facebook.com/recursos.para.matematica
facebook.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 9 | Ensino Secundário | 2018

12º Ano de Escolaridade

José Carlos Pereira e Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Só é permitido o uso de calculadora gráfica no Caderno 1.

Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o caderno e o item.

Nas questões de escolha múltipla correspondentes às componentes específicas deve optar por resolver apenas uma das questões apresentadas para esse item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se na margem de cada página.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Todos os itens desta prova são originais do autores – referência aos autores nas margens da prova.
Prova realizada em maio de 2018.

Página em Branco

Cotações

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

É permitido o uso de calculadora.

1. Na Figura 1 está representado um tabuleiro com vinte e cinco casas. 5

Pretende-se colocar neste tabuleiro seis peões brancos, um cavalo, uma torre, um rei e uma rainha, não mais que um por casa.

De quantas maneiras se pode fazê-lo de modo que os peões ocupem apenas casas nas diagonais e não existam mais peças nas diagonais?

(A) 3 669 120

(B) 6 879 600

(C) 7 814 016

(D) 19 535 040

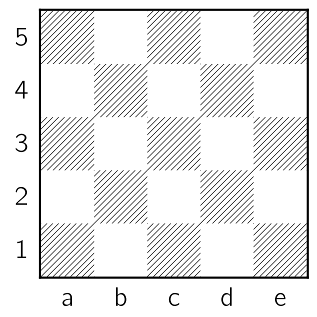

Figura 1

2.1.	**2.2.**
P2001/2002	PMC2015

2.1. Uma caixa tem três bolas numeradas: uma bola com o número 0 e duas bolas com o número 1 5

Considere a experiência aleatória que consiste em extrair, ao acaso, duas bolas da caixa e calcular o produto dos números das bolas.

Qual é a probabilidade, com arredondamento às centésimas, de em seis repetições desta experiência, o produto ser nulo em pelo menos cinco?

(A) 0,02 **(B)** 0,09 **(C)** 0,13 **(D)** 0,35

2.2. Considere, num referencial o.n xOy, uma elipse e o triângulo $[ABC]$ representados na Figura 2. 5

Sabe-se que:

- a elipse é definida pela equação cartesiana $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$
- C é um foco da elipse;
- A e B pertencem à elipse, e ao semieixo negativo Ox e ao semieixo positivo Oy, respetivamente;
- β é a amplitude do ângulo CBA

Qual o valor de $\cos\beta$, com arredondamento às centésimas ?

(A) 0,19 **(B)** 0,50 **(C)** 0,76 **(D)** 0,98

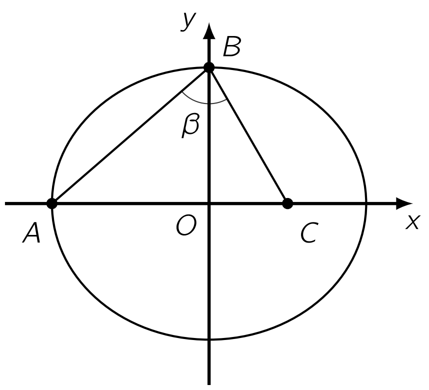

Figura 2

3. Num café foram servidos no mesmo instante um **café** e uma **bebida**.

O café ficou no interior do estabelecimento e a bebida foi para a esplanada.

A temperatura do café, C, em graus Celsius, t minutos depois de ser colocado na chávena é dada por:

$$C(t) = 25 + (a - 25)e^{-bt}, \ a,b \in \mathbb{R}^+$$

A temperatura da bebida, B, em graus Celsius, t minutos depois de ser colocada no copo é dada por:

$$B(t) = 35 - 25e^{-0,3t}$$

10 **3.1.** Sabe-se que a temperatura inicial do café é de 90 graus Celsius, e que após cinco minutos do café ser servido, a sua temperatura é um terço da temperatura inicial.

Determine os valores de a e b

Apresente o valor de b com arredondamento às décimas.

15 **3.2.** Considere $a = 90$ e $b = 0,5$ para resolver esta alínea.

Determine o valor de $\lim\limits_{t \to +\infty} [C(t) - B(t)]$, e mostre que existe, pelo menos, um instante c pertencente a $]5,6[$ tal que $C(c) = B(c)$

Interprete os resultados obtidos no contexto do problema.

Sempre que proceder a cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5 **4.** Seja (a_n) uma progressão aritmética tal que $a_4 - a_2 = 6$ e $a_5 = 6$

Qual é a soma dos vinte termos consecutivos, a partir do quinto, incluindo-o?

(A) 684 **(B)** 690 **(C)** 724 **(D)** 756

5 **5.** Na Figura 3, está representada, num referencial o.n xOy, parte do gráfico da função f, e a reta r tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(a,3)$ de inclinação α

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x - a}{3 - f(x)} = \dfrac{1}{3}$

Qual o valor de α, em radianos, com arredondamento às centésimas?

(A) $-1,25$

(B) $0,32$

(C) $1,89$

(D) $2,82$

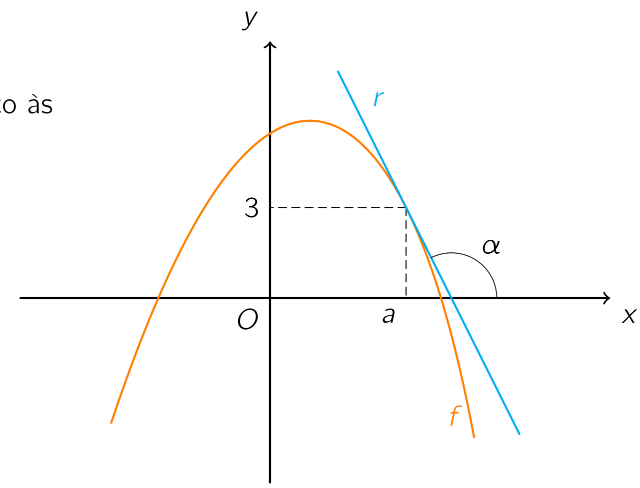

Figura 3

6. Na Figura 4, está representado, num referencial o.n $Oxyz$, o prisma $[OABCDEFG]$

Sabe-se que:

- a face $[OABC]$ é um quadrado e está contida no plano xOz
- a face $[DEFG]$ está contida num plano paralelo ao plano xOz
- a reta AD é definida pela condição vetorial $(x,y,z) = (0,4,3) + k(-2,4,3), k \in \mathbb{R}$
- $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 2\sqrt{29}$

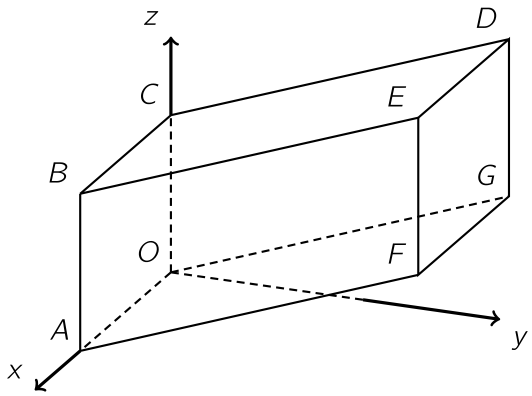

Figura 4

6.1. Mostre que $\overrightarrow{DA}(4, -8, -6)$ e determine o volume do prisma. **10**

6.2. Determine uma equação cartesiana do plano ADC **15**

6.3. Na Figura 5 está representado o prisma quadrangular $[OABCDEFG]$ e os pontos médios das doze arestas do prisma. **15**

Considere a experiência aleatória que consiste em escolher três dos vinte pontos (os doze pontos médios mais os oito vértices) assinalados na figura.

Qual é a probabilidade desses três pontos definirem um plano perpendicular ao eixo Oy?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

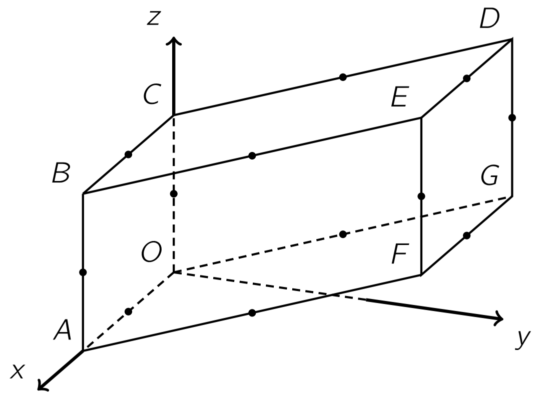

Figura 5

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} -x + \sin x & \text{se } \quad x \leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{se } \quad x > 0 \end{cases}$ **15**

Sejam A e B dois pontos do gráfico de g tais que:

- a abcissa de A é negativa e a abcissa de B é positiva;
- a distância entre os pontos A e B é 3;
- a reta AB é paralela ao eixo Ox

Determine a área do triângulo $[AOB]$

Apresente o resultado com arredondamento às décimas.

Na sua resposta deve:

– reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessários para a resolução do problema;

– indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondadas às milésimas;

– apresentar o valor da medida da área do triângulo [AOB], arredondado às décimas.

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
Não é permitido o uso de calculadora.

5 **8.** Sejam a e b dois números reais tais que $\log_a(ab^3) = 3$

Qual é o valor de $\log_b\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

9.1.	**9.2.**
P2001/2002	PMC2015

5 **9.1.** Considere, num referencial o.n $Oxyz$, os planos α, β e γ definidos por:

$$\alpha : x + y - 2z = 1 \qquad \beta : -2x - 2y + 4z = -2 \qquad \gamma : x - y = 0$$

A interseção dos planos α, β e γ é:

(A) o conjunto vazio **(B)** um ponto

(C) uma reta **(D)** um plano

5 **9.2.** Na Figura 6 está representada, num referencial o.n xOy, parte do gráfico da função f e a reta t

Sabe-se que:

- a reta t interseta o gráfico de f nos pontos de coordenadas $(-1{,}2)$, $(2{,}3)$, e no de abcissa 4
- o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 3

Considere as afirmações seguintes:

I. Existe uma reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa c, tal que $c \in]-1{,}2[$, paralela à reta de equação $3y = x + 7$

II. $\exists\, c, d \in]-1{,}4[\wedge c \neq d : f'(c) = f'(d) = \frac{1}{3}$

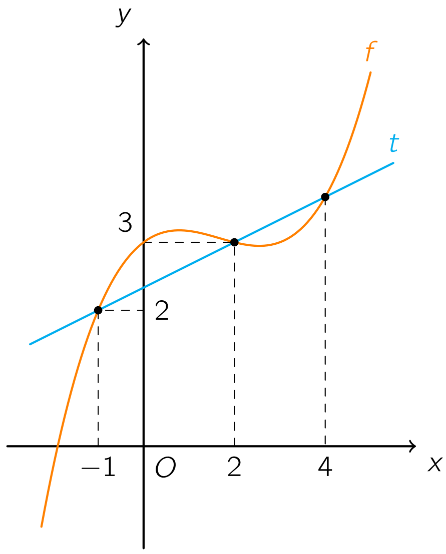

Figura 6

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) I e II são verdadeiras **(B)** I é falsa e II é verdadeira

(C) I é verdadeira e II é falsa **(D)** I e II são falsas

10. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ **10**

Sabe-se que os acontecimentos A, B e $A \cap B$ são possíveis.

Mostre que $P(\overline{A \cap \overline{B}}|A) + P(\overline{A}|B) = 1$, se e só se A e B forem acontecimentos equiprováveis.

11. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por **5**

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1 - e^{-4x}} & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{e^{3x} - 1}{1 - e^{4x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$

Qual o valor de $\lim h(u_n)$?

(A) $-\dfrac{3}{4}$ **(B)** 0 **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $+\infty$

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = 3 + 4i$ **5**

Seja θ um argumento do número complexo z

Sabe-se que os números complexos $-\dfrac{\overline{z}}{5}$ e w são raízes quartas de um mesmo número complexo.

Qual pode ser o número complexo w ?

(A) $\sqrt{5}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ **(B)** $\sin\theta + i\cos\theta$

(C) $\sqrt{5}\,(\sin\theta + i\cos\theta)$ **(D)** $\cos\theta + i\sin\theta$

13. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e $z_2 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ **15**

Na Figura 7, está representada, no plano complexo, uma região a sombreado, tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é o afixo do número complexo z_1
- B é o afixo do número complexo z_2

Seja $w = \dfrac{z_1 \times (z_2)^2}{\sqrt{2}\,i^{4n+39}}$, com $n \in \mathbb{N}$

Verifique se o afixo de w pertence à região a sombreado.

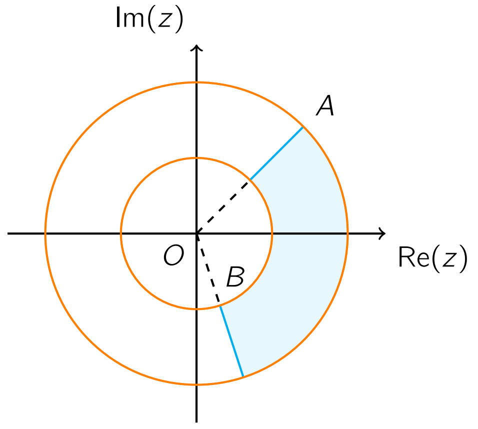

Figura 7

14. Seja f a função, de domínio $[-1, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+2x} & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ (x^2+1)e^{-x}+x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

15 **14.1.** Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

Na sua resposta, deve:

- mostrar que o gráfico de f não admite assíntotas verticais;
- mostrar que existe uma assíntota não vertical quando $x \to +\infty$ e escrever uma equação dessa assíntota.

15 **14.2.** Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão em $\mathbb{R}^+$

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

15. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

15 **15.1.** Para um certo número real β, tem-se que $\tan\left(\dfrac{\beta}{4}\right) = \sqrt{8}$, com $0 < \beta < 2\pi$

Determine o valor exato de $g(\beta)$

10 **15.2.** Determine o valor do limite $\displaystyle\lim_{x \to 2\pi} \frac{1-\cos^2 x}{(x-2\pi) \times g(x)}$