EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 4

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere os conjuntos X e Y tais que:

- X é o conjunto de todos os números pares de quatro algarismos distintos que se podem formar com os algarismos $1, 3, 5, 6, 7, 8$ e 9.

- Y é o conjunto de todos os números de três algarismos se podem formar com os algarismos $0, 3, 5, 6, 7$ e 9.

Pretende-se escolher três elementos de X e dois de Y. De quantas maneiras distintas se pode fazê-lo?

A ${}^{686}C_3 \times {}^{216}C_2$ **B** ${}^{240}C_3 \times {}^{180}C_2$ **C** ${}^{686}C_3 \times {}^{180}C_2$ **D** ${}^{240}C_3 \times {}^{216}C_2$

2. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A) + 0{,}75P(B) = 1$ e que $P(A|B) = 0{,}5$.

Qual é o valor de $P\left((A \cup B)\middle|\overline{A}\right)$?

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$

3. Considere num referencial o.n. xOy a circunferência c_1 definida por $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ e a recta r, tangente à circunferência c_1 no ponto T de coordenadas $(1,1)$.

Considere a experiência aleatória que consiste em lançar duas vezes um dado tetraédrico, equilibrado, com as faces numeradas com os números $0, 1, 2$ e 3 e um ponto $P(x, y)$ em que x é o número saído no primeiro lançamento e y é o número saído no segundo lançamento.

Qual é a probabilidade de o ponto P, cujas coordenadas se obtêm após os dois lançamentos, pertencer a r?

A $\frac{1}{16}$ **B** $\frac{3}{16}$ **C** $\frac{5}{16}$ **D** $\frac{7}{16}$

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^+$ tais que $\log_2(3c) = a$ e $\log_4(10c) = b$. A expressão $\log_4(9000c^5)$ é igual a:

A $a + 3b$ **B** $2a + 3b$ **C** $3a + b$ **D** $3a + 2b$

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e - e^{-2x+1}}{3x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Seja (v_n) a sucessão definida por recorrência da seguinte forma: $v_1 = -2 \quad \wedge \quad v_{n+1} = \dfrac{2v_n}{3}$, $n \in \mathbb{N}$. Qual é o valor de $\lim g(v_n)$?

A $-\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** $\dfrac{2e}{3}$

6. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $f(x) = \ln(x^2 + x)$ e a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é perpendicular à recta de equação $y = -\dfrac{x}{2} + 1$ e contém o ponto de coordenadas $(2,3)$.

Qual é o valor de $(f \circ g)'(1)$?

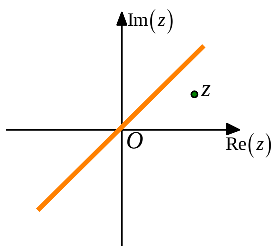
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número $z = 2\operatorname{cis}\theta$, com $\theta \in \left]\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[$. Qual é o valor de θ para o qual a imagem geométrica de $\dfrac{z^2 \times i^{5-16n}}{\overline{z}}$, $n \in \mathbb{N}$, pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares?

A $\dfrac{11\pi}{12}$ **B** $\dfrac{5\pi}{6}$ **C** $\dfrac{7\pi}{12}$ **D** $\dfrac{\pi}{4}$

8. Na figura estão representados, no plano complexo, a imagem geométrica do número complexo z, tal que $|z| = 1$ e recta definida pela condição $\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) = 0$.

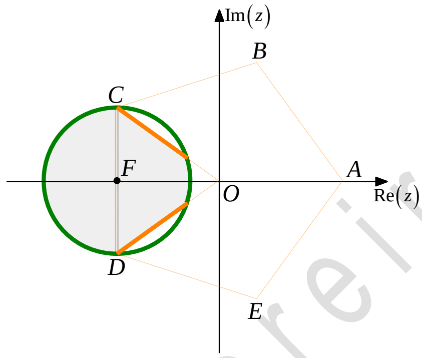
A que quadrante pertence a imagem geométrica do número complexo $iz^2 - 2i$?



A 1.º quadrante **B** 2.º quadrante

C 3.º quadrante **D** 4.º quadrante

1. Na figura estão representados, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$, inscrito numa circunferência centrada na origem, e uma circunferência centrada no ponto F.



Sabe-se que:

- o segmento de recta $[CD]$ é paralelo ao eixo imaginário.
- os pontos C e D pertencem à circunferência.
- o ponto A pertence ao eixo real e $\overline{OA} = 2$

1.1. Seja C a imagem geométrica do número complexo z_3. Escreva na forma algébrica o número complexo:

$$\frac{(z_3)^5 \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{12}}{-\sqrt{6}+\sqrt{2}i} - \frac{2-6i}{1-i}$$

1.2. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a região sombreada da figura, incluindo a fronteira.

2. No Departamento Financeiro de uma empresa trabalham sete homens e três mulheres.

2.1. Escolhem-se ao acaso quatro funcionários do Departamento Financeiro da empresa. Qual é a probabilidade de serem todos do sexo masculino, sabendo que pelo menos dois são do sexo masculino?

Uma resposta a este problema é $\dfrac{{}^7C_4}{{}^7C_2 \times {}^3C_2 + {}^7C_3 \times {}^3C_1 + {}^7C_4}$. Numa pequena composição, explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis.
- uma explicação do número de casos favoráveis.

2.2. Um estudo feito pela empresa revelou que a altura das suas funcionárias segue uma distribuição normal de valor médio 162 cm e que a percentagem de funcionárias com altura superior a 168 cm é de 20%.

Considere a variável aleatória X: «número de funcionárias do Departamento Financeiro com altura entre 156 cm e 162 cm».

Defina por meio de uma tabela a distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente as probabilidades na forma de dízima.

2.3. A empresa contratou mais alguns funcionários para o Departamento Financeiro, todos do sexo feminino.

Com a nova composição do Departamento Financeiro a probabilidade de escolher ao acaso dois funcionários e estes serem do sexo feminino é $\frac{4}{15}$. Quantas funcionárias foram contratadas?

3. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3x-\ln\left(x^2+2\right)$.

3.1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $3x-\ln(3-x)-f(x)\geq\ln(2x+2)$.

3.2. Estude a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indica as suas equações.

3.3. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

4. Sejam f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ tais que para cada $n\in\mathbb{N}$ se tem $f(n)=(-1)^n\times\left(n^2+n\right)$ e $g(n)=(-1)^{n+1}\times n^3$.

Mostre que os gráficos de *f* e g se intersectam pelo menos uma vez em cada intervalo do tipo $[k,k+1]$, com $k\in\mathbb{N}$.

5. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\operatorname{sen}(2x)-2\operatorname{sen}x$.

5.1. Determine, por definição, $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5.2. Seja P um ponto de abcissa $x\in[0,\pi]$, que se desloca sobre o gráfico de h. Para cada posição do ponto P, considere o triângulo $[OPQ]$ tais que O é a origem do referencial e Q pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa que P.

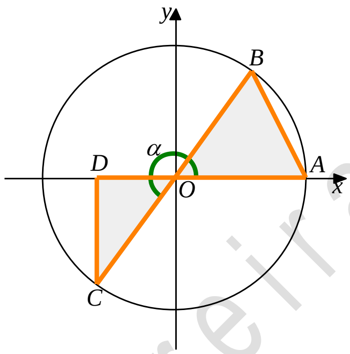
Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa do ponto P de modo que a área do triângulo seja máxima.

Na sua resposta deve:

- escrever a área do triângulo $[OPQ]$ em função da abcissa de P.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar a abcissa do ponto P, arredondada às décimas, que é a solução do problema.

5.3. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, o polígono $[ABOCD]$ e a circunferência de equação $x^2+y^2=4$.

Sabe-se que:



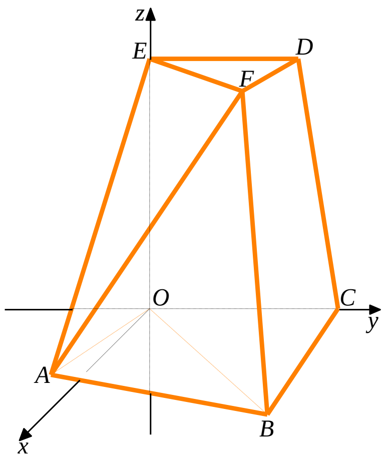
- O ponto A pertence ao eixo Ox e à circunferência.
- O ponto C desloca-se no terceiro quadrante (eixos não incluídos) sobre a circunferência. O ponto B acompanha o seu movimento de modo que $[BC]$ é sempre um diâmetro da circunferência.
- O ponto D pertence ao eixo Ox e acompanha o movimento do ponto C de modo que $[CD]$ é sempre paralelo a Oy.

Seja α a amplitude do ângulo AOC, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Determine o valor de α de modo que a área do polígono $[ABOCD]$ seja máxima e indique o valor da área máxima.

Sugestão: Comece por mostrar que a área do polígono $[ABOCD]$ é dada por $h(\alpha)$.

6. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o sólido $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:



- uma equação do plano ABF é $6x+2y+z=34$
- uma equação do plano BCF é $8x+32y+5z=192$
- uma equação vectorial da recta AF é:

$$(x,y,z)=(6-3k,5k-1,8k),\quad k\in\mathbb{R}$$

- o ponto A pertence ao plano xOy e o ponto C ao eixo Oy

6.1. Escreva as equações cartesianas da recta BF.

6.2. Escreva uma equação do plano ACF.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. B **2.** C **3.** B **4.** A **5.** D **6.** C **7.** A **8.** C

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. $-12-6i$

1.2. $\left|z-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right| \leq 2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) \wedge \frac{4\pi}{5} \leq \arg(z) \leq \frac{6\pi}{5}$

2.2.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,343	0,441	0,189	0,027

2.3. Cinco funcionárias.

3.1. $x \in \left]-1,-\frac{2}{3}\right] \cup [2,3[$

3.2. A.V: $x=0$. A.H.: $y=3$, quando $x \to \pm\infty$

3.3. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]$ e em $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ e tem pontos de inflexão em $x=-\sqrt{2}$ e em $x=\sqrt{2}$.

5.1. $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = -2$

5.2. A área do triângulo $[OPQ]$ é máxima se $x=a$, com $a \approx 2{,}3$.

5.3. A área do polígono $[ABOCD]$ é máxima se $x=\frac{4\pi}{3}$. O valor da área máxima é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6.1. Por exemplo: $x = y-1 = \frac{32-z}{8}$

6.2. $56x+48y-9z=288$