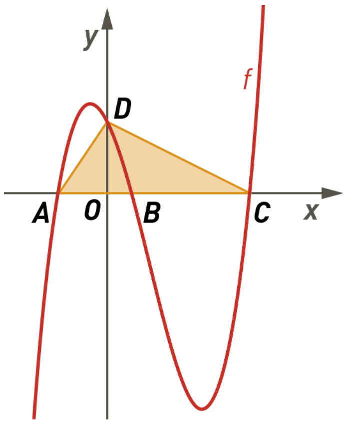
Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. Na igualdade $\sqrt[3]{6}\times 2^{-\frac{4}{3}}=3^{\frac{1}{3}}\times k$, o valor de k é:

(A) $\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt[3]{2}$ **(D)** $6\times\sqrt[3]{2}$

2. Na figura estão representados, em referencial cartesiano, a função *f*, definida por $f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$ e o triângulo $[ACD]$.



Sabe-se que:

- A, B e C são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox;
- D é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy;
- o ponto B tem coordenadas $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Por processos exclusivamente analíticos, sem recurso à calculadora, determina a área do triângulo $[ACD]$.

3. Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(A) $\forall x\in\left]1,3\right[,\ \left(x^2+1\right)x>0$

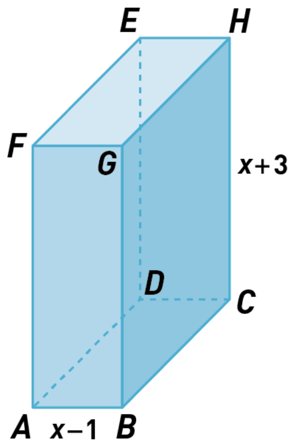
(B) $\exists x\in\left]1,3\right[:\ \left(x-2\right)^{10}\leq 0$

(C) $\forall x\in\left]1,2\right[,\ (x-2)^8(2-x)^7>0$

(D) $\forall x\in\left[1,3\right],\ \left(2-x\right)^{20}>0$

4. Na figura está representado um paralelepípedo retângulo.
Fixada uma unidade de comprimento e com $x > 1$, tem-se:

- $\overline{AB} = x - 1$
- $\overline{CH} = x + 3$
- o volume do paralelepípedo é dado por:
  $V(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$
  ($V(x)$ é expresso em unidades de volume).



4.1. Determina o perímetro da face [*ABGF*], sabendo que a medida da área dessa face é 60.

4.2. Mostra que: $\overline{BC} = 2x + 1$

5. Considera os polinómios $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ e $Q(x) = x^2 + 2x$.

5.1. Mostra que é verdadeira a proposição:

$$\forall x \in \left]-2, 0\right[, \; Q(x) < 0$$

5.2. Sabe-se que os polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ têm uma raiz em comum.

Resolve a inequação $P(x) \geq 0$. Apresenta o conjunto-solução na forma de reunião de intervalos de números reais.

6. Seja P um polinómio de grau 3.
Sabe-se que:

- 2 e –1 são zeros do polinómio, sendo –1 um zero duplo;
- $P(1) = 4$

O conjunto-solução da inequação $P(x) < 0$ é:

(A) $\left]2, +\infty\right[$

(B) $\left]-1, 2\right[$

(C) $\left]-\infty, 2\right] \setminus \{-1\}$

(D) $\left]-\infty, -1\right[$

7. Em relação a um referencial o.n. xOy considera o ponto $A(-1\,,3)$.
Seja A' o simétrico de A em relação à reta definida pela equação $y=1$.
As coordenadas do ponto A' são:

(A) $(-1,3)$ **(B)** $(1,-3)$

(C) $(-1,-1)$ **(D)** $(-1,-3)$

8. Em relação a um referencial o.n. xOy considera o ponto $P(1-2k\,,\ k-3),\ k\in\mathbb{R}$.

8.1. Para que valores de k o ponto P pertence ao 3.º quadrante?

8.2. Determina k de modo que P pertença à reta que passa no ponto de coordenadas $(3,-2)$ e é paralela ao eixo Oy.

FIM

	Cotações											
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2**	**Total**
Pontos	15	20	15	20	25	20	25	15	15	15	15	**200**

1. $\sqrt[3]{6}\times 2^{-\frac{4}{3}}=3^{\frac{1}{3}}\times k$

$\sqrt[3]{2\times 3}\times 2^{-\frac{4}{3}}=3^{\frac{1}{3}}\times k$

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}\times 2^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{3}\times k$

$2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{4}{3}}=k$

$2^{-\frac{3}{3}}=k$

$2^{-1}=k$

Resposta: Opção correta **(B)** $\frac{1}{2}$

2. $f(0)=\frac{3}{2}$. Então, $D\left(0,\frac{3}{2}\right)$ e $\overline{OD}=\frac{3}{2}$.

$\frac{1}{2}$ é uma raiz do polinómio $x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -\frac{5}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2x-3\right)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=-1 \vee x=3$

Então, $A(-1,0)$, $C(3,0)$ e $\overline{AC}=4$.

Área do triângulo $[ACD]$: $\frac{\overline{AC}\times\overline{OD}}{2}=\frac{4\times\frac{3}{2}}{2}=3$

Resposta: A área do triângulo $[ACD]$ é 3.

3. É falsa a proposição: $\forall x\in[1,3],\ (2-x)^{20}>0$

Repara que $2\in[1,3]$ e $(2-2)^{20}=0$.

Resposta: A afirmação falsa é **(D)** $\forall x\in[1,3],\ (2-x)^{20}>0$

4.

4.1. A área da face [*ABGF*] é dada pela expressão:
$(x-1)(x+3)$, ou seja, x^2-2x-3.
$x^2-2x-3=60$, ou seja, $x^2-2x-63=0$.

$$x^2-2x-63=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+252}}{2} \Leftrightarrow x=9 \vee x=-7$$

No contexto apresentado $x=9$.
Se $x=9$, então o perímetro da face [*ABGF*] é dado por: $2\times(9-1)+2\times(9+3)=40$.

Resposta: O perímetro da face [*ABGF*] é 40.

4.2. O volume é dado por: $\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CH}$.

Assim, $\overline{BC}$ é dado por $V(x):\left[(x-1)(x+3)\right]$, ou seja, $(2x^3+5x^2-4x-3):(x^2+2x-3)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +5x^2 & -4x & -3 & x^2+2x-3 \\ \cline{5-5} -2x^3 & -4x^2 & +6x & & 2x+1 \\ \cline{1-4} & x^2 & +2x & -3 & \\ & -x^2 & -2x & +3 & \\ \cline{2-4} & 0 & +0 & +0 & \end{array}$$

Resposta: $\overline{BC}=2x+1$

5.

5.1. $Q(x)<0 \Leftrightarrow x^2+2x<0 \Leftrightarrow x(x+2)<0$
$Q(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x	–	–	–	0	+
$x+2$	–	0	+	+	+
$Q(x)$	+	0	–	0	+

$Q(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-2,0\right[$

Resposta: $\forall x\in\left]-2,0\right[,\ Q(x)<0$

5.2. As raízes de $Q(x)$ são: 0 e -2 .

Como 0 não é raiz de $P(x)$ conclui-se que -2 é raiz.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ -2 & & -2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+2)(x^2+2x-3)$

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+2x-3)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=-3 \vee x=1$

$P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x+3)\geq 0$

	$-\infty$	-3		-2		1	$+\infty$
$x+3$	−	0	+	+	+	+	+
$x+2$	−	−	−	0	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	−	0	+
$P(x)$	**−**	**0**	**+**	**0**	**−**	**0**	**+**

$P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in [-3,-2]\cup[1,+\infty[$

Resposta: $[-3,-2]\cup[1,+\infty[$

6. $P(x)=a(x-2)(x+1)^2$

$P(1)=4 \Leftrightarrow a(1-2)(1+1)^2=4 \Leftrightarrow -4a=4 \Leftrightarrow a=-1$

$P(x)=-1(x-2)(x+1)^2=(2-x)(x+1)^2$

	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2-x$	+	+	+	0	−
$(x+1)^2$	+	0	+	+	+
$P(x)$	**+**	**0**	**+**	**0**	**−**

$P(x)<0 \Leftrightarrow x\in]2,+\infty[$

Resposta: Opção correta **(A)** $]2,+\infty[$

7. $A(-1,3)$

O simétrico de A em relação à reta $y=1$ é o ponto de coordenadas $(-1,-1)$.

Resposta: Opção correta **(C)** $(-1,-1)$.

8.

8.1. Qual o ponto do 3.º quadrante tem abcissa e ordenada negativas?
Assim, tem-se:

$$1-2k<0 \wedge k-3<0 \Leftrightarrow k>\frac{1}{2} \wedge k<3 \Leftrightarrow k\in \left]\frac{1}{2},3\right[$$

Resposta: $k\in \left]\frac{1}{2},3\right[$

8.2. Se a reta é paralela a Oy e passa no ponto (3, –2), então uma equação dessa reta é $x=3$.
O ponto $P(1-2k, k-3)$ pertence à reta $x=3$ se e só se $1-2k=3$, ou seja, $k=-1$.

Resposta: $k=-1$

FIM

	Cotações										
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**Total**
Pontos	15	20	15	20	25	20	25	15	15	15	15	**200**