EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

PROVA MODELO N.º 7 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

JUNHO DE 2016

GRUPO I

1. Tem-se que:

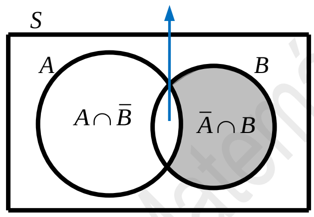
- $P(A|B) = 2P(\bar{A}|B) \Leftrightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{\cancel{P(B)}} = 2\dfrac{P(\bar{A}\cap B)}{\cancel{P(B)}} \Leftrightarrow$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow} P(A\cap B) = 2\left(P(B) - P(A\cap B)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B) = 2P(B) - 2P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow 3P(A\cap B) = 2P(B) \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{2P(B)}{3}$$

i)



$P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B)$

$P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

- $P(A) - 3P(B) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 3P(B)$

Logo, $P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{2P(B)}{3}}{3P(B)} = \dfrac{2\,\cancel{P(B)}}{9\,\cancel{P(B)}} = \dfrac{2}{9}$.

Resposta: B

2. Tem-se que, $b + a + a + b = 1 \Leftrightarrow 2a + 2b = 1 \Leftrightarrow a + b = \dfrac{1}{2}$.

Logo, $\mu = -3b + a + 2a + 6b = 3a + 3b = 3(a+b) = 3\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Resposta: C

3. Tem-se que:

$$\log_4 a + \log_2 b = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2 a}{\log_2 4} + \log_2 b = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 a}{2} + \log_2 b = 1 \Leftrightarrow \log_2 a + 2\log_2 b = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a + \log_2\left(b^2\right) = 2 \Leftrightarrow \log_2\left(ab^2\right) = 2 \Leftrightarrow ab^2 = 2^2 \Leftrightarrow ab^2 = 4$$

Logo, $\log_4\left(a^3b^6\right) = \log_4\left(ab^2\right)^3 \underset{ab^2=4}{=} \log_4(4)^3 = 3$.

Resposta: A

4. Tem-se que, $\lim\left(u_n+1\right)=\lim\left(n^3e^{-n}+1\right)=1+\lim\frac{n^3}{e^n}=1+\lim\frac{1}{\frac{e^n}{n^3}}=1+\frac{1}{\underbrace{\lim\frac{e^n}{n^3}}_{\text{Limite notável}}}=1+\frac{1}{+\infty}=1+0^+=1^+$.

Assim, $\lim g\left(u_n+1\right)=\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$ e portanto, pretende-se uma função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ tal que $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=2$.

A opção $\boxed{\text{A}}$ não é a correcta pois $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-2)=-2$.

A opção $\boxed{\text{B}}$ não é a correcta pois $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2(x-1)}\underset{\substack{y=x-1\\ y\to0^+}}{=}\frac{1}{2}\underbrace{\lim\limits_{y\to0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite notável}}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$.

A opção $\boxed{\text{D}}$ não é a correcta pois, apesar de:

$$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}\underset{\substack{y=x-1\Leftrightarrow x=y+1\\ y\to0^+}}{=}\lim_{y\to0^+}\frac{\ln\left(2(y+1)-1\right)}{y}=\underbrace{\lim_{y\to0^+}\frac{\ln(2y+1)}{2y}}_{y\to0^+\Rightarrow2y\to0^+\text{, limite notável}}\times2=1\times2=2$$

o seu domínio é $\{x\in\mathbb{R}:2x-1>0\ \wedge\ x-1\neq0\}=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\setminus\{1\}$, ou seja, não é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

A opção $\boxed{\text{C}}$ é a correcta pois:

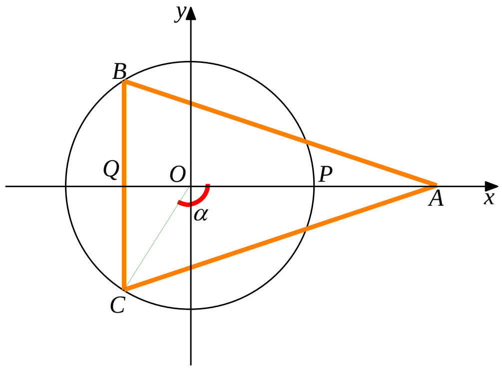
$$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{e^{x-1}-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}\times\lim_{x\to1^+}(x+1)=\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}}_{x\to1^+\Rightarrow x-1\to1^+\text{, limite notável}}}\times(1+1)=\frac{1}{1}\times2=2$$

e o seu domínio é $\{x\in\mathbb{R}:e^{x-1}-1\neq0\}\underset{i)}{=}\{x\in\mathbb{R}:x\neq1\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, ou seja, não é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

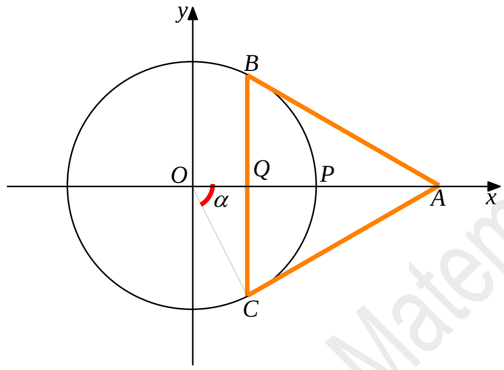
i) $e^{x-1}-1=0\Leftrightarrow e^{x-1}=1\Leftrightarrow e^{x-1}=e^0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Resposta: C

5. Consideremos a seguinte figura, em que Q é o ponto médio de $[BC]$:



$\alpha \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$



$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

A equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 4$, pelo que o seu raio é 2. Logo, $\overline{OP} = \overline{AP} = 2$ e portanto $\overline{AO} = 4$.

Assim:

$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{BC} \times \overline{AQ}}{2}$, onde:

- se $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ então $\overline{AQ} = 4 - \overline{OQ}$

- se $\alpha \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ então $\overline{AQ} = 4 + \overline{OQ}$

As coordenadas do ponto C são do tipo $C(2\cos\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha)$.

Assim:

- como $\alpha \in \left]-\pi, 0\right[$, $2\operatorname{sen}\alpha < 0$, pelo que $\overline{BC} = 2\overline{QC} = 2 \times (-2\operatorname{sen}\alpha) = -4\operatorname{sen}\alpha$

- se $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ então $2\cos\alpha > 0$, pelo que $\overline{OQ} = 2\cos\alpha$ e portanto, $\overline{AQ} = 4 - \overline{OQ} = 4 - 2\cos\alpha$

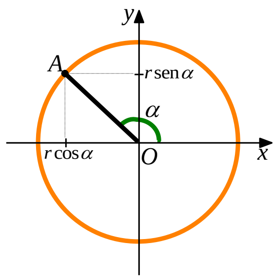
- se $\alpha \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ então $2\cos\alpha < 0$, pelo que $\overline{OQ} = -2\cos\alpha$ e portanto, $\overline{AQ} = 4 + \overline{OQ} = 4 - 2\cos\alpha$

Portanto, para todo o $\alpha \in \left]-\pi,0\right[$, vem:

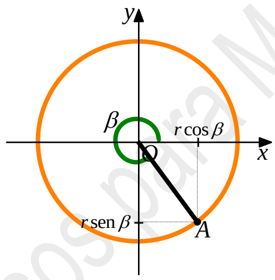
$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AQ}}{2}=\frac{-4\operatorname{sen}\alpha\times\left(4-2\cos\alpha\right)}{2}=-2\operatorname{sen}\alpha\times\left(4-2\cos\alpha\right)=$$

$$=-8\operatorname{sen}\alpha+2\times\underbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}_{\operatorname{sen}(2\alpha)}=2\operatorname{sen}(2\alpha)-8\operatorname{sen}\alpha$$

Nota: Seja A um ponto pertencente a uma circunferência centrada na origem e raio r



As coordenadas do ponto A são dadas por $A\left(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha\right)$



As coordenadas do ponto A são dadas por $A\left(r\cos\beta, r\operatorname{sen}\beta\right)$

Resposta: D

6. Tem-se que:

- $|z_1|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$. Sendo θ um argumento de z_1, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta\in 1.^\text{o}$ quadrante, pelo que $\theta=\frac{\pi}{6}$. Assim, $z_1=4\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$.

Portanto, o raio da circunferência é 4 e a amplitude do ângulo AOB é $\frac{\pi}{6}$, pelo que a amplitude do ângulo DCE também é $\frac{\pi}{6}$. Logo, uma condição que define a circunferência é $|z|=|z_1|\Leftrightarrow|z|=4$.

As semi-rectas CD e CE têm origem no ponto C, imagem geométrica de $z_2=\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$. Como a amplitude do ângulo DCE é $\frac{\pi}{6}$ e como C e D são simétricos em relação ao eixo imaginário, vem que:

- uma condição que define a semi-recta CD é $\arg(z+i)=\frac{3\pi}{2}-\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\Leftrightarrow\arg(z+i)=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow\arg(z+i)=\frac{17\pi}{12}$

- uma condição que define a semi-recta CE é $\arg(z+i)=\frac{3\pi}{2}+\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\Leftrightarrow\arg(z+i)=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow\arg(z+i)=\frac{19\pi}{12}$

Logo, uma condição que define a região sombreada da figura é:

$$|z|\leq 4 \ \wedge \ \frac{17\pi}{12}\leq \arg(z+i)\leq \frac{19\pi}{12}$$

Resposta: C

7.

▪ Tem-se que, $\underbrace{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}_{\cos(2\alpha)}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos(2\alpha)=-\frac{1}{2}$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ e portanto $\alpha\in\left]0,\pi\right[$. Logo, $\cos(2\alpha)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\alpha=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}\Rightarrow C\hat{A}B=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

▪ A ângulo ACB é a inclinação da recta s e como $[ABC]$ é isósceles, vem que $A\hat{C}B=A\hat{B}C$ pelo que:

$$A\hat{C}B=\frac{\pi-\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

Logo, o declive da recta s é igual a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e portanto a sua equação reduzida é da forma $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$.

▪ Também pelo facto de $[ABC]$ ser isósceles vem que $\overline{AC}=\overline{AB}=4$, pelo que as coordenadas do ponto C são $(-3,0)$. Substituindo na equação de s vem, $0=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-3)+b\Leftrightarrow 0=-\sqrt{3}+b\Leftrightarrow b=\sqrt{3}$.

$\therefore \ s: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$

Resposta: A

8. Seja r, com $r\in\mathbb{R}$, a razão da progressão aritmética (u_n). Assim, $u_{10}=u_{30}-20r$ e $u_{60}=u_{40}+20r$.

A soma de todos os termos consecutivos de (u_n) entre os termos de ordem 10 e 60 é dada por:

$$\frac{u_{10}+u_{60}}{2}\times(60-10+1)=\frac{u_{30}-20r+u_{40}+20r}{2}\times 51=\frac{u_{30}+u_{40}}{2}\times 51=\frac{40}{2}\times 51=20\times 51=1020$$

Resposta: B

GRUPO I

1. Tem-se que:

- $\frac{1}{z}+\bar{z}=\frac{1}{\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}}+\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\underset{1=\operatorname{cis}0}{=}\frac{\operatorname{cis}0}{\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}}+\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\operatorname{cis}\left(0-\frac{\pi}{12}\right)+\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)=$

$$=\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

- $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Sendo θ um argumento de z_1, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$ e $\theta\in 2.^{\text{o}}$ quadrante, pelo que $\theta=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$. Assim, $-1+\sqrt{3}i=2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$.

Assim,

$$w^n=\left(\left(\frac{1}{z}+\bar{z}\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right)\right)^n=\left(2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\times 2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n=\left(4\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n=\left(4\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}\right)^n=4^n\operatorname{cis}\left(\frac{7n\pi}{12}\right)$$

O número complexo w^n é um número real negativo se o seu argumento for da forma $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Então:

$$\frac{7n\pi}{12}=\cancel{\pi}+2k\cancel{\pi}\Leftrightarrow\frac{7n}{12}=1+2k\Leftrightarrow 7n=12+12\times 2k\Leftrightarrow n=\frac{12+24k}{7}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

O primeiro número natural obtém-se quando $k=3$. Logo, $n=\frac{12+24\times 3}{7}\Leftrightarrow n=12$.

2.

2.1. Considere-se os acontecimentos:

$F\,/\,M$: «o funcionário é do sexo feminino/masculino»

A : «o funcionário está no atendimento ao público»

Pretende-se determinar, $P\left(M\middle|\bar{A}\right)=\frac{P\left(M\cap\bar{A}\right)}{P\left(\bar{A}\right)}$.

Do enunciado sabe-se que:

- $P(F)=80\%=0,8 \Rightarrow P(M)=0,2$

- $P(A|F)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A\cap F)=\frac{1}{4}\times 0,8 \Leftrightarrow P(A\cap F)=0,2$

- $P(M|A)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(M\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(M\cap A)=\frac{P(A)}{3}$

Construindo uma tabela:

	F	M	p.m.
A	$0,2$	$\frac{P(A)}{3}$	$P(A)$
$\bar{A}$	$0,6$		
p.m.	$0,8$	$0,2$	1

Justificações:

- $P(\bar{A}\cap F)=P(F)-P(A\cap F)=0,8-0,2=0,6$

Tem-se que, $P(A)=\frac{P(A)}{3}+0,2 \Leftrightarrow 3P(A)=P(A)+0,6 \Leftrightarrow 2P(A)=0,6 \Leftrightarrow P(A)=0,3$

Portanto, $P(M\cap A)=\frac{P(A)}{3}=\frac{0,3}{3}=0,1$

Preenchendo o resto da tabela:

	F	M	p.m.
A	$0,2$	$0,1$	$0,3$
$\bar{A}$	$0,6$	$0,1$	$0,7$
p.m.	$0,8$	$0,2$	1

Justificações:

- $P(\bar{A}\cap M)=P(M)-P(A\cap M)=0,2-0,1=0,1$

- $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,3=0,7$

$\therefore\ P(M|\bar{A})=\frac{P(M\cap \bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{0,1}{0,7}=\frac{1}{7}$.

2.2. A experiência aleatória consiste em escolher simultaneamente e ao acaso quatro funcionários do sexo feminino. Como 80% dos funcionários são do sexo feminino, então a empresa, que tem 50 funcionários, tem nos seus quadros $0,8\times 50=40$ sexo feminino. Logo, o número de casos possíveis é ${}^{40}C_4$ que é o número de maneiras de escolher quatro funcionários do sexo masculino entre 40.

Dos funcionários do sexo feminino, um quarto, isto é 25% estão no atendimento ao público. Logo, o número de funcionários do sexo feminino que está no atendimento ao público é $0,25\times 40=10$.

Para o número de casos favoráveis temos de contar todas maneiras distintas de escolher quatro funcionários do sexo feminino de modo que no máximo um esteja no atendimento ao público, isto é, nenhum ou um. Assim, o número de casos favoráveis ${}^{30}C_4+10\times {}^{30}C_3$. ${}^{10}C_0\times {}^{30}C_4={}^{30}C_4$ é o número de maneiras de escolher quatro funcionários do sexo feminino de modo que nenhum esteja no atendimento ao público (dos dez funcionários do sexo feminino que estão no atendimento ao público escolhem-se zero e dos restantes 30 escolhem-se quatro); ${}^{10}C_1\times {}^{30}C_3=10\times {}^{30}C_3$ é o número de maneiras de escolher quatro funcionários do sexo feminino de modo que exactamente um esteja no atendimento ao público (dos dez funcionários do sexo feminino que estão no atendimento ao público escolhe-se um e dos restantes 30 escolhem-se três).

Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis.

Então, a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{30}C_4+10\times {}^{30}C_3}{{}^{40}C_4}$.

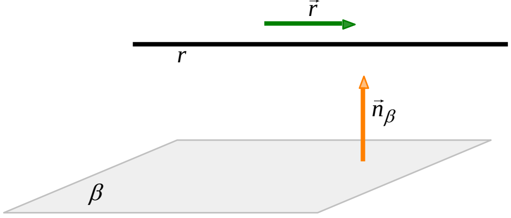
3.

3.1. Tem-se que:

- $\beta: 4x-ay-a^2z=0$, com $a\in\mathbb{R}$. Logo, um vector normal do plano β é $\vec{n}_\beta\left(4,-a,-a^2\right)$.

- $r:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=z$. Logo, um vector director da recta r é $\vec{r}\left(2,2,1\right)$.

O plano β e paralelo à recta r se o vector $\vec{n}_\beta$ for perpendicular ao vector $\vec{r}$ (ver figura):

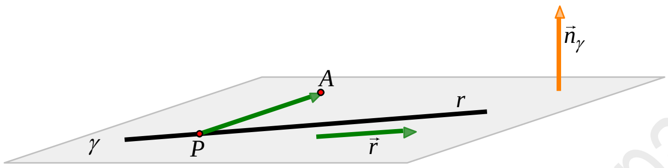


Assim:

$$\vec{n}_\beta \perp \vec{r} \Leftrightarrow \vec{n}_\beta \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \left(4,-a,-a^2\right)\cdot(2,2,1)=0 \Leftrightarrow 4\times 2+(-a)\times 2+\left(-a^2\right)\times 1=0 \Leftrightarrow 8-2a-a^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a^2-2a+8=0 \Leftrightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times(-1)\times 8}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow a=-4 \;\vee\; a=2$$

3.2. Seja γ o plano que contém a recta r e o ponto A. Considere-se a seguinte figura:



O ponto P, de coordenadas $(0,1,0)$ pertence à recta r e portanto também pertence ao plano γ. Seja $\vec{n}_\gamma(a,b,c)$ um vector normal do plano ABC. Este vector é perpendicular aos vectores $\vec{r}$ e $\overrightarrow{PA}$, dois vectores não colineares do plano γ.

Tem-se, $\overrightarrow{PA}=A-P=(-1,0,1)-(0,1,0)=(-1,-1,1)$

Logo,

$$\begin{cases}\vec{n}_\gamma\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{n}_\gamma\cdot\vec{r}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(-1,-1,1)=0\\ (a,b,c)\cdot(2,2,1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a-b+c=0\\ 2a+2b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=a+b\\ 2a+2b+a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=a+b\\ 3a+3b=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=-b+b\\ a=-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\ a=-b\end{cases}$$

Concluímos então que as coordenadas do vector $\vec{n}_\gamma$ são da forma $(-b,b,0)$, com $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tomando, por exemplo, $b=1$, um vector normal de γ é $\vec{n}_\lambda(-1,1,0)$. Logo, como $A\in\gamma$, uma equação do plano γ pode ser:

$$-1(x+1)+1(y-0)+0(z-1)=0 \Leftrightarrow -x-1+y=0 \Leftrightarrow -x+y=1$$

3.3. Um vector director da recta r é $\vec{r}(2,2,1)$ e um vector director do eixo Oy é $\vec{u}(0,1,0)$. Assim:

$$\cos\alpha=\cos\left(r\,\hat{}\,Oy\right)=\frac{|\vec{r}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{r}\|\times\|\vec{u}\|}=\frac{|(2,2,1)\cdot(0,1,0)|}{\|(2,2,1)\|\times\|(0,1,0)\|}=\frac{|2\times 0+2\times 1+1\times 0|}{\sqrt{2^2+2^2+1^1}\times\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{9}\times\sqrt{1}}=\frac{2}{3\times 1}=\frac{2}{3}$$

Tem-se que:

$$\left(\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\times\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=1-\cos^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\times\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=1-\cos^2\alpha-2\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=1-\cos^2\alpha-2\cos\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Como $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\frac{4}{9}}-1\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{9}{4}-1\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4}{5}$$

Portanto:

$$\left(\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=1-\cos^2\alpha-2\cos\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=1-\frac{4}{9}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5}{9}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}=\frac{1}{45}$$

4.

4.1. Tem-se que, $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t^3e^{-1,25t}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^3}{e^{1,25t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^{1,25t}}{t^3}}=\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left(e^{1,25}\right)^t}{t^3}}_{e^{1,25}>0,\text{ Limite notável}}}=\frac{1}{+\infty}=0$.

À medida que o tempo passa, a concentração de medicamento na corrente sanguínea do paciente tende para zero.

4.2. Para determinar em que instante a concentração de medicamento na corrente sanguínea do paciente é máxima recorre-se ao estudo do sinal da derivada da função C:

- $C'(t)=\left(t^3\right)'e^{-1,25t}+t^3\left(e^{-1,25t}\right)'=3t^2e^{-1,25t}+t^3\left(-1,25t\right)'e^{-1,25t}=3t^2e^{-1,25t}+t^3\times(-1,25)e^{-1,25t}=$

$$=3t^2e^{-1,25t}-1,25t^3e^{-1,25t}=t^2e^{-1,25t}\left(3-1,25t\right)$$

- $C'(t)=0\Leftrightarrow t^2e^{-1,25t}\left(3-1,25t\right)=0\Leftrightarrow t^2e^{-1,25t}=0\ \vee\ 3-1,25t=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2=0\ \vee\ \underbrace{e^{-1,25t}=0}_{Eq.\ impossível\ em\ \mathbb{R}}\ \vee\ -1,25t=-3\Leftrightarrow t=0\ \vee\ t=\frac{-3}{-1,25}\Leftrightarrow t=0\ \vee\ t=2,4$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função C', vem:

t	0		$2{,}4$	$+\infty$
i) $C'(t)$	0	$+$	0	$-$
$C(t)$	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

i) Observe que o sinal de C' depende apenas do sinal de $3-1{,}25t$ pois $t^2e^{-1{,}25t}\geq 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

A concentração de medicamento na corrente sanguínea do paciente é máxima se $t=2{,}4$, isto é, passadas 2 horas e 24 minutos após o medicamento ter sido ingerido ($0{,}4\times 60=24$).

5.

5.1. A função g é contínua em $\mathbb{R}$ pelo que também é contínua em $x=1$. Portanto:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)=g(1)$$

Assim:

- $$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{kx-k}+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{kx-k}-1+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{e^{k(x-1)}-1}{x-1}+\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}\right)\underset{i)}{=}\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^{ky}-1}{y}+1\right)=$$

$$=1+k\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{ky}-1}{ky}}_{\substack{y\to 0^-\Rightarrow ky\to 0\\ \text{Limite notável}}}=1+k\times 1=k+1$$

- $$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(k+1)x+\ln\left(\frac{kx^2}{2}\right)}{x}=\frac{(k+1)\times 1+\ln\left(\frac{k\times 1^2}{2}\right)}{1}=k+1+\ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

- $$g(0)=\frac{(k+1)\times 1+\ln\left(\frac{k\times 1^2}{2}\right)}{1}=k+1+\ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

Logo, $\cancel{k+1}=\cancel{k+1}+\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Leftrightarrow 0=\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{k}{2}=e^0\Leftrightarrow\frac{k}{2}=1\Leftrightarrow k=1\times 2\Leftrightarrow k=2$.

***i*) Mudança de variável:** se $x\to 1^-$ então $x-1\to 0^-$. Seja $y=x-1\Leftrightarrow x=y+1$, $y\to 0^-$

5.2. Para $k=2$, vem que $g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x-2}+x-2}{x-1} & \text{se} \quad x<1\\ \dfrac{3x+\ln\left(x^2\right)}{x} & \text{se} \quad x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{e^{2x-2}+x-2}{x-1} & \text{se} \quad x<1\\ \dfrac{3x+2\ln x}{x} & \text{se} \quad x\geq 1\end{cases}$.

▪ Assimptota horizontal, quando $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x-2}+x-2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x-2}}{x-1}+\frac{x-2}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x-2}}{x-1}+\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x-1}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=$$

$$=\frac{0}{-\infty}+1=0+1=1$$

Logo, a recta de equação $y=1$ é assimptota horizontal do gráfico de g, quando $x\to-\infty$.

▪ Assimptota horizontal, quando $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{2\ln x}{x}\right)=3+2\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\textit{Limite notável}}=3+2\times 0=3$$

Logo, a recta de equação $y=3$ é assimptota horizontal do gráfico de g, quando $x\to+\infty$.

5.3. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico de g em $[1,+\infty[$, recorre-se ao estudo da sua segunda derivada. Para $x\in[1,+\infty[$, tem-se $g(x)=\dfrac{3x+2\ln x}{x}=\dfrac{3x}{x}+\dfrac{2\ln x}{x}\underset{x\geq1\Rightarrow x>0}{=}3+\dfrac{2\ln x}{x}$.

▪ $g'(x)=\left(3+\dfrac{2\ln x}{x}\right)'=0+\dfrac{(2\ln x)'\times x-(2\ln x)\times x'}{x^2}=\dfrac{2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times\cancel{x}-(2\ln x)\times 1}{x^2}=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}$

▪ $g''(x)=\left(\dfrac{2-2\ln x}{x^2}\right)'=\dfrac{(2-2\ln x)'\times x^2-(2-2\ln x)\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\dfrac{\left(0-2\times\frac{1}{x}\right)\times x^2-(2-2\ln x)\times 2x}{x^4}=$

$$=\frac{-2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times x^{\cancel{2}}-4x+4x\ln x}{x^4}=\frac{-2x-4x+4x\ln x}{x^4}=\frac{-6x+4x\ln x}{x^4}=\frac{x(4\ln x-6)}{x^4}=\frac{4\ln x-6}{x^3}$$

▪ $g''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{4\ln x-6}{x^3}=0\Leftrightarrow 4\ln x-6=0\ \wedge\ \underbrace{x^3\neq 0}_{\textit{Condição universal em } [1,+\infty[}\Leftrightarrow \ln x=\underbrace{\dfrac{6}{4}}_{\frac{6}{4}=\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=\sqrt{e^3}$.

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	1		$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$4\ln x-6$	$-$	$-$	0	$+$
x^3	$+$	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico da função g tem a concavidade votada para baixo em $\left[1,\sqrt{e^3}\right]$, tem a concavidade votada para cima em $\left[\sqrt{e^3},+\infty\right[$ e tem ponto de inflexão em $x=\sqrt{e^3}$. As coordenadas do ponto de inflexão são:

$$\left(\sqrt{e^3},g\left(\sqrt{e^3}\right)\right)=\left(\sqrt{e^3},3+\frac{2\ln\left(\sqrt{e^3}\right)}{\sqrt{e^3}}\right)=\left(\sqrt{e^3},3+\frac{2\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{e^3}}\right)=\left(\sqrt{e^3},3+\frac{\cancel{2}\times\frac{3}{\cancel{2}}}{\sqrt{e^3}}\right)=\left(\sqrt{e^3},3+\frac{3}{\sqrt{e^3}}\right)$$

6. Sabemos que duas rectas são paralelas se tiverem o mesmo declive e que o declive da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto é dado pela derivada da função nesse ponto.

Assim, para mostrar que os gráficos de f e de g possuem pelo menos um ponto, de igual abcissa e pertence ao intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$, tais que as rectas tangentes aos gráficos de f e de g nesses pontos são paralelas, basta mostrar que existe pelo menos um $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ tais que $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=0$. Para tal vamos usar o corolário do teorema de Bolzano.

Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=f'(x)-g'(x)$, onde:

- $f'(x)=\left(2-\cos^2(3x)\right)'=0-2\cos(3x)\times\left(\cos(3x)\right)'=-2\cos(3x)\times\left(-(3x)'\operatorname{sen}(3x)\right)=$

  $=-2\cos(3x)\times\left(-3\operatorname{sen}(3x)\right)=3\times2\operatorname{sen}(3x)\cos(3x)=3\operatorname{sen}(2\times3x)=3\operatorname{sen}(6x)$

- $g'(x)=\left(e^{\operatorname{sen}(2x)}\right)'=\left(\operatorname{sen}(2x)\right)'e^{\operatorname{sen}(2x)}=\left((2x)'\cos(2x)\right)e^{\operatorname{sen}(2x)}=2\cos(2x)e^{\operatorname{sen}(2x)}$

Pelo que, $h(x)=f'(x)-g'(x)=3\operatorname{sen}(6x)-2\cos(2x)e^{\operatorname{sen}(2x)}$.

Então:

- A função h é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a composição, o produto e a diferença entre funções contínuas no seu domínio (funções afim, trigonométricas e exponenciais). Logo, h é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}$.

- $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\operatorname{sen}\left(6\times\frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)e^{\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)} = 3\operatorname{sen}(\pi) - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 3\times 0 - 2\times\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\underbrace{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}_{>0} < 0$

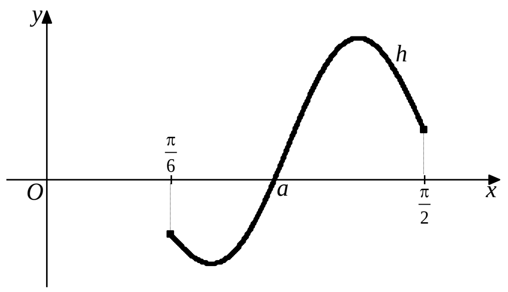
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\operatorname{sen}\left(6\times\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)e^{\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)} = 3\operatorname{sen}(3\pi) - 2\cos(\pi)e^{\operatorname{sen}(\pi)} = 3\times 0 - 2\times(-1)e^{0} = 2\times 1 = 2 > 0$

$\therefore$ $h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ têm sinais contrários.

Assim, pelo corolário do teorema de Bolzano existe pelo menos um $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ tais que $h(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = g'(x)$, ou seja, os gráficos de f e de g possuem pelo menos um ponto, de igual abcissa e pertence ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as rectas tangentes aos gráficos de f e de g nesses pontos são paralelas.

Vamos agora usar a calculadora para verificar que existe apenas uma abcissa nas condições do enunciado e para a determinar.

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = h(x) = f'(x) - g'(x)$ na janela de visualização $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-5, 7]$:



$\therefore$ $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$, com $a \approx 0{,}95$. Portanto, que existe apenas uma abcissa nas condições do enunciado e o seu valor é, aproximadamente, $0{,}95$

F I M