EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 5 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Recursos para Matemática

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Começa-se por escolher doze compartimentos entre os vinte para colocar todas as bolas. O número de maneiras de o fazer é ${}^{20}C_{12}$. Para cada uma destas maneiras, as cinco bolas pretas, indistinguíveis, podem ser distribuídas pelos doze compartimentos distintos de ${}^{12}C_5$ formas diferentes. Finalmente, as restantes sete bolas, distintas entre si, permutam nos restantes sete compartimentos de $7!$ maneiras distintas.

Assim, o número pedido é ${}^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 7!$.

Outra resolução:

Começa-se por escolher cinco compartimentos entre os vinte para as cinco bolas pretas, indistinguíveis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{20}C_5$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{15}A_7$ formas distintas de escolher, ordenadamente, sete compartimentos entre os restantes quinze para as restantes sete bolas, distintas entre si.

Logo, o número pedido é ${}^{20}C_5 \times {}^{15}A_7$.

${}^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 7! = {}^{20}C_5 \times {}^{15}A_7 = 502831929600$

Resposta: B

2. Tem-se que ${}^{n}C_{308} + {}^{n}C_{309} = {}^{n+1}C_{1707} \Leftrightarrow {}^{n+1}C_{309} = {}^{n+1}C_{1707}$.

Assim, pela regra da simetria (${}^{n}C_p = {}^{n}C_{n-p}\,,\ \forall n, p \in \mathbb{N}_0\,,\ n \geq p$) vem:

$${}^{n+1}C_{309} = {}^{n+1}C_{\underset{n+1-309}{1707}} \Leftrightarrow n+1-309 = 1707 \Leftrightarrow n = 2015$$

O primeiro e o último elemento de qualquer linha é o 1. A linha seguinte à 2015 é a 2016. Logo, a soma de todos os elementos da linha 2016, excluindo o primeiro e o último é igual a $2^{2016} - 2 = 2 \times 2^{2016} - 2 = 2 \times \left(2^{2015} - 1\right)$.

Resposta: A

3. Tem-se:

$$v_{n+1}-v_n=\log_4\left(2^{3(n+1)-1}\right)-\log_4\left(2^{3n-1}\right)=\log_4\left(\frac{2^{3n+3-1}}{2^{3n-1}}\right)=\log_4\left(2^{\cancel{3n}+2-\cancel{3n}+1}\right)=\log_4\left(2^3\right)=\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}=\frac{3}{2}$$

Logo, (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{3}{2}$.

Resposta: D

4. Tem-se $\lim(u_n)=\lim\frac{1}{n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{i)}{=}\lim_{y\to0^+}\frac{1}{\frac{1}{y}\operatorname{sen} y}=\frac{1}{\lim_{y\to0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}=\frac{1}{1^-}=1^+$.

Logo, $u_n-2\to1^+-2=-1^+$ e portanto, pela definição de limite segundo Heine, $\lim(u_n-2)=\lim_{x\to-1^+}f(x)$.

Assim, pretende-se identificar o gráfico onde $\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$. Esse gráfico é o da opção **C**.

i) Mudança de variável: Se $n\to+\infty$ então $\frac{1}{n}\to0^+$ Seja $y=\frac{1}{n}\Leftrightarrow n=\frac{1}{y}$, $y\to0^+$

Resposta: C

5. Tem-se que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}$. Assim:

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}\right)=\underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FA}}_{=0\left(\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{FA}\right)}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{FA}+\underbrace{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}}_{=0\left(\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AC}\right)}=$$

$$=0+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{FA}\right\|\times\cos(180^\circ)+0=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{FA}\right\|$$

Como $\overline{FA}=\overline{CD}+\overline{DE}$ e $\overline{CD}=2\overline{DE}\Leftrightarrow\overline{DE}=\frac{\overline{CD}}{2}$ vem, $\overline{FA}=\overline{CD}+\frac{\overline{CD}}{2}\Leftrightarrow\overline{FA}=\frac{3}{2}\overline{CD}\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{FA}\right\|=\frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$.

Assim, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FC}=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{FA}\right\|=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2=$

$$=\underbrace{\underbrace{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2}_{A_{[ACEF]}}-\underbrace{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2}_{A_{[BCDG]}}}_{A_{[ABGDEF]}=a}-\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2=a-\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2$$

Como $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2>0$ então $a-\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2<a$ e portanto $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FC}<a$.

Outra resolução: Seja $\overline{DE} = x$, pelo que $\overline{CD} = 2\overline{DE} = 2x$ e $\overline{CE} = x + 2x = 3x$. Assim:

$$a = A_{[ABGDEF]} = A_{[ACEF]} - A_{[BCDG]} = \left(\overline{DE}\right)^2 - \left(\overline{CD}\right)^2 = (3x)^2 - (2x)^2 = 9x^2 - 4x^2 = 5x^2$$

Assim:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}\right) = \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FA}}_{=0\left(\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{FA}\right)} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FA} + \underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}}_{=0\left(\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AC}\right)} =$$

$$= 0 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{FA}\right\| \times \cos\left(180^{\text{o}}\right) + 0 \underset{\overline{AC} = \overline{FA} = \overline{CE}}{=} (3x)^2 - 2x \times 3x$$

$$= 9x^2 - 6x^2 = 3x^2$$

Portanto $a = A_{[ABGDEF]} = 5x^2$ e $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = 3x^2$. Como $3x^2 < 5x^2$, então $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} < a$.

Resposta: C

6. Como a função g tem limite no ponto de abcissa 0, então $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$. Tem-se:

- $$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos(2ax)}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \left(\cos^2(ax) - \operatorname{sen}^2(ax)\right)}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{1 - \cos^2(ax)}^{\operatorname{sen}^2(ax)} + \operatorname{sen}^2(ax)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{2\operatorname{sen}^2(ax)}{x^2} = 2\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{x^2} = 2\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\right)^2 = 2\left(\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} \times a\right)^2 = 2 \times (1 \times a)^2 = 2a^2$$

Se $x \to 0^-$ então $ax \to 0$ (limite notável)

- $$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+a) - \ln a}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(\dfrac{x+a}{a}\right)}{x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(\dfrac{x}{a} + 1\right)}{\dfrac{x}{a}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4a}$$

Se $x \to 0^-$ então $\dfrac{x}{a} \to 0$ (limite notável)

$$\therefore \ 2a^2 = \frac{1}{4a} \Leftrightarrow 8a^3 = 1 \Leftrightarrow a^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Resposta: B

7. Sejam a, b e c, com $a<b<c$, respectivamente, o zero, o maximizante e o minimizante da função f.

Tem-se que $D_g=\{x\in\mathbb{R}: f(x)>0\}=]a,+\infty[$ e que $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $\forall x\in]a,+\infty[$.

Para $x\in]a,+\infty[$, $f(x)>0$ pelo que o sinal de g' depende apenas do sinal de f', isto é, têm o mesmo sinal.

Fazendo um quadro de variação da monotonia da função f, vem:

x	a		b		c	$+\infty$
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$

Logo, $g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in]a,b]\cup[c,+\infty[$ e $g'(x)\leq 0 \Leftrightarrow f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[b,c]$.

Portanto, o único gráfico que é compatível com a conclusão retirada a partir da tabela é o gráfico da opção **D**.

Resposta: D

8. Tem-se:

- o polinómio p tem grau 3. Portanto tem três raízes complexas;
- o polinómio p tem todos os coeficientes reais. Portanto, se z_1 for raiz de p então $\overline{z_1}$ também é raiz de p.

Assim:

- 2 e $1+i$ **podem** ser raízes de p. A outra raiz teria de ser $1-i$, conjugado de $1+i$;
- $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ **não podem ser** raízes de p, visto que o conjugado de $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ não é $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$. Se $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ fossem raízes de p, então $\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e $\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ também seriam raízes. Portanto, p teria quatro raízes complexas, o que não pode ser uma vez que p tem apenas três raízes complexas;
- $i^{4n+5}=i^5=i$ e $\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$ **podem** ser raízes de p, pois o conjugado de i é $-i$. A outra raiz teria de ser real.
- $2+3i$ e $2-3i$ **podem** ser raízes de p, pois o conjugado de $2+3i$ é $2-3i$. A outra raiz teria de ser real.

Resposta: B

1. Tem-se:

- $\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)}+i\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\operatorname{cis}\frac{3\pi}{10}$

- $\left(i\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^{27}=\underbrace{i^{27}}_{i^{6\times 4+3}}\times\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^{27}=i^3\times\operatorname{cis}\left(27\times\frac{\pi}{9}\right)=-i\operatorname{cis}(3\pi)=-i\operatorname{cis}\pi=-i\times(-1)=i$

Assim:

$$z_1=\frac{1+\left(i\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^{27}}{\sqrt{3}i-1}\times\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\underset{\text{i)}}{=}\frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}}\times\operatorname{cis}\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\times\operatorname{cis}\frac{3\pi}{10}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{60}\right)$$

Logo, $(z_1)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\operatorname{cis}\left(-\frac{7n\pi}{60}\right)$.

Como $|\arg z|=\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow\arg z=-\frac{\pi}{12}\ \vee\ \arg z=\frac{\pi}{12}$, a imagem geométrica de $(z_1)^n$ pertence à região do plano definida por $|\arg z|=\frac{\pi}{12}$ se:

$$-\frac{7n\cancel{\pi}}{60}=-\frac{\cancel{\pi}}{12}+2k\cancel{\pi}\quad\vee\quad-\frac{7n\cancel{\pi}}{60}=\frac{\cancel{\pi}}{12}+2k\cancel{\pi}\,,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7n=-\frac{60}{12}+120k\quad\vee\quad-7n=\frac{60}{12}+120k\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -7n=-5+120k\quad\vee\quad-7n=5+120k\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\underset{\text{ver nota}}{\Leftrightarrow}\ n=\frac{5}{7}-\frac{120k}{7}\quad\vee\quad n=-\frac{5}{7}-\frac{120k}{7}\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

Nota: poderia ter-se optado por deixar positivo o sinal de $\frac{120k}{7}$, pois $k\in\mathbb{Z}$.

Então:

se $k=0 \rightarrow n=\frac{5}{7}\notin\mathbb{N} \quad \vee \quad n=-\frac{5}{7}\notin\mathbb{N}$

se $k=1 \rightarrow n=\frac{5}{7}-\frac{120}{7}=-\frac{115}{7}\notin\mathbb{N} \quad \vee \quad n=-\frac{5}{7}-\frac{120}{7}=-\frac{125}{7}\notin\mathbb{N}$ (para qualquer k inteiro positivo, n é sempre negativo e portanto não poderá ser natural)

se $k=-1 \rightarrow n=\frac{5}{7}+\frac{120}{7}=\frac{125}{7}\notin\mathbb{N} \quad \vee \quad n=-\frac{5}{7}+\frac{120}{7}=\frac{115}{7}\notin\mathbb{N}$

se $k=-2 \rightarrow n=\frac{5}{7}+\frac{120\times 2}{7}=\frac{245}{7}=35\in\mathbb{N} \quad \vee \quad n=-\frac{5}{7}+\frac{120\times 2}{7}=\frac{235}{7}\notin\mathbb{N}$

$\therefore\ n=35$

i) Para escrever $1+i$ na forma trigonométrica, vem: $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $1+i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{1}=1$ e $\theta\in 1.^{\text{o}}$ quadrante, pelo que $\theta=\frac{\pi}{4}$. Assim $1+i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$.

Para escrever $\sqrt{3}i-1$ na forma trigonométrica, vem: $\left|\sqrt{3}i-1\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$. Sendo θ um argumento de $\sqrt{3}i-1$, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta\in 2.^{\text{o}}$ quadrante, pelo que $\theta=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$. Assim $\sqrt{3}i-1=2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$.

2.

2.1. Considere-se os acontecimentos:

E / V: «o dado extraído é equilibrado/viciado»

P / I: «sair face numerada com um número par/ímpar»

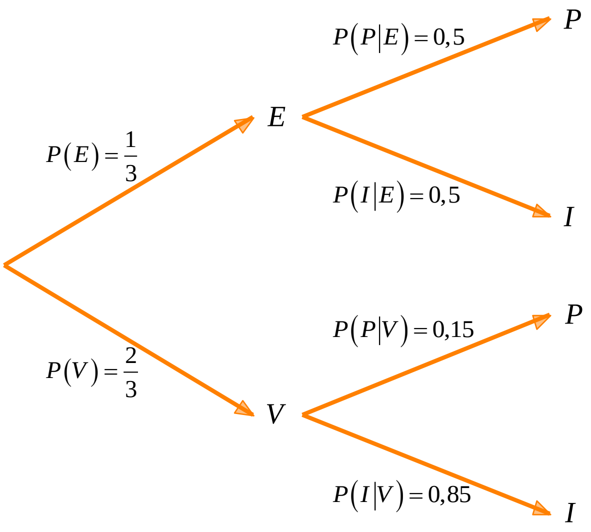
Pretende-se determinar, $P(E|I)$.

Tem-se que $P(V)=2P(E)$. Assim:

$$P(V)+P(E)=1\Leftrightarrow 2P(E)+P(E)=1\Leftrightarrow 3P(E)=1\Leftrightarrow P(E)=\frac{1}{3}\Rightarrow P(V)=\frac{2}{3}$$

Além disso, sabe-se também que $P(P|V)=0{,}15\Rightarrow P(I|V)=0{,}85$.

Recorrendo a um diagrama de árvore:



Logo, $P(E|I)=\dfrac{P(E\cap I)}{P(I)}=\dfrac{P(I|E)\times P(E)}{P(I\cap E)+P(I\cap V)}=\dfrac{P(I|E)\times P(E)}{P(I|E)\times P(E)+P(I|V)\times P(V)}=$

$$=\frac{0,5\times\frac{1}{3}}{0,5\times\frac{1}{3}+0,85\times\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{15}}=\frac{15}{66}=\frac{5}{22}$$

Outra resolução: Pode-se responder a esta questão construindo uma tabela. Considerando os mesmos acontecimentos, tem-se:

	P	I	p.m.
E	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
V	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{2}{3}$
p.m.	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{15}$	1

Justificações:

- $P(P|V)=0,15\Leftrightarrow\dfrac{P(P\cap V)}{P(V)}=0,15\Leftrightarrow P(P\cap V)=0,15\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{10}$
- $P(I\cap V)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{17}{30}$
- $P(P|E)=0,5\Leftrightarrow\dfrac{P(P\cap E)}{P(E)}=0,5\Leftrightarrow P(P\cap E)=0,5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$
- $P(I\cap E)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$

Logo, $P(E|I)=\dfrac{P(E\cap I)}{P(I)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{15}}=\dfrac{15}{66}=\dfrac{5}{22}$

2.2. A variável aleatória X pode tomar os valores 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, ou seja, $X=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Os acontecimentos elementares $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ e $\{6\}$ são incompatíveis, isto é:

$$P(\{1,2,3,4,5,6\})=P(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}\cup\{6\})=$$

$$=P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})$$

Tem-se:

- $P(\text{sair face numerada com um número par})=0{,}15$, ou seja, $P(\{2,4,6\})=0{,}15$.

Como $P(\{2\})=P(\{4\})=P(\{6\})$, vem $P(\{2\})=P(\{4\})=P(\{6\})=\frac{0{,}15}{3}=0{,}05$.

$\therefore\ P(X=2)=P(X=4)=P(X=6)=0{,}05$

- $P(\text{sair face numerada com um número ímpar})=0{,}85$, ou seja, $P(\{1,3,5\})=0{,}85$.

- $P(\text{sair face numerada com um número ímpar}\,|\,\text{sair face numerada com um número ímpar})=\frac{1}{5}$, ou seja:

$$P(\{2,3,5\}|\{1,3,5\})=\frac{1}{5}$$

Assim, $P(\{2,3,5\}|\{1,3,5\})=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{P(\{2,3,5\}\cap\{1,3,5\})}{P(\{1,3,5\})}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{P(\{3,5\})}{0{,}85}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow P(\{3,5\})=\frac{1}{5}\times 0{,}85\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(\{3,5\})=0{,}17$$

Assim, como $P(\{1,3,5\})=P(\{1\})+P(\{3,5\})$, vem:

$$P(\{1,3,5\})=P(\{1\})+P(\{3,5\})\Leftrightarrow 0{,}85=P(\{1\})+0{,}17\Leftrightarrow P(\{1\})=0{,}85-0{,}17\Leftrightarrow P(\{1\})=0{,}68$$

$\therefore\ P(X=1)=0{,}68$

- $P(\text{sair face numerada com um múltiplo de 3}\,|\,\text{sair face numerada com um número primo})=0{,}55$, ou seja:

$$P(\{3,6\}|\{2,3,5\})=0{,}55$$

Assim,

$$P\left(\{3,6\}\middle|\{2,3,5\}\right)=0,55 \Leftrightarrow \frac{P\left(\{3,6\}\cap\{2,3,5\}\right)}{\underbrace{P\left(\{2,3,5\}\right)}_{P(\{2\})+P(\{3,5\})=0,05+0,17=0,22}}=0,55 \Leftrightarrow \frac{P\left(\{3\}\right)}{0,22}=0,55 \Leftrightarrow P\left(\{3\}\right)=0,55\times 0,22=0,121$$

$\therefore\ P(X=3)=0,121$

Finalmente, $P\left(\{3,5\}\right)=P\left(\{3\}\right)+P\left(\{5\}\right)\Leftrightarrow 0,17=0,121+P\left(\{5\}\right)\Leftrightarrow P\left(\{5\}\right)=0,17-0,121\Leftrightarrow P\left(\{5\}\right)=0,049$

$\therefore\ P(X=5)=0,049$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,68	0,05	0,121	0,05	0,049	0,05

3.

3.1. Seja a a abcissa com ponto V. Tem-se:

- $V(a,y,5)$. Como $V\in ACV$, vem $5a+8y+10\times 5=30\Leftrightarrow 8y=-20-5a\Leftrightarrow y=-\frac{20}{8}-\frac{5a}{8}\Leftrightarrow y=-\frac{5}{2}-\frac{5a}{8}$.

Logo, $V\left(a,-\frac{5}{2}-\frac{5a}{8},5\right)$

- A abcissa do ponto A é igual ao do dobro da abcissa do ponto V e $A\in xOz \Rightarrow A(2a,0,z)$.

Como $A\in ACV$, vem $5\times 2a+8\times 0+10z=30\Leftrightarrow 10a+10z=30\Leftrightarrow a+z=3\Leftrightarrow z=3-a$.

Logo, $A(2a,0,3-a)$

- $C\in Oz \Rightarrow C(0,0,z)$. Como $C\in ACV$, vem $5\times 0+8\times 0+10z=30\Leftrightarrow 10z=30\Leftrightarrow z=3$. Logo, $C(0,0,3)$.

- $\overrightarrow{AV}=V-A=\left(a,-\frac{5}{2}-\frac{5a}{8},5\right)-(2a,0,3-a)=\left(-a,-\frac{5}{2}-\frac{5a}{8},2+a\right)$

- $\overrightarrow{CA}=A-C=(2a,0,3-a)-(0,0,3)=(2a,0,-a)$

Assim, $\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{CA}=-56 \Leftrightarrow \left(-a,-\frac{5}{2}-\frac{5a}{8},2+a\right)\cdot(2a,0,-a)=-56 \Leftrightarrow -2a^2+(2+a)(-a)=-56 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2a^2-2a-a^2+56=0 \Leftrightarrow -3a^2-2a+56=0 \Leftrightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times(-3)\times 56}}{2\times(-3)}$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{14}{3} \quad \vee \quad a=4 .$$

Como $a>0$, vem $a=4$.

Logo, as coordenadas do ponto A são $(2\times 4,0,3-4)=(8,0-1)$ e as do ponto V são $\left(4,-\frac{5}{2}-\frac{5\times 4}{8},5\right)=(4,-5,5)$.

3.2. Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vector normal do plano ABC. Este vector é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC}$, dois vectores não colineares do plano ABC (o ponto D pertence ao plano ABC).

Tem-se, $\overrightarrow{AD}=D-A=(0,-4,-1)-(8,0,-1)=(-8,-4,0)$ e $\overrightarrow{AC}=C-A=(0,0,3)-(8,0,-1)=(-8,0,4)$.

Logo,

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(-8,-4,0)=0\\ (a,b,c)\cdot(-8,0,4)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-8a-4b=0\\ -8a+4c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4b=8a\\ 4c=8a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-2a\\ c=2a\end{cases}$$

Concluímos então que as coordenadas do vector $\vec{n}$ são da forma $(a,-2a,2a)$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tomando, por exemplo, $a=1$, um vector normal de ABC é $\vec{n}(1,-2,2)$. Logo, como $C\in ABC$, uma equação do plano ABC pode ser, $1(x-0)-2(y-0)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z-6=0 \Leftrightarrow x-2y+2z=6$.

De uma outra forma: o plano ABC contém os pontos A, C e D que não são colineares. Por três quaisquer pontos não colineares passa um único plano. Assim, se os pontos A, C e D pertencerem ao plano definido pela condição $x-2y+2z=6$, então esta é uma condição que define o plano ABC:

$A(8,0,-1)$: $8-2\times 0+2\times(-1)=6 \Leftrightarrow 8-2=6 \Leftrightarrow 6=6$. Afirmação verdadeira

$C(0,0,3)$: $0-2\times 0+2\times 3=6 \Leftrightarrow 6=6$. Afirmação verdadeira

$D(0,-4,-1)$: $0-2\times(-4)+2\times(-1)=6 \Leftrightarrow 8-2=6 \Leftrightarrow 6=6$. Afirmação verdadeira

Logo, ABC: $x-2y+2z=6$.

▪ A altura da pirâmide é dada por $\overline{VP} = \left\| \overrightarrow{VP} \right\|$, sendo P o ponto de intersecção da recta que contém o ponto V e é perpendicular ao plano ABC. Assim, um vector director dessa recta pode ser $\vec{n}(1,-2,2)$ e portanto uma sua equação vectorial é $(x,y,z)=(4,-5,5)+k(1,-2,2)$, $k\in\mathbb{R}$. Assim:

$$\begin{cases} (x,y,z)=(4,-5,5)+k(1,-2,2), & k\in\mathbb{R} \\ x-2y+2z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+k \\ y=-5-2k \\ z=5+2k \\ 4+k-2(-5-2k)+2(5+2k)=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \\ 4+k+10+4k+10+4k=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \\ 9k=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \\ k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2 \\ y=-5-2\times(-2) \\ z=5+2\times(-2) \\ \text{——} \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=1 \\ \text{——} \end{cases}$$

Logo, $P(2,-1,1)$.

Assim, $\overrightarrow{VP}=P-V=(2,-1,1)-(4,-5,5)=(-2,4,-4)$. Portanto, a altura da pirâmide é:

$$\left\|\overrightarrow{VP}\right\|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$$

4.

4.1. A função g é contínua em $x=1$ se $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=g(1)$.

▪ $$\lim_{x\to1^-} g(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x}-x^2}{e^{-2x+2}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1^-}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{x}-x^2\right)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}^{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2}}{\left(e^{-2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-x^4}{\left(e^{-2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=$$

$$=\underset{i)\ x\to1^-}{\lim}\frac{(x-1)\left(-x^3-x^2-x\right)}{\left(e^{-2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=-\frac{1}{2}\times\lim_{x\to1^-}\frac{-2(x-1)}{e^{-2(x-1)}-1}\times\lim_{x\to1^-}\frac{-x^3-x^2-x}{\sqrt{x}+x^2}=-\frac{1}{2}\times1\times\frac{-1^3-1^2-1}{\sqrt{1}+1^2}$$

Se $x\to1^-$ então $-2(x-1)\to0^+$ (inverso de um limite notável)

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{-3}{2}=\frac{3}{4}$$

▪ $$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2\ln x-2}{x}=\frac{1^2\ln(1)-2}{1}=\frac{1\times0-2}{1}=-2$$

- $g(1)=\dfrac{1^2\ln(1)-2}{1}=\dfrac{1\times 0-2}{1}=-2$

Logo, g não é contínua em $x=1$, pois $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ são finitos, a recta de equação $x=1$ não é assimptota vertical do gráfico de g. Como g é contínua em $[0,+\infty[\setminus\{1\}$, o seu gráfico não tem assimptotas verticais.

i) Utilizando a regra de Ruffini podemos decompor os polinómios $x-x^4=-x^4+x$:

	-1	0	0	1	0
1		-1	-1	-1	0
	-1	-1	-1	0	0

Logo, $x-x^4=(x-1)(-x^3-x^2-x)$

4.2. Para $x\in[1,+\infty[$, tem-se $g(x)=\dfrac{x^2\ln x-2}{x}=\dfrac{x^{\cancel{2}}\ln x}{\cancel{x}}-\dfrac{2}{x}=x\ln x-\dfrac{2}{x}$.

- $g'(x)=1\times\ln x+\cancel{x}\times\dfrac{1}{\cancel{x}}-\dfrac{0\times x-2\times 1}{x^2}=\ln x+1-\dfrac{-2}{x^2}=\ln x+1+\dfrac{2}{x}$

- $g''(x)=\dfrac{1}{x}+0+\dfrac{0\times x^2-2\times 2x}{(x^2)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-4x}{x^4}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^3}=\dfrac{x^2-4}{x^3}$

- $g''(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0 \wedge \underbrace{x^3\neq 0}_{\text{Condição universal em }[1,+\infty[}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4}\Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

Como $x\in[1,+\infty[$, vem $x=2$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	1		2	$+\infty$
x^2-4	$-$	$-$	0	$+$
x^3	$+$	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\cap$	p.i.	$\cup$

Para $x \in [1,+\infty[$, o gráfico da função g tem a concavidade votada para baixo em $[1,2]$, tem a concavidade votada para cima em $[2,+\infty[$ e tem ponto de inflexão em $x=2$. As coordenadas do ponto de inflexão são $\left(2, g(2)\right) = \left(2, \ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)^*$.

$$^* g(2) = 2\ln 2 - \frac{2}{2} = \ln\left(2^2\right) - 1 = \ln(4) - \ln(e) = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

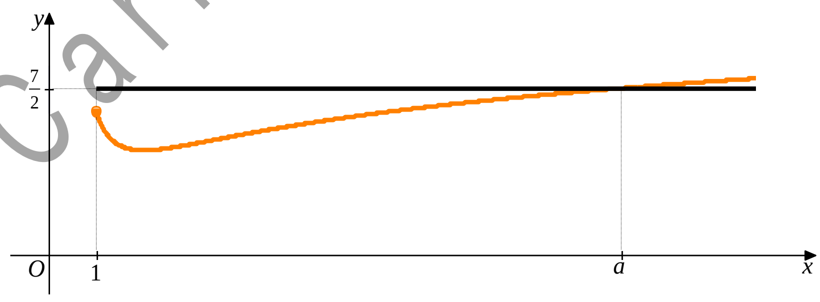
4.3. A recta r tem inclinação α, portanto $m_r = \operatorname{tg}\alpha$.

Tem-se que, $7\underbrace{\operatorname{sen}(\alpha+\pi)}_{-\operatorname{sen}\alpha} = -2\underbrace{\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}_{-\cos\alpha} \Leftrightarrow -7\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2}{7} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{7} \Leftrightarrow m_r = -\frac{2}{7}$.

Para $x \in [1,+\infty[$, pretende-se determinar as coordenadas de um ponto P pertencente ao gráfico de g, $P\left(x, g(x)\right)$, tal que a recta tangente ao gráfico de g em P seja perpendicular à recta r. Logo, essa recta terá de ter declive $-\frac{1}{m_r} = \frac{7}{2}$.

Como declive da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto é dado pela derivada nesse ponto, a abcissa do ponto P é a solução da equação $g'(x) = -\frac{1}{m_r} = \frac{7}{2}$.

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = g'(x) = \ln x + 1 + \frac{2}{x^2}$ e $y_2 = \frac{7}{2}$ na janela de visualização $[1,15] \times [0,7]$.

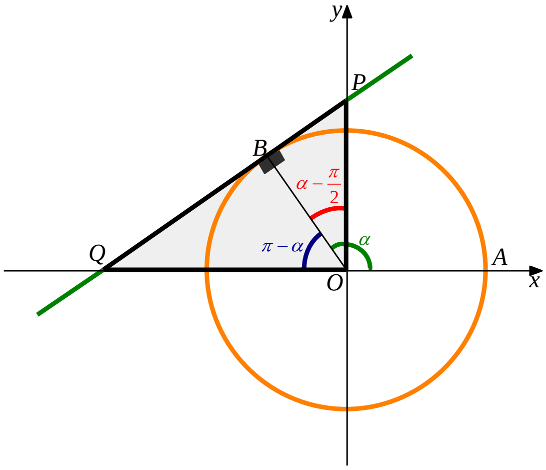


Logo, $g'(x) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = a$, com $a \approx 12$.

Portanto, as coordenadas de P são $\left(a, g(a)\right)$, onde $g(a) \approx g(12) = 12\ln(12) - \frac{2}{12} \approx 29{,}7$.

5.

5.1. Considere-se a figura seguinte:



A recta QP é tangente à circunferência no ponto B. Logo, QP é perpendicular ao segmento de recta $[OB]$ e portanto os triângulos $[OBQ]$ e $[OPB]$ são rectângulos em B.

Tem-se, $\overline{OB}=1$, a amplitude do ângulo OBQ é $\pi-\alpha$ e a do ângulo OBP é $\alpha-\frac{\pi}{2}$. Assim:

- $\cos(\pi-\alpha)=\frac{1}{\overline{OQ}} \underset{\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha}{\Leftrightarrow} -\cos\alpha=\frac{1}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \overline{OQ}=-\frac{1}{\cos\alpha}$

- $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\overline{OP}} \underset{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

Logo, $A_{[OPQ]}=\frac{\overline{OQ}\times\overline{OP}}{2}=\frac{-\frac{1}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{2}=-\frac{1}{2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}=-\underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}(2\alpha)}}_{g(\alpha)}$.

Outra resolução:

As coordenadas do ponto B são $(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$, onde $\cos\alpha<0$ e $\operatorname{sen}\alpha>0$. O ponto Q pertence ao eixo Ox, portanto as suas coordenadas são do tipo $(x,0)$ e o ponto P pertence ao eixo Oy, portanto as suas coordenadas são do tipo $(0,y)$.

Como $QP \perp OB$, vem:

- $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0 \Leftrightarrow (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \cdot (x - \cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha) = 0 \Leftrightarrow x\cos\alpha - \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\cos\alpha = \underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} \Leftrightarrow x\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Portanto, $Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}, 0\right)$. Como $\cos\alpha < 0$, vem $\overline{OQ} = -\frac{1}{\cos\alpha}$.

- $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \cdot (-\cos\alpha, y - \operatorname{sen}\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\cos^2\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y\operatorname{sen}\alpha = \underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} \Leftrightarrow y\operatorname{sen}\alpha = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Portanto, $P\left(0, \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$. Como $\operatorname{sen}\alpha > 0$, vem $\overline{OP} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Logo, $A_{[OPQ]} = \dfrac{\overline{OQ} \times \overline{OP}}{2} = \dfrac{-\frac{1}{\cos\alpha} \times \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{2} = -\dfrac{1}{2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha} = \underbrace{-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2\alpha)}}_{g(\alpha)}$.

5.2. Para determinar o valor de α para o qual a área do triângulo $[ABOCD]$ é mínima, recorre-se ao estudo do sinal de g':

- $g'(\alpha) = -\dfrac{0 \times \operatorname{sen}(2\alpha) - 1 \times 2\cos(2\alpha)}{(\operatorname{sen}(2\alpha))^2} = \dfrac{2\cos(2\alpha)}{\operatorname{sen}^2(2\alpha)}$

- $g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\cos(2\alpha)}{\operatorname{sen}^2(2\alpha)} = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{\operatorname{sen}^2(2\alpha) \neq 0}_{\text{Condição universal em } \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[} \quad \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, vem $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ $(k = 1)$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g', vem:

α	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(\alpha)$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
$g(\alpha)$	n.d.	↘	mín.	↗	n.d.

A área do triângulo $[OPQ]$ é mínima se $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. O valor dessa área mínima é dado por:

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\operatorname{sen}\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Se $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ então $\overline{OP} = \overline{OQ}$, pelo que o triângulo $[OPQ]$ é rectângulo e isósceles.

6. Tem-se que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3+x)-f(3)}{x^2-3x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(3+x)-f(3)}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{f(3+x)-f(3)}{x}}_{f'(3)} \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(3)\times\frac{1}{-3} = 0 \Leftrightarrow f'(3) = 0$$

Assim, visto que $f''(x) > 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, vem $f''(3) > 0$. Logo, $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$ e portanto a função f tem um mínimo em $x = 3$. A afirmação **A** é falsa.

A função g é contínua em $[-3,4]$ pois é a diferença entre funções contínuas no seu domínio. Como $f''(x) > 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, a função f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Portanto, $f'(-3) < f'(2)$ e $f'(4) > f'(2)$. Assim:

$g(-3) = f'(-3) - f'(2) < 0$, pois $f'(-3) < f'(2)$ e $g(4) = f'(4) - f'(2) > 0$, pois $f'(4) > f'(2)$

Logo, como g é contínua em $[-3,4]$ e $g(-3)$ e $g(4)$ têm sinais contrários, pelo corolário do teorema de Bolzano, a função g tem pelo menos um zero. A afirmação **B** é verdadeira.

A recta de equação $y = -2x + 2$, é assimptota do gráfico de h, quando $x\to -\infty$, se:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(h(x) - (-2x+2)\right) = 0$$

Assim, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-(-2x+2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{x^3+1}{e^{-x}}-x+2x-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x+\frac{x^3+1}{e^{-x}}-2\right)=$

$$=-2+\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)}_{2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{e^{-x}}\underset{\substack{y=-x\\ y\to+\infty}}{=}-2+2+\lim_{y\to+\infty}\frac{(-y)^3+1}{e^{y}}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3\left(-1-\frac{1}{y^3}\right)}{e^y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3}{e^y}\times\lim_{y\to+\infty}\left(-1-\frac{1}{y^3}\right)=0\times\left(-1-\frac{1}{+\infty}\right)=$$

$$=0\times(-1-0)=0\times(-1)=0$$

Logo, a recta de equação $y=-2x+2$ é assimptota do gráfico de h, quando $x\to-\infty$. A afirmação **C** é verdadeira.

Outra justificação para a afirmação C:

Tem-se que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=2$, logo a recta de equação $y=-x+2$ é assimptota do gráfico de f, quando $x\to-\infty$. Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$. Assim:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+\frac{x^3+1}{e^{-x}}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3+1}{e^{-x}}}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=-1+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{xe^{-x}}-1=$$

$$\underset{\substack{y=-x\\ y\to+\infty}}{=}-2+\lim_{y\to+\infty}\frac{(-y)^3+1}{-ye^{y}}=-2+\lim_{y\to+\infty}\frac{-y^3+1}{-ye^y}=-2+\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3\left(1-\frac{1}{y^3}\right)}{-ye^y}=-2-\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y}\times\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y^3}\right)=$$

$$=-2-0\times\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)=-2-0\times(1-0)=-2-0\times1=-2+0=-2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{x^3+1}{e^{-x}}-x+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x+\frac{x^3+1}{e^{-x}}\right)=$$

$=\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)}_{2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{e^{-x}}=2+0=2$ (o cálculo de $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{e^{-x}}$ é igual à apresentada na primeira resolução)

Logo, a recta de equação $y=-2x+2$ é assimptota do gráfico de h, quando $x\to-\infty$.