Teste N.º 2

**Matemática A**

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

**11.º Ano de Escolaridade**

Nome do aluno: ________________________________________ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

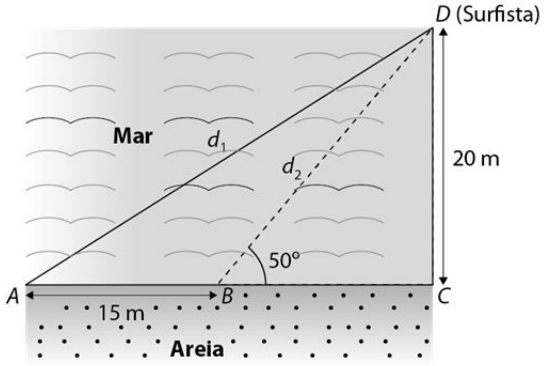
Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

**CADERNO 1: 45 MINUTOS**

**É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.**

**1.** No mar, a 20 metros da areia, um surfista (na figura abaixo representado pelo ponto *D*) está a pedir socorro. Dois nadadores-salvadores encontram-se na areia, um no ponto *A* e o outro no ponto *B*.




De acordo com os dados da figura e conservando, no mínimo, três casas decimais sempre que proceder a arredondamentos, determine, com aproximação às décimas:

**1.1.** as distâncias, $d_1$ e $d_2$, a que os nadadores salvadores se encontram do surfista;

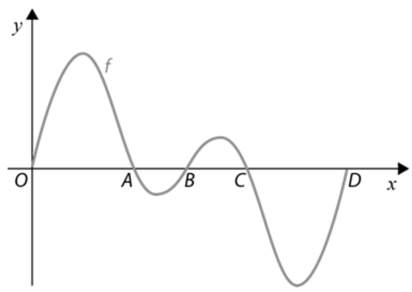
**1.2.** a amplitude do ângulo $ADB$.

(Caso não tenha resolvido a alínea anterior, utilize, caso seja necessário, $d_1 = 37{,}551$ e $d_2 = 26{,}108$.)

**2.** Na figura está parte da representação gráfica da função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$f(x) = \text{sen}x + \text{sen}(2x)$, considerando $x$ em radianos.

Na janela de visualização utilizada para obter esta parte da representação gráfica de $f$, a curva interseta o eixo $Ox$ na origem e nos pontos $A, B, C$ e $D$ assinalados na figura.




**2.1.** Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos $A, B, C$ e $D$.

**2.2.** Para qualquer valor real de $x$, $f(\pi - x) + f(\pi + x)$ é igual a:

**(A)** $\text{sen}(2x)$ **(B)** $-\text{sen}(2x)$ **(C)** $2\text{sen}x$ **(D)** $0$

**2.3.** Considere a representação gráfica da função $f$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Neste intervalo, sejam $E$ e $F$ os pontos do gráfico de ordenada $1$.

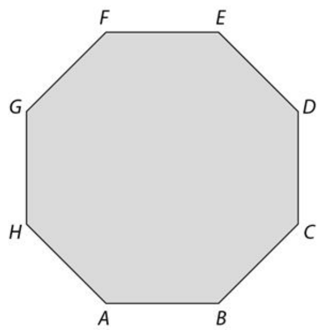
Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, determine, com aproximação às centésimas, a área do trapézio $[OAFE]$.

Na sua resposta reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema e assinale, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s) e as suas abcissas, apresentando-as com três casas decimais.

**3.** Na figura está representado um octógono regular $[ABCDEFGH]$, de lado $a$, $a > 0$.

Qual é o valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA}$?

**(A)** $-a^2$ **(B)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ **(D)** $a^2$




**FIM DO CADERNO 1**

**COTAÇÕES (Caderno 1)**

| Item | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cotação (em pontos)** | | | | | | |
| **1.1.** | **1.2.** | **2.1.** | **2.2.** | **2.3.** | **3.** | |
| 22 | 22 | 25 | 8 | 25 | 8 | **110** |

**CADERNO 2: 45 MINUTOS**

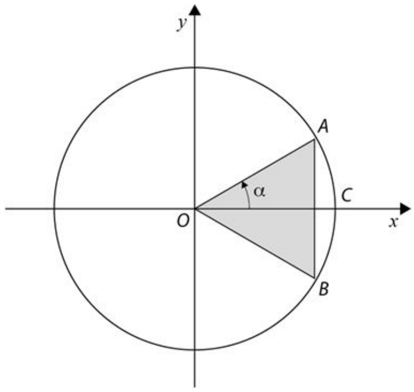
**NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.**

**4.** Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. $Oxy$, a circunferência trigonométrica e um triângulo $[OAB]$. Os pontos $A$ e $B$ pertencem à circunferência.

O segmento de reta $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo $Ox$.

O ponto $C$ é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo $Ox$.

Seja $\alpha$ a amplitude do ângulo $COA$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.




**4.1.** Para um determinado valor de $\boldsymbol{\alpha}$, sabe-se que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{5}$.

Determine o valor exato da área do triângulo $[OAB]$.

**4.2.** Considere agora que $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{6}}$. Quais são as coordenadas do ponto $B$?

**(A)** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(B)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **(C)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **(D)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

**5.** Considere, num referencial o.n. $xOy$, a circunferência de equação:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$

Seja $C$ o centro da circunferência e $A$ o ponto de interseção da circunferência com o semieixo negativo das abcissas. Considere a reta $t$, reta tangente à circunferência no ponto $A$.

Determine a equação reduzida da reta $t$.

**6.** Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano $\alpha$ de equação $x + 2y + 2z - 1 = 0$ e a reta $r$ de equação $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(-2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$.

Seja $\beta$ um plano perpendicular a $\alpha$ e que contém a reta $r$.

Qual das seguintes equações é uma equação cartesiana de $\beta$?

**(A)** $-2x + y + z = 4$

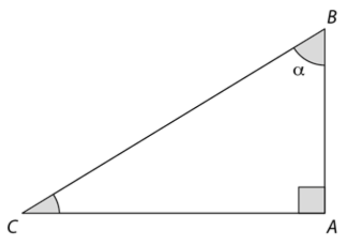
**(B)** $x - y - z = 3$

**(C)** $2x - z = 2$

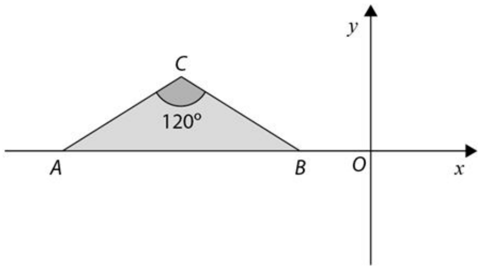
**(D)** $-y + z = 1$

**7.** Considere o triângulo $[ABC]$ da figura ao lado e o ângulo agudo $\alpha$.

Sabendo que $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{2}$, determine o valor exato de $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.



**8.** Na figura está representado, num referencial o.n. $xOy$, um triângulo isósceles $[ABC]$.




Sabe-se que:

- os pontos $A$ e $B$ têm abcissa negativa e pertencem ao eixo $Ox$;
- o ponto $C$ tem ordenada positiva;
- $A\hat{C}B = 120°$.

Qual pode ser a equação vetorial da reta $BC$?

**(A)** $(x, y) = (0, -1) + k\left(-\sqrt{3}, -3\right), k \in \mathbb{R}$

**(B)** $(x, y) = (0, -1) + k\left(-\sqrt{3}, 3\right), k \in \mathbb{R}$

**(C)** $(x, y) = (0,\ 1) + k\left(3, -\sqrt{3}\right), k \in \mathbb{R}$

**(D)** $(x, y) = (0, -1) + k\left(-3, \sqrt{3}\right), k \in \mathbb{R}$

**FIM DO CADERNO 2**

**COTAÇÕES (Caderno 2)**

| **Item** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cotação (em pontos)** | | | | | | |
| **4.1.** | **4.2.** | **5.** | **6.** | **7.** | **8.** | |
| 22 | 8 | 22 | 8 | 22 | 8 | **90** |

# TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

## Caderno 1

**1.**

**1.1.**

- $\text{sen}50° = \frac{20}{d_2} \Leftrightarrow d_2 = \frac{20}{\text{sen}50°}$

  Logo, $d_2 \approx 26{,}108$.

- $A\hat{B}D = 180° - 50° = 130°$

  Pela lei dos cossenos, temos que:

  $d_1{}^2 = 15^2 + d_2{}^2 - 2 \times 15 \times d_2 \times \cos 130°$

  Logo:

  $d_1 = \sqrt{15^2 + 26{,}108^2 - 2 \times 15 \times 26{,}108 \times \cos 130°},\ \ d_1 > 0$

  Assim, $d_1 \approx 37{,}551$.

  Temos, então, que $d_1 \approx 37{,}6$ metros e $d_2 \approx 26{,}1$ metros.

**1.2.** Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{\text{sen}130°}{d_1} = \frac{\text{sen}(A\hat{D}B)}{15}$$

Logo:

$$\text{sen}\left(A\hat{D}B\right) = \frac{15 \times \text{sen}130°}{37{,}551} \quad \text{e} \quad A\hat{D}B = \text{sen}^{-1}\left(\frac{15 \times \text{sen}130°}{37{,}551}\right)$$

Ou seja, $A\hat{D}B \approx 17{,}8°$.

**2.**

**2.1.** As abcissas dos pontos *A*, *B*, *C* e *D* são os zeros da função $f$ no intervalo representado.

$f(x) = 0$

$\text{sen}x + \text{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = -\text{sen}(2x)$

$\Leftrightarrow \text{sen}x = \text{sen}(-2x)$

$\Leftrightarrow x = -2x + 2k\pi \ \ \vee \ \ x = \pi - (-2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \ \ \vee \ \ -x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \ \ \vee \ \ x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0, x = 0 \ \ \vee \ \ x = -\pi$

Para $k = 1, x = \frac{2\pi}{3} \ \ \vee \ \ x = \pi$

Para $k = 2, x = \frac{4\pi}{3} \ \ \vee \ \ x = 3\pi$

Para $k = 3, x = 2\pi \ \ \vee \ \ x = 5\pi$

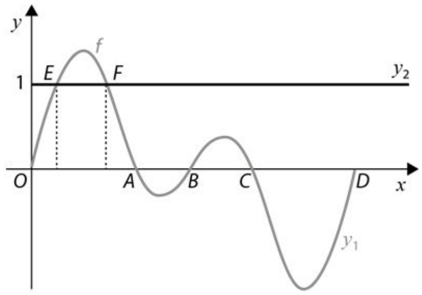
De acordo com estes valores e dadas as condições da figura, podemos concluir que as abcissas dos pontos *A*, *B*, *C* e *D* são, respetivamente, $\frac{2\pi}{3}$, $\pi$, $\frac{4\pi}{3}$ e $2\pi$.

**2.2. Opção (D)**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(\pi - x) + f(\pi + x) = \text{sen}(\pi - x) + \text{sen}\big(2(\pi - x)\big) + \text{sen}(\pi + x) + \text{sen}\big(2(\pi + x)\big) =$$
$$= \text{sen}x + \text{sen}(2\pi - 2x) + (-\text{sen}x) + \text{sen}(2\pi + 2x) =$$
$$= -\text{sen}(2x) + \text{sen}(2x) =$$
$$= 0$$

**2.3.** $y_1 = \text{sen}x + \text{sen}(2x)$

$y_2 = 1$




$O(0,0)$

$A(2{,}094; 0)$

$E(0{,}355;\ 1)$

$F(1{,}571;\ 1)$

$$A_{[OAFE]} = \frac{\overline{OA} + \overline{EF}}{2} \times 1 = \frac{2{,}094 + (1{,}571 - 0{,}355)}{2} =$$
$$= \frac{3{,}31}{2} =$$
$$= 1{,}66 \text{ u.a.}$$

**3. Opção (C)**

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AH}\right) = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} =$$
$$= -\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AH}\right\| \times \cos\left(B\hat{A}H\right) =$$
$$= -a \times a \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= -a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

**Cálculo auxiliar**

Como ∢ *BAH* é um ângulo inscrito numa circunferência e o arco correspondente *BH* tem amplitude $6 \times \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$, então $B\hat{A}H = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

**Caderno 2**

**4.**

**4.1.** Seja $A(\alpha)$ a área do triângulo [*OAB*] em função de $\alpha$.

Sabemos que:

$A(\alpha) = \frac{\text{base}\times\text{altura}}{2} = \frac{2\text{sen}\alpha\times\cos\alpha}{2} = \text{sen}\alpha\,\cos\alpha$

Como $\text{sen}\alpha = \frac{2}{5}$ e $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos que:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{21}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem que $\cos\alpha > 0$ e, portanto, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Assim, $A(\alpha) = \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{25}$.

**4.2. Opção (B)**

$B\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Assim, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

**5.** $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 6y + 3^2 = 15 + 1^2 + 3^2$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Assim, $C(1, -3)$.

Como *A* é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo negativo das abcissas, então as coordenadas de *A* são do tipo $(x, 0), x < 0$.

$(x-1)^2 + (0+3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{16}$

$$\Leftrightarrow x = 4 + 1 \quad \vee \quad x = -4 + 1$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -3$$

Assim, $A(-3,0)$.

Como a reta $t$ é tangente à circunferência no ponto *A*, então $t$ é perpendicular à reta *AC*.

Como $\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -3) - (-3, 0) = (4, -3)$, tem-se que $m_{AC} = -\frac{3}{4}$, logo $m_t = \frac{4}{3}$.

Assim, a reta $t$ é da forma $y = \frac{4}{3}x + b, b \in \mathbb{R}$.

Como $A(-3,0) \in t$, tem-se que $0 = \frac{4}{3} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = 4$.

A equação reduzida da reta $t$ é $y = \frac{4}{3}x + 4$.

**6. Opção (D)**

Seja $n_\alpha$ um vetor normal ao plano $\alpha$.

$n_\alpha(1,2,2)$

- Na opção (A) não se encontra uma equação de um plano perpendicular a $\alpha$, pois $(1,2,2).(-2,1,1) = -2+2+2 \neq 0$.
- Na opção (B) não se encontra uma equação de um plano perpendicular a $\alpha$, pois $(1,2,2).(1,-1,-1) = 1-2-2 \neq 0$.
- Na opção (C), a equação apresentada representa um plano perpendicular a $\alpha$, pois $(1,2,2).(2,0,-1) = 2+0-2 = 0$.
- Na opção (D), a equação apresentada também representa um plano perpendicular a $\alpha$, pois $(1,2,2).(0,-1,1) = 0-2+2 = 0$.

A opção (C) é excluída, uma vez que o ponto de coordenadas (1, 2, 3) não satisfaz a condição $2x - z = 2$.

Na opção (D) verifica-se que o vetor diretor da reta $r$ e o vetor normal ao plano são perpendiculares, já que $(-2,1,1).(0,-1,1) = 0-1+1 = 0$. Como o ponto da reta de coordenadas (1, 2, 3) pertence ao plano apresentado (pois $-2+3=1$ é uma proposição verdadeira), podemos concluir que é na opção (D) que se encontra a equação de um plano que, além de ser perpendicular ao plano $\alpha$, contém a reta $r$.

**7.** Observe-se que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2(1-\operatorname{sen}^2\alpha) = 3\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\operatorname{sen}^2\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times(-2)\times 2}}{2\times(-2)}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3\pm\sqrt{25}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3+5}{-4} \vee \operatorname{sen}\alpha = \frac{3-5}{-4}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\alpha = -2}_{\text{condição impossível}} \vee \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$$

Assim, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$.

**8. Opção (D)**

Como o triângulo [*ABC*] é isósceles e $A\hat{C}B = 120°$, então:

$C\hat{B}A = B\hat{A}C = \frac{180°-120°}{2} = 30°$

Seja $m$ o declive da reta $BC$, então:

$m = \text{tg}(180° - 30°) = \text{tg}(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, um vetor diretor da reta *BC* pode ser o vetor de coordenadas $(-3, \sqrt{3})$ (opção (C)) ou $(3, -\sqrt{3})$ (opção (D)). No entanto, a opção (C) apresenta a equação vetorial de uma reta de ordenada na origem positiva (1), o que, dadas as condições do enunciado, não é possível.

Observe-se que as opções (A) e (B) estão excluídas, pois na opção (A) encontra-se uma equação de uma reta de declive $\frac{3}{\sqrt{3}}$ e na opção (B) encontra-se uma equação de uma reta de declive $-\frac{3}{\sqrt{3}}$.