EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 6

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere todos os números pares de cinco algarismos. Alguns desses números satisfazem as seguintes condições:

- têm exactamente dois zeros, dispostos consecutivamente;
- não têm mais algarismos repetidos.

Quantos números existem nestas condições?

A 952 **B** 1176 **C** 1377 **D** 1701

2. Numa escola secundária de Lisboa, a variável aleatória X: «altura, em centímetros, dos rapazes da escola» tem distribuição normal. Sabe-se que $P(X > 155) = 70\%$. Sete rapazes dessa escola vão participar no "Parlamento dos Jovens" organizado pela Assembleia da República.

Seja a o valor médio da variável aleatória X. Qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de exactamente dois desses sete rapazes terem altura compreendida entre a e $2a-155$ centímetros?

A 0,004 **B** 0,025 **C** 0,275 **D** 0,318

3. Sejam a, b e c as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo rectângulo, com $a < b < c$.

Sabendo que $\log_4(c-a) + \log_4(c+a) = 3$, qual é o valor de b?

A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 12

4. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a recta de equação $2y - 6x = 1$ é assimptota do gráfico de g.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3g\left(\frac{1}{x}\right) - x\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\right)$?

A -3 **B** $-\frac{3}{2}$ **C** $\frac{3}{2}$ **D** 3

5. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\cos(ax)-1+(a+b)\operatorname{sen}(ax)$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $b\in\mathbb{R}$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{x}=2a$

Quais podem ser os valores de a e de b?

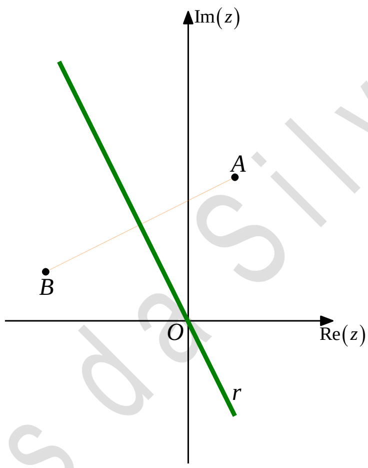
A $a=0$ e $b=2$

B $a=1$ e $b=3$

C $a=3$ e $b=1$

D $a=2$ e $b=0$

6. Na figura está representada, no plano complexo, a recta r, mediatriz do segmento de recta $[AB]$. Os pontos A e B são as imagens geométricas de duas raízes quartas, consecutivas, de um número complexo z.



Qual das seguintes condições pode definir a recta r?

A $|z-1-3i|=|z+6-2i|$

B $|z+3-i|=|z-1+3i|$

C $|z-2-6i|=|z+2+6i|$

D $|z-1-3i|=|z+3-i|$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida pela condição $\dfrac{x-2}{a^2}=-\dfrac{z}{4}\ \wedge\ y=2$ e o plano α definido por $ax=-2z$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

A recta r é perpendicular ao plano α.

Qual é o valor de a?

A -2

B -1

C 2

D 3

8. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_4 = 15$ e $u_{10} = 33$.

Qual é o valor de $\lim\left(\dfrac{u_n}{3n-6}\right)^{2n}$?

A e^{-2} **B** e^{3} **C** e^{6} **D** $+\infty$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto do números complexos, considere $w = \dfrac{1-2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{9}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{9}\right)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}$.

Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto solução da condição $z^2 = w\bar{z} \quad \wedge \quad z \neq 0$. Apresente as soluções na forma trigonométrica.

2. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$P(A)$	$P(A)$	$P(B\|A)$

Sabendo que A e B dois acontecimentos contidos num espaço de resultados S, associado a uma experiência aleatória tal que $P(A \cap B) = 0{,}08$ e $P(A) > 0{,}1$.

Qual é o valor de $P\left(A \middle| \left(\bar{A} \cup \bar{B}\right)\right)$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Uma empresa tem 120 funcionários.

Sabe-se que:

- um terço dos funcionários são licenciados;
- 20% dos funcionários não licenciados são do sexo masculino.

Escolhem-se simultaneamente e ao acaso seis funcionários para desempenhares tarefa diferenciadas num evento organizado pela empresa.

Considere os acontecimentos:

A: «pelo menos cinco dos funcionários escolhidos são do sexo feminino»

B: «os seis funcionários escolhidos não são licenciados»

Uma expressão que permite determinar o valor de $P(A|B)$ é $\frac{\left(16\times {}^{64}C_5 + {}^{64}C_6\right)\times 6!}{{}^{80}A_6}$. Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

A sua composição deve incluir:

- uma interpretação do significado de $P(A|B)$ no contexto da situação descrita;
- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

4. Um filme estreou numas das salas do cinema CINEMAX. A percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme, t dias após a estreia do mesmo, é dada por:

$$M(t)=\left(4t^2+48t+144\right)e^{-0,2t-1,2}\ ,\ t\in[0,20]$$

Admita que $M(0)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme no dia da estreia, 4 de Junho de 2015, $M(1)$ é a percentagem espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme no dia 5 de Junho de 2015 e assim sucessivamente.

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva os dois itens seguintes.

4.1. Em que dia a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme é máxima. Indique o valor dessa percentagem arredondado às décimas.

4.2. Num outro cinema, o CINEPLUS, o mesmo filme estreou no mesmo dia numa das suas salas. No entanto percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme, t dias após a estreia do mesmo, é dada por:

$$P(t)=5(t+6)^2\,e^{-0,347t-0,68814}\ ,\ t\in[0,20]$$

Da mesma forma, admita que $P(0)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme no dia da estreia, 4 de Junho de 2015, $P(1)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme no dia 5 de Junho de 2015 e assim sucessivamente.

Durante quantos dias a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme não foi inferior à percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme?

Apresente os resultados finais arredondados às unidades e caso proceda a arredondamentos intermédios, utilize, no mínimo, cinco casas decimais.

Sugestão: decomponha o polinómio $4t^2+48t+144$.

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(6x)-\ln 4}{e^{3x-1}-e} & \text{se} \quad 0<x<\dfrac{2}{3}\\[2ex] \dfrac{\ln(x^3)-1}{x^2} & \text{se} \quad x\geq\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Resolva os dois primeiros itens recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

5.1. Estude a função g quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados. Caso existam, indique as suas equações.

5.2. Seja f a função de domínio $\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[$ tal que $f'(x)=g(x)$, $\forall x\in\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[$.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

5.3. Considere, num referencial xOy, o triângulo $[OPQ]$ tais que:

- o ponto P pertence ao gráfico de g;
- o ponto Q pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa que o ponto P;
- a área do triângulo $[OPQ]$ é $\dfrac{1}{4}$.

Seja x a abcissa do ponto P, com $x\in\left[\dfrac{2}{3},5\right]$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a(s) abcissa(s) do ponto P e a(s) respectiva(s) ordenada(s).

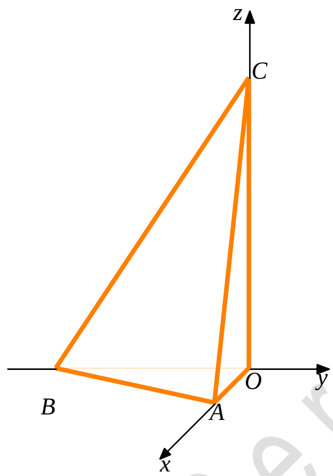
Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar a(s) abcissa(s) do ponto P e a(s) respectiva(s) ordenada(s), arredondadas às milésimas.

6. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[AOBC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semi-eixo positivo Ox;
- o ponto B pertence ao semi-eixo negativo Oy;
- o ponto C pertence ao semi-eixo positivo Oz;
- $\overline{OB} = 2\overline{OA}$ e $\overline{OC} = 3\overline{OA}$.



Resolva os dois itens seguintes recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

6.1. Escreva uma equação do plano paralelo ao plano ABC que contém o ponto D de coordenadas $(0,1,-2)$.

Sugestão: designe por k a abcissa do ponto A.

6.2. Seja α a amplitude do ângulo BAC.

Qual é o valor de $\operatorname{tg}^2(\pi-\alpha)+10\operatorname{sen}(-2\alpha)$?

7. Considere a função h, de domínio $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, definida por $h(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2\cos^2 x}$.

Resolva os dois itens seguintes recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

7.1. Seja $a \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Sem determinar os zeros da função h, mostre que h tem pelo menos um zero em $[\pi-a,\pi+a]$.

Determinando os zeros de h, indique o valor máximo de a de modo que h tenha um único zero em $]\pi-a,\pi+a[$.

7.2. Mostre, por definição, que $h'(\pi)=-\dfrac{3}{2}$ e escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa π.

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. A **2.** C **3.** C **4.** B **5.** D **6.** D **7.** A **8.** C

Grupo II – Itens de resposta aberta

1. $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis} \frac{\pi}{54}, \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis} \frac{37\pi}{54}, \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis} \frac{73\pi}{54} \right\}$

2. $\frac{8}{23}$

4.1. A percentagem de espectadores que frequentaram o cinema e que foram ver o filme foi máxima no dia 8 de Junho de 2015. O valor dessa percentagem foi, aproximadamente, $54{,}1\%$.

4.2. Durante dezasseis dias.

5.1. A.V.: $x=0$; A.H.: $y=0$

5.2. o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\sqrt[6]{e^5}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{2}{3}, \sqrt[6]{e^5}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x=\sqrt[6]{e^5}$.

5.3. $P(a, g(a))$, com $a \approx 1{,}152$ e $g(a)=\frac{\ln(a^3)-1}{a^2} \approx -0{,}434$ ou $P(b, g(b))$, com $b \approx 1{,}923$ e $g(b)=\frac{\ln(b^3)-1}{b^2} \approx 0{,}26$.

6.1. $6x-3y+2z=-7$ **6.2.** $\frac{231}{5}$

7.1. $\left\{\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$; $a=\frac{\pi}{3}$ **7.2.** $y=-\frac{3x}{2}+\frac{3\pi}{2}$