EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 4 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Comecemos por determinar o número de elementos de cada conjunto.

Conjunto X: os elementos deste conjunto são todos os números pares de quatro algarismos distintos que se podem formar com os algarismos $1, 3, 5, 6, 7, 8$ e 9:

$$\underbrace{\underline{\;6\;}\quad\underline{\;5\;}\quad\underline{\;4\;}}\quad\overset{\text{Par}}{\underline{\;2\;}}$$

Dos restantes seis algarismos, escolhem-me, ordenadamente, três. O número de maneiras de o fazer é ${}^{6}A_3 = 6\times5\times4$.

Para esta posição há duas hipóteses, o 6 ou o 8.

Logo, o número de elementos do conjunto X é $2\times{}^{6}A_3 = 2\times6\times5\times4 = 240$.

Conjunto Y: os elementos deste conjunto são todos os números de três algarismos se podem formar com os algarismos $0, 3, 5, 6, 7$ e 9.

Nesta posição não pode ficar o 0, pois assim o número teria apenas dois algarismos.

$$\underline{\;5\;}\quad\underline{\;6\;}\quad\underline{\;6\;}$$

Logo, o número de elementos do conjunto Y é $5\times6\times6 = 180$.

Portanto, o número de maneiras de escolher três elementos de X e dois de Y é dado por ${}^{240}C_3 \times {}^{180}C_2$.

Resposta: B

2. Tem-se que:

- $P(A)+0{,}75P(B)=1 \Leftrightarrow 0{,}75P(B)=1-P(A) \Leftrightarrow 0{,}75P(B)=P(\overline{A})$

- $P(A|B)=0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0{,}5 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}5P(B)$

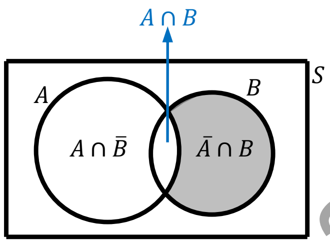
Assim:

$$P\left((A\cup B)\middle|\bar{A}\right)=\frac{P\left((A\cup B)\cap \bar{A}\right)}{P\left(\bar{A}\right)}=\frac{P\left(\overbrace{\left(A\cap \bar{A}\right)}^{\varnothing}\cup\left(B\cap \bar{A}\right)\right)}{0,75P(B)}=$$

$$=\frac{P\left(\varnothing\cup\left(B\cap \bar{A}\right)\right)}{0,75P(B)}=\frac{P\left(B\cap \bar{A}\right)}{0,75P(B)}\underset{\text{i)}}{=}\frac{P(B)-P(A\cap B)}{0,75P(B)}=$$

$$=\frac{P(B)-0,5P(B)}{0,75P(B)}=\frac{0,5\,\cancel{P(B)}}{0,75\,\cancel{P(B)}}=\frac{0,5}{0,75}=\frac{2}{3}$$

i)



$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$

$P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

Resposta: C

3. Vamos começar por determinar uma equação da recta r usando o produto escalar. Sendo $Q(x,y)$ um ponto do plano, Q pertence à recta r se $\overrightarrow{TQ}\cdot\overrightarrow{TC}=0$, onde C é o centro da circunferência c_1. Portanto, $C(1,1)$. Assim:

$$\overrightarrow{TQ}\cdot\overrightarrow{TC}=0\Leftrightarrow(x-1,y-1)\cdot(1,1)=0\Leftrightarrow x-1+y-1=0\Leftrightarrow x+y=2$$

O número de casos possíveis é $4^2=16$. O ponto P pertence à recta r se a soma das suas coordenadas for 2. Assim, o número de casos favoráveis é 3: sair 1 no primeiro lançamento e 1 no segundo, formando o ponto de P de coordenadas $(1,1)$; sair 2 no primeiro lançamento e 0 no segundo, formando o ponto de P de coordenadas $(2,0)$; sair 0 no primeiro lançamento e 2 no segundo, formando o ponto de P de coordenadas $(0,2)$.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{3}{16}$.

Resposta: B

4. Tem-se que:

$$\log_4\left(9000c^5\right)=\log_4\left(9\times1000\times c^2\times c^3\right)=\log_4\left(9c^2\times1000c^3\right)=\log_4\left(9c^2\right)+\log_4\left(1000c^3\right)=$$

$$=\log_4(3c)^2+\log_4(10c)^3\underset{c>0}{=}2\log_4(3c)+3\log_4(10c)=2\times\frac{\log_2(3c)}{\log_2 4}+3b=$$

$$=2\times\frac{a}{\log_2\left(2^2\right)}+3b=\cancel{2}\times\frac{a}{\cancel{2}}+3b=a+3b$$

Resposta: A

5. Tem-se que $v_{n+1}=\frac{2v_n}{3}\Leftrightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2}{3}$. Portanto, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$. Assim:

$$v_n=v_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0^-\quad(v_n<0\,,\forall n\in\mathbb{N})$$

Logo, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim g(v_n)=\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e-e^{-2x+1}}{3x}=\frac{1}{3}\times\lim_{x\to0^-}\frac{e-e^{-2x}\times e}{x}=-\frac{e}{3}\times\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times(-2)=-\frac{e}{3}\times1\times(-2)=\frac{2e}{3}$$

Se $x\to0^-$ então $-2x\to0^+$ (limite notável)

Resposta: D

6. Tem-se que $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$. Portanto, $(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\times g'(1)$.

- Seja t a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Como t é perpendicular a r, vem:

$$m_t=-\frac{1}{m_r}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$$

Logo, $g'(1)=m_t=2$. O ponto de coordenadas $(2,3)$, pertence à recta t, assim, a sua equação é dada por:

$$t:y-3=2(x-2)\Leftrightarrow y=2x-4+3\Leftrightarrow y=2x-1$$

O ponto de coordenadas $(1,g(1))$ é o ponto de tangência, portanto $(1,g(1))\in t$. Logo, $g(1)=2\times1-1=1$.

- Tem-se $f'(x)=\frac{(x^2+x)'}{x^2+x}=\frac{2x+1}{x^2+x}$.

Assim, $(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\times g'(1)=f'(1)\times2=\frac{2\times1+1}{1^2+1}\times2=\frac{3}{2}\times2=3$

Resposta: C

7.

- $i^{5-16n}=\frac{i^5}{i^{16n}}=\frac{i^{4\times1+1}}{i^{4\times4n+0}}=\frac{i^1}{i^0}=\frac{i}{1}=i=\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$

- $\frac{z^2\times i^{5-16n}}{\bar{z}}=\frac{(2\operatorname{cis}\theta)^2\times\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{2\operatorname{cis}(-\theta)}=\frac{4\operatorname{cis}(2\theta)\times\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{2\operatorname{cis}(-\theta)}=\frac{4\operatorname{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{2\operatorname{cis}(-\theta)}=2\operatorname{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=2\operatorname{cis}\left(3\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

A imagem geométrica do número complexo $\dfrac{z^2 \times i^{5-16n}}{\overline{z}}$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares se o seu argumento for da forma $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$3\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $\theta = \dfrac{11\pi}{12}$ $(k = 3)$.

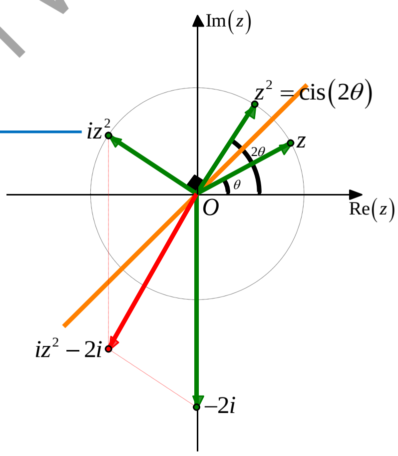
Resposta: A

8. Tem-se que $|z| = 1$, portanto $z = \operatorname{cis}\theta$, com $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, pois a condição $\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)$, define a bissectriz dos quadrantes ímpares. Assim:

$$iz^2 - 2i = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} \times (\operatorname{cis}\theta)^2 - 2i = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} \times \operatorname{cis}(2\theta) - 2i = \operatorname{cis}\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + (-2i)$$

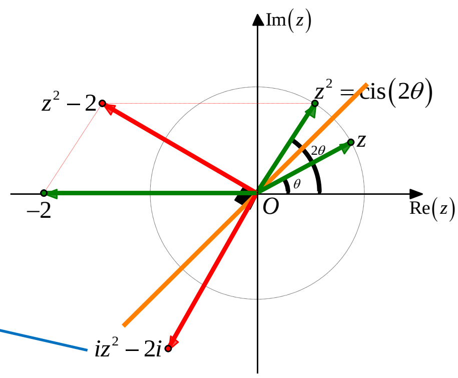
Utilizando a regra do paralelogramo:

A imagem geométrica de iz^2 obtém-se rodando a imagem geométrica de iz^2 , $+90^\circ$ em torno da origem.



Logo, a imagem geométrica de $iz^2 - 2i$ pertence ao terceiro quadrante.

Outra resolução: Tem-se que $iz^2 - 2i = i(z^2 - 2) = i(\operatorname{cis}(2\theta) - 2) = i(\operatorname{cis}(2\theta) + (-2))$. Utilizando a regra do paralelogramo:



A imagem geométrica de $iz^2 - 2i$ obtém-se rodando a imagem geométrica de $i(z^2 - 2)$, $+90^\circ$ em torno da origem.

Logo, a imagem geométrica de $iz^2 - 2i$ pertence ao terceiro quadrante.

Resposta: C

1.

1.1. Como $[ABCDE]$ é um pentágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem e $\overline{OA}=2$, então $\overline{OC}=2$ e portanto $|z_3|=2$. Os vértices do pentágono dividem a circunferência em que está inscrito em cinco arcos de amplitude $\frac{2\pi}{5}$, ou seja, $A\hat{O}B=B\hat{O}C=\ldots=E\hat{O}A=\frac{2\pi}{5}$. Logo, um argumento de z_3 é $2\times\frac{2\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}$. Assim:

$$\frac{(z_3)^5\times\text{cis}\frac{\pi}{12}}{-\sqrt{6}+\sqrt{2}i}-\frac{2-6i}{1-i}\underset{i)}{=}\frac{\left(2\,\text{cis}\frac{4\pi}{5}\right)^5\times\text{cis}\frac{\pi}{12}}{2\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{5\pi}{6}}-\frac{2-6i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+1}=\frac{2^5\,\text{cis}\left(\cancel{5}\times\frac{4\pi}{\cancel{5}}\right)\times\text{cis}\frac{\pi}{12}}{2\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{5\pi}{6}}-\frac{2+2i-6i-6i^2}{1^2-i^2}=$$

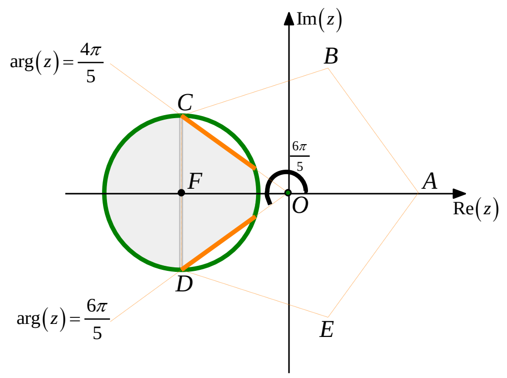
$$=\frac{32\overbrace{\text{cis}(4\pi)}^{=\text{cis}\,0}\times\text{cis}\frac{\pi}{12}}{2\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{5\pi}{6}}-\frac{8-4i}{2}=\frac{32\,\text{cis}\left(0+\frac{\pi}{12}\right)}{2\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{5\pi}{6}}-4+2i=\frac{32}{2\sqrt{2}}\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{6}\right)-4+2i=$$

$$=\frac{16}{\sqrt{2}}\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-4+2i=\frac{16}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)-4+2i=$$

$$=\frac{16}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4+2i=-\frac{16\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}-\frac{16\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}i-4+2i=-8-8i-4+2i=-12-6i$$

i) Para escrever $-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ na forma trigonométrica, vem: $\left|-\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$, tem-se $\text{tg}\,\theta=\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta\in 2.^{\text{o}}$ quadrante, pelo que $\theta=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$. Assim $-\sqrt{6}+\sqrt{2}i=2\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{5\pi}{6}$.

1.2. Tem em atenção a figura seguinte:



▪ As coordenadas do ponto C são dadas por $\left(2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), 2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$ e, consequentemente, as do ponto F são dadas por $\left(2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), 0\right)$. Assim, F é a imagem geométrica do número complexo $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 0i = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ e a medida do comprimento do raio da circunferência de centro em F que contém o ponto C é igual $\overline{CF} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Logo, uma condição que define essa circunferência é $\left|z + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

▪ As semi-recta OC e OD são definidas, respectivamente, pelas condições $\arg(z) = \frac{4\pi}{5}$ e $\arg(z) = \frac{4\pi}{5}$.

Portanto, uma condição que define a região sombreada da figura, incluindo as fronteiras, é:

$$\left|z - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right| \leq 2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) \quad \wedge \quad \frac{4\pi}{5} \leq \arg(z) \leq \frac{6\pi}{5}$$

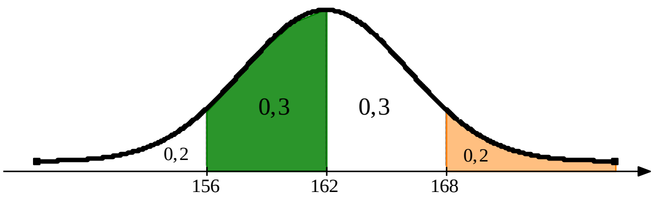
2.

2.1. Pela regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que os acontecimentos elementares sejam equiprováveis.

Como se sabe que entre os quatro funcionários escolhidos pelo menos dois são do sexo masculino, o número de casos possíveis é ${}^7C_2 \times {}^3C_2 + {}^7C_3 \times {}^3C_1 + {}^7C_4 = {}^7C_2 \times {}^3C_2 + {}^7C_3 \times 3 + {}^7C_4$: dos sete homens escolhem-se dois e das três mulheres escolhem-se duas ou dos sete homens escolhem-se três e das três mulheres escolhe-se uma ou dos sete homens escolhem-se quatro. Pretende-se calcular a probabilidade de os quatro funcionários escolhidos serem homens. Portanto, o número de casos favoráveis é ${}^7C_4$: dos sete homens escolhem-se quatro.

Logo, pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{{}^7C_4}{{}^7C_2 \times {}^3C_2 + {}^7C_3 \times {}^3C_1 + {}^7C_4}$.

2.2. A variável aleatória Y: «altura das funcionárias da empresa» tem distribuição normal de valor médio 162 cm e $P(Y > 168) = 0,2$. Tem em atenção a seguinte figura:



Tem-se que $P(156 < Y < 162) = P(162 < Y < 168) = 0,5 - 0,2 = 0,3$.

A variável aleatória X: «número de funcionárias do Departamento Financeiro com altura entre 156 cm e 162 cm» tem distribuição binomial de parâmetros $n=3$ e $p=(162<Y<168)=0,3$, ou seja, $X \sim \text{Bin}(3;0,3)$. Assim, $X=\{0,1,2,3\}$ e portanto tem-se:

- $P(X=0)={}^{3}C_{0}\times(0,3)^{0}\times(1-0,3)^{3}=0,343$
- $P(X=1)={}^{3}C_{1}\times(0,3)^{1}\times(1-0,3)^{2}=0,441$
- $P(X=2)={}^{3}C_{2}\times(0,3)^{2}\times(1-0,3)^{1}=0,189$
- $P(X=3)={}^{3}C_{3}\times(0,3)^{3}\times(1-0,3)^{0}=0,027$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,343	0,441	0,189	0,027

2.3. Seja n o número de funcionárias que foram contratadas. Assim, o Departamento Financeiro da empresa fica constituído por $n+10$ funcionários, sete homens e $n+3$ mulheres.

O número de maneiras distintas de escolher dois funcionários entre os $n+10$ é:

$$^{n+10}C_2=\frac{(n+10)!}{2!\times(n+10-2)!}=\frac{(n+10)(n+9)\cancel{(n+8)!}}{2\cancel{(n+8)!}}=\frac{(n+10)(n+9)}{2}$$

O número de maneiras distintas de escolher dois funcionários do sexo feminino entre os $n+3$ é:

$$^{n+3}C_2=\frac{(n+3)!}{2!\times(n+3-2)!}=\frac{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}}{2\cancel{(n+1)!}}=\frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

Logo, como a probabilidade de escolher ao acaso dois funcionários do Departamento Financeiro a e estes serem do sexo feminino é $\frac{4}{15}$, vem:

$$\frac{^{n+3}C_2}{^{n+10}C_2}=\frac{4}{15}\Leftrightarrow\frac{\frac{(n+3)(n+2)}{\cancel{2}}}{\frac{(n+10)(n+9)}{\cancel{2}}}=\frac{4}{15}\Leftrightarrow\frac{(n^2+2n+3n+6)}{(n^2+9n+10n+90)}=\frac{4}{15}\Leftrightarrow 15(n^2+5n+6)=4(n^2+19n+90)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15n^2+75n+90=4n^2+76n+360 \Leftrightarrow 11n^2-n-270=0 \Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 11\times(-270)}}{2\times 11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{11881}}{22} \Leftrightarrow n=\frac{1-109}{22} \quad \vee \quad n=\frac{1+109}{22} \Leftrightarrow n=-\frac{54}{11} \quad \vee \quad n=5$$

Portanto, foram contratadas cinco funcionárias para o Departamento Financeiro.

3.

3.1. $3x-\ln(3-x)-f(x)\geq\ln(2x+2)$

- $D=\left\{x\in\mathbb{R}:3-x>0 \quad \wedge \quad \underbrace{x^2+2>0}_{\text{Condição Universal}} \quad \wedge \quad 2x+2>0\right\}=\{x\in\mathbb{R}:x<3 \quad \wedge \quad x>-1\}=]-1,3[$

- Neste domínio tem-se

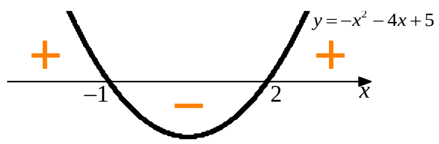
$$3x-\ln(3-x)-f(x)\geq\ln(2x+2) \Leftrightarrow 3x-\ln(3-x)-\left(3x-\ln\left(x^2+2\right)\right)\geq\ln(2x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3x}-\ln(3-x)-\cancel{3x}+\ln\left(x^2+2\right)\geq\ln(2x+2) \Leftrightarrow \ln\left(x^2+2\right)\geq\ln(2x+2)+\ln(3-x) \Leftrightarrow$$

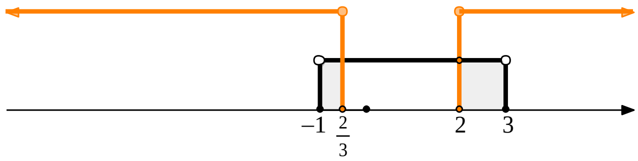
$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+2\right)\geq\ln\left((2x+2)(3-x)\right) \Leftrightarrow x^2+2\geq 6x-2x^2+6-2x \Leftrightarrow 3x^2-4x-4\geq 0$$

Cálculo Auxiliar: Tem-se $3x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 3\times(-4)}}{2\times 3} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3} \quad \vee \quad x=2$

Como a função $y=3x^2-4x-4$ é quadrática e o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima, então as soluções da inequação $3x^2-4x-4\geq 0$ são os valores de x tais que $x\in\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty[$.



Tendo em conta o domínio D calculado, os valores de x que satisfazem a inequação dada são os valores de x que satisfazem a condição $-1<x<3 \quad \wedge \quad \left(x\leq-\dfrac{2}{3} \quad \vee \quad x\geq 2\right)$:



Conjunto Solução: $\left]-1,\frac{2}{3}\right]\cup[2,3[$

3.2.

▪ Assimptotas verticais

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x-\ln\left(x^2+2\right)}{x}=\frac{3\times0-\ln\left(0^2+2\right)}{0^-}=\frac{-\ln2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{3x-\ln\left(x^2+2\right)}{x}=\frac{3\times0-\ln\left(0^2+2\right)}{0^+}=\frac{-\ln2}{0^+}=-\infty$$

Logo, a recta de equação $x=0$ é assimptota vertical do gráfico de g.

Como a função g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais.

▪ Assimptotas não verticais

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\ln\left(x^2+2\right)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x^2+2}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x^2}\underset{i)}{=}\frac{3}{-\infty}-0\times\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=0-0\times1=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\ln\left(x^2+2\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x}=$$

$$\underset{ii)}{=}3-\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left((-y)^2+2\right)}{-y}=3+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(y^2+2\right)}{y}=3+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(y^2\left(1+\frac{2}{y^2}\right)\right)}{y}=3+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(y^2\right)+\ln\left(1+\frac{2}{y^2}\right)}{y}=$$

$$=3+\lim_{y\to+\infty}\frac{2\ln y}{y}+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{y^2}\right)}{y}=3+2\times\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{+\infty}\right)}{+\infty}=3+2\times0+\frac{\ln1}{+\infty}=3+\frac{0}{+\infty}=3+0=3$$

i) Se $x\to-\infty$ então $x^2+2\to+\infty$. Portanto $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x^2+2}=0$ (limite notável).

ii) Mudança de variável: Se $x\to-\infty$ então $-x\to+\infty$ Seja $y=-x\Leftrightarrow x=-y$, $y\to+\infty$.

Logo, a recta de equação $y=3$ é assimptota horizontal do gráfico de g, quando $x\to-\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\ln\left(x^2+2\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x^2+2}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x^2}\underset{i)}{=}\frac{3}{-\infty}-0\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=0-0\times1=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\ln\left(x^2+2\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x}=$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x}=3+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x}=3+2\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{+\infty}\right)}{+\infty}=$$

$$=3+2\times0+\frac{\ln 1}{+\infty}=3+\frac{0}{+\infty}=3+0=3$$

i) Se $x\to+\infty$ então $x^2+2\to+\infty$. Portanto $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x^2+2}=0$ (limite notável).

Logo, a recta de equação $y=3$ é assimptota horizontal do gráfico de g, quando $x\to+\infty$.

3.3.

- $f'(x)=3-\dfrac{2x}{x^2+2}$

- $f''(x)=0-\dfrac{2\times\left(x^2+2\right)-2x\times2x}{\left(x^2+2\right)^2}=-\dfrac{2x^2+4-4x^2}{\left(x^2+2\right)^2}=-\dfrac{-2x^2+4}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{2x^2-4}{\left(x^2+2\right)^2}$

- $f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-4}{\left(x^2+2\right)^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-4=0\quad\wedge\quad\underbrace{\left(x^2+2\right)^2\neq0}_{\text{Condição Universal}}\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\quad\vee\quad x=\sqrt{2}$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f'', vem:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2-4$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x^2+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico da função f tem a concavidade votada para baixo em $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, tem a concavidade votada para cima em $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]$ e em $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ e tem pontos de inflexão em $x=-\sqrt{2}$ e em $x=\sqrt{2}$.

4. Pretende-se mostrar que os gráficos de f e g se intersectam pelo menos uma vez em cada intervalo do tipo $[k,k+1]$, com $k\in\mathbb{N}$, ou seja, pretende-se mostrar que existe pelo menos um $c\in[k,k+1]$, com $k\in\mathbb{N}$, tal que $f(c)=g(c)\Leftrightarrow f(c)-g(c)=0$.

▪ Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=f(x)-g(x)$. h é contínua em $\mathbb{R}$, pois é a diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, h é contínua em cada intervalo do tipo $[k,k+1]\subset\mathbb{R}$, com $k\in\mathbb{N}$.

▪ k par:

$$h(k)=f(k)-g(k)=\underbrace{(-1)^k}_{1}\times\left(k^2+k\right)-\underbrace{(-1)^{k+1}}_{-1}\times k^3=k^2+k+k^3>0$$

$$h(k+1)=f(k+1)-g(k+1)=\underbrace{(-1)^{k+1}}_{-1}\times\left((k+1)^2+k+1\right)-\underbrace{(-1)^{k+2}}_{1}\times(k+1)^3=-\left((k+1)^2+k+1\right)-(k+1)^3=$$

$$=-(k+1)^2-(k+1)-(k+1)^3=-(k+1)\left(k+1+1+(k+1)^2\right)=-(k+1)\left(k^2+2k+1+k+2\right)=$$

$$=-\underbrace{(k+1)}_{>0}\underbrace{\left(k^2+3k+3\right)}_{>0}<0$$

▪ k ímpar:

$$h(k)=f(k)-g(k)=\underbrace{(-1)^k}_{-1}\times\left(k^2+k\right)-\underbrace{(-1)^{k+1}}_{1}\times k^3=-k^2-k-k^3=-\underbrace{\left(k^3+k^2+k\right)}_{>0}<0$$

$$h(k+1)=f(k+1)-g(k+1)=\underbrace{(-1)^{k+1}}_{1}\times\left((k+1)^2+k+1\right)-\underbrace{(-1)^{k+2}}_{-1}\times(k+1)^3=(k+1)^2+k+1+(k+1)^3=$$

$$=(k+1)\left(k+1+1+(k+1)^2\right)=\underbrace{(k+1)}_{>0}\underbrace{\left(k^2+3k+3\right)}_{>0}>0$$

Nota: $(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{se} \quad n \text{ ímpar}\\ 1 & \text{se} \quad n \text{ par}\end{cases}$. Se k é par, então $k+1$ é ímpar e $k+1$ é par. Se k é ímpar, então $k+1$ é par e $k+1$ é ímpar.

Assim, como h é contínua em cada intervalo do tipo $[k,k+1]$, com $k\in\mathbb{N}$ e como $h(k)$ e $h(k+1)$ têm sinais contrários, $\forall k\in\mathbb{N}\ \left(h(k)\times h(k+1)<0\right)$, pelo corolário do teorema de Bolzano:

$$\exists c\in\left]k,k+1\right[:k(c)=0\Leftrightarrow f(c)-g(c)=0\Leftrightarrow f(c)=g(c)$$

Ou seja, os gráficos de f e g se intersectam pelo menos uma vez em cada intervalo do tipo $[k,k+1]$, com $k\in\mathbb{N}$.

5.

5.1. Tem-se que $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)-2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\pi-2\times 1=0-2=-2$. Assim:

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(2x)-2\operatorname{sen}x+2}{x-\frac{\pi}{2}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{i)}{=}}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)-2\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+2}{y}=$$

$$\underset{ii)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2y+\pi)-2\cos y+2}{y}\underset{ii)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(2y)-2\cos y+2}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(2y)}{y}+\lim_{y\to 0}\frac{-2\cos y+2}{y}=$$

$$=-2\times\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2y)}{2y}+2\times\lim_{y\to 0}\left(\frac{1-\cos y}{y}\times\frac{1+\cos y}{1+\cos y}\right)=-2\times 1+2\times\lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)}=$$

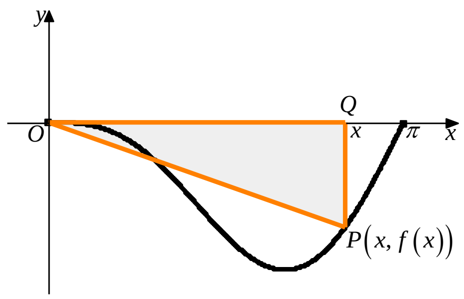
$$=-2+2\times\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos^2 y}{y(1+\cos y)}=-2+2\times\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y(1+\cos y)}=-2+2\times\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y}{y}\times\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y}{1+\cos y}=$$

$$=-2+2\times 1\times\frac{\operatorname{sen}(0)}{1+\cos(0)}=-2+2\times\frac{0}{1+1}=-2+2\times 0=-2$$

i) Mudança de variável: Se $x\to\frac{\pi}{2}$ então $x-\frac{\pi}{2}\to 0$ Seja $y=x-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=y+\frac{\pi}{2}$, $y\to 0$.

ii) Recorrendo ao Círculo Trigonométrico, verifica-se que $\operatorname{sen}(2y+\pi)=-\operatorname{sen}(2y)$ e $\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\cos y$.

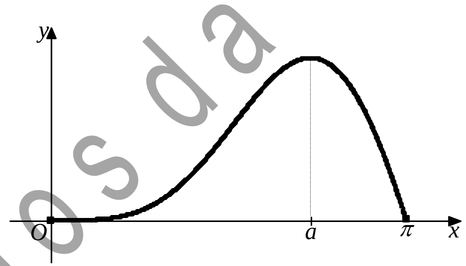
5.2. Comecemos por fazer uma representação do triângulo $[OPQ]$:



A área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\dfrac{\overline{OQ} \times \overline{QP}}{2}$. Tem-se que $\overline{OQ} = x$ e $\overline{QP} = |f(x)| = -f(x)$, pois $f(x) < 0$, $\forall x \in [0, \pi]$. Assim:

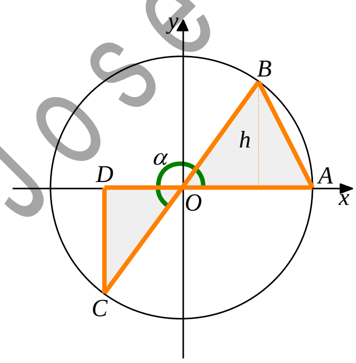
$$A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{QP}}{2} = \frac{x(-\operatorname{sen}(2x) + 2\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{2x\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen}(2x)}{2}$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = \dfrac{2x\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen}(2x)}{2}$ na janela de visualização $[0, \pi] \times [0, 4]$.



A área do triângulo $[OPQ]$ é máxima se $x = a$, com $a \approx 2,3$.

5.3. Comecemos por ter em atenção a figura:



A área do polígono $[ABOCD]$ é dada por:

$$A_{[ABOCD]} = A_{[ABO]} + A_{[ODC]} = \frac{\overline{OA} \times h}{2} + \frac{\overline{OD} \times \overline{CD}}{2}$$

Uma equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 4$, logo o seu a medida do seu raio é 2. Como os ângulos AOB e COD são verticalmente oposto, então $h = \overline{CD}$. Assim:

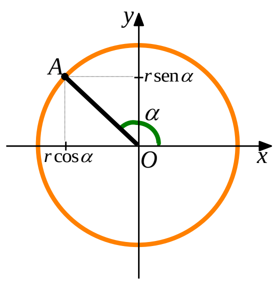
$$A_{[ABOCD]} = \frac{\cancel{2} \times \overline{CD}}{\cancel{2}} + \frac{\overline{OD} \times \overline{CD}}{2} = \overline{CD} + \frac{\overline{OD} \times \overline{CD}}{2}$$

Como as coordenadas do ponto C são com tipo $C(2\cos\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha)$, onde $2\cos\alpha < 0$ e $2\operatorname{sen}\alpha < 0$, pois $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Portanto, $\overline{CD} = -2\operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{OD} = -2\cos\alpha$. Assim:

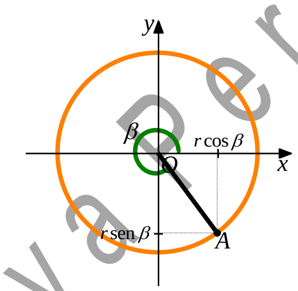
$$A_{[ABOCD]} = \overline{CD} + \frac{\overline{OD} \times \overline{CD}}{2} = -2\operatorname{sen}\alpha + \frac{-\cancel{2}\cos\alpha \times (-2\operatorname{sen}\alpha)}{\cancel{2}} = -2\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$

$$= \operatorname{sen}(2\alpha) - 2\operatorname{sen}\alpha = h(\alpha)$$

Nota: Seja A um ponto pertencente a uma circunferência centrada na origem e raio r



As coordenadas do ponto A são dada por $A(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)$



As coordenadas do ponto A são dada por $A(r\cos\beta, r\operatorname{sen}\beta)$

Para determinar o valor de α para o qual a área do polígono $[ABOCD]$ é máxima, recorre-se ao estudo do sinal de h':

- $h'(\alpha) = 2\cos(2\alpha) - 2\cos\alpha$
- $h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) - 2\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) = 2\cos\alpha \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \alpha + 2k\pi \quad \vee 2\alpha = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \quad \vee 3\alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \quad \vee \alpha = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, vem $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ $(k = 2)$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função h', vem:

α	π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$
$h'(\alpha)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
$h(\alpha)$	n.d.	↗	máx.	↘	n.d.

A área do polígono $[ABOCD]$ é máxima se $\alpha=\frac{4\pi}{3}$. O valor dessa área máxima é dado por:

$$h\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\left(2\times\frac{4\pi}{3}\right)-2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right)-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}-2\pi\right)+\sqrt{3}=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

6.

6.1. Os planos ABF e BCF é a recta BF. Assim:

$$\begin{cases}6x+2y+z=34 & (E_1)\\ 8x+32y+5z=192 & (E_2)\end{cases}\underset{-5E_1+E_2}{\Leftrightarrow}\begin{cases}6x+2y+z=34\\ -22x+22y=22\end{cases}\underset{\frac{E_2}{22}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\text{———}\\ -x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+2(x+1)+z=34\\ y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x+2x+2+z=34\\ y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x+z=32\\ y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{32-z}{8}\\ y-1=x\end{cases}$$

$$-5E_1+E_2:\begin{array}{r}-30x-10y-\cancel{5z}=-170\\ 8x+32y+\cancel{5z}=192\\ \hline -22x+22y+0=22\end{array}$$

Logo, as equações cartesianas da recta BF podem ser $x=y-1=\frac{32-z}{8}$.

6.2.

▪ O ponto A pertence ao plano xOy. Portanto, as suas coordenadas são do tipo $A(x,y,0)$. Como A pertence à recta AF, vem:

$$(x,y,0)=(6-3k,5k-1,8k),\quad k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6-3k\\ y=5k-1\\ 0=8k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=-1\\ k=0\end{cases}.$$

Logo, $A(6,-1,0)$.

▪ O ponto C pertence ao eixo Oy. Portanto, as suas coordenadas são do tipo $C(0,y,0)$. Como C pertence ao plano BCF, vem:

$$8\times0+32y+5\times0=192\Leftrightarrow y=\frac{192}{32}\Leftrightarrow y=6$$

Logo, $C(0,6,0)$.

▪ F é o ponto de intersecção entre a recta AF e o plano BCF. (não podemos usar o plano ABF pois a recta AF está contida nesse plano). Assim:

$$\begin{cases}(x,y,z)=(6-3k,5k-1,8k), \quad k\in\mathbb{R}\\ 8x+32y+5z=192\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6-3k\\ y=5k-1\\ z=8k\\ 8(6-3k)+32(5k-1)+5\times 8k=192\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{———}\\ \text{———}\\ \text{———}\\ 176k=176\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=4\\ z=8\\ k=1\end{cases}$$

Logo, $F(3,4,8)$.

▪ Seja $\vec{n}=(a,b,c)$ um vector normal ao plano ACF. Este vector é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AF}$, dois vectores não colineares do plano ACF. Assim tem-se:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-6,7,0)\cdot(a,b,c)=0\\ (-3,5,8)\cdot(a,b,c)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6a+7b=0\\ -3a+5b+8c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{7b}{6}\\ -3\times\dfrac{7b}{6}+5b+8c=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{———}\\ -\dfrac{7b}{2}+5b+8c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{———}\\ -7b+10b+16c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{7b}{6}\\ c=-\dfrac{3b}{16}\end{cases}$$

Concluímos então que as coordenadas do vetor $\vec{n}$ são da forma $\vec{n}=\left(\dfrac{7b}{6},b,-\dfrac{3b}{16}\right)$, com $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Fazendo, por exemplo, $b=48$ $(\text{m.m.c.}(6,16)=48)$, um vector normal de ACF é $\vec{n}=(56,48,-9)$. Logo, como $C\in ACF$, uma equação do plano ACF é:

$$56(x-0)+48(y-6)-9(z-0)=0 \Leftrightarrow 56x+48y-288-9z=0 \Leftrightarrow 56x+48y-9z=288$$

De uma outra forma:

O plano ACF pode ser definido por uma equação do tipo $56x+48y-9z=d$. Como o ponto C pertence ao plano ACF, vem:

$$56\times 0+48\times 6-9\times 0=d \Leftrightarrow d=288$$

Logo, uma equação do plano ACF é $56x+48y-9z=288$.

Cálculos Auxiliares: $\overrightarrow{AC}=C-A=(0,6,0)-(6,-1,0)=(-6,7,0)$; $\overrightarrow{AF}=F-A=(3,4,8)-(6,-1,0)=(-3,5,8)$