Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

Prova Modelo n.º 3

12.º Ano de Escolaridade

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Considere um conjunto de doze bolas, seis azuis, indistinguíveis, duas pretas, indistinguíveis e quatro encarnadas, numeradas de 1 a 4.

De quantas maneiras distintas se podem colocar as doze bolas numa só fila, de modo que as azuis ocupem posições consecutivas?

A $\frac{7!}{2!}$ **B** $\frac{7!\times 6!}{2!}$ **C** $\frac{12!}{2!\times 6!}$ **D** $7!\times 6!$

2. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{{}^{2012}C_{298}+{}^{2012}C_{300}}{{}^{2014}C_{300}}$	$\frac{a}{{}^{2014}C_{300}}$	$\frac{{}^{2012}C_{1713}}{{}^{2014}C_{300}}$

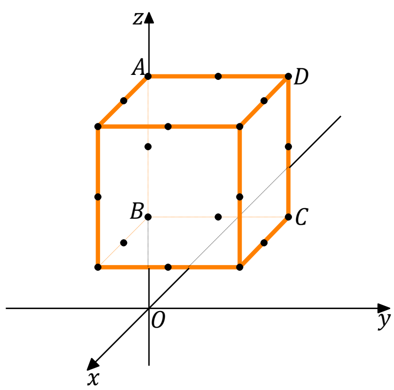
(a designa um número real positivo)

Qual é o valor de a?

A ${}^{2012}C_{298}$ **B** ${}^{2012}C_{299}$ **C** ${}^{2013}C_{298}$ **D** ${}^{2013}C_{299}$

3. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ um cubo no qual se assinalaram 20 pontos, os vértices e pontos médios das suas arestas. Quatro dos vértices do cubo estão identificados com as letras A, B, C e D.

Sabe-se que a aresta $[AB]$ está contida no eixo Oz e a face $[ABCD]$ contida no plano yOz.



Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, dois dos pontos assinalados.

Qual é a probabilidade de definirem uma recta perpendicular ao eixo Oy?

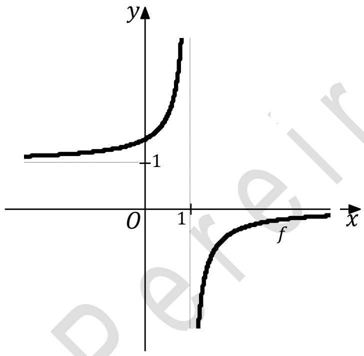
A $\frac{8}{95}$ **B** $\frac{12}{95}$ **C** $\frac{16}{95}$ **D** $\frac{31}{95}$

4. Seja a um número real positivo tal que $\log_4 a = \frac{1}{2}$. Qual é o valor de $\log_{16}(16a^3) - \log_4(a^3)$?

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{3}{4}$ **D** 1

5. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Sabe-se que as retas de equação $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$ são assíntotas do gráfico de f.



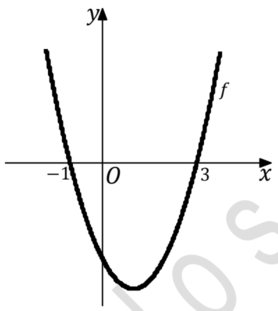
Seja (x_n) uma progressão geométrica tal que:

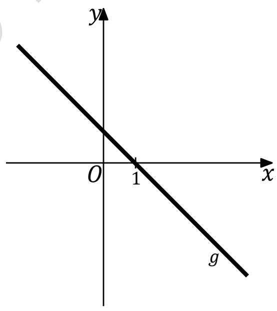
$$x_2 = -\frac{16}{3} \qquad \text{e} \qquad x_5 = -\frac{128}{81}$$

Qual é o valor de $\lim f(x_n + 1)$?

A $-\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** $+\infty$

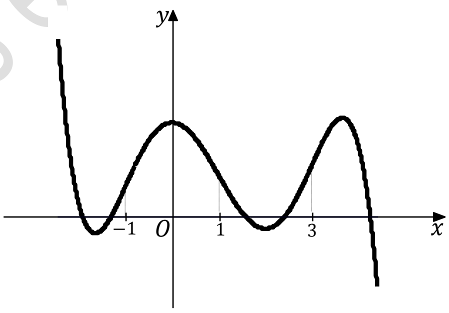
6. Nas figuras estão representadas, num referencial o.n. xOy, parte dos gráficos de duas funções polinomiais f e g.



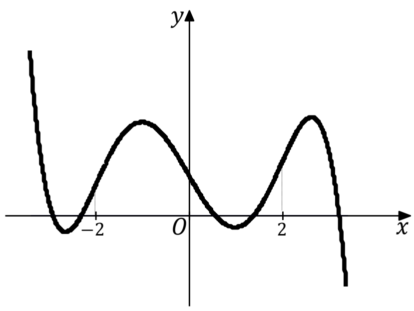


Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$, tal que $h''(x) = (f \times g)(x)$. Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função $-h(x+1)$?

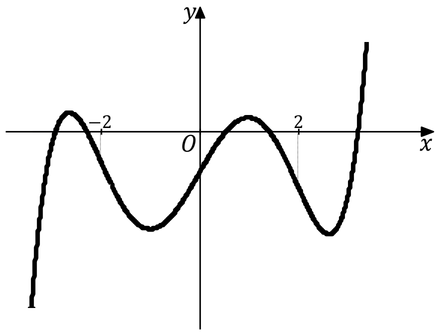
A



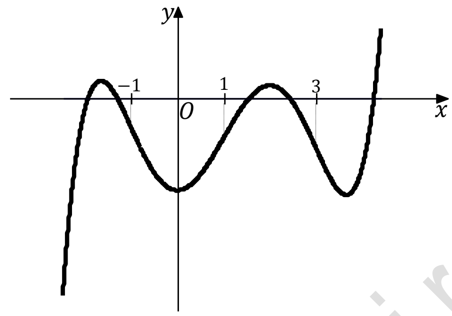
B



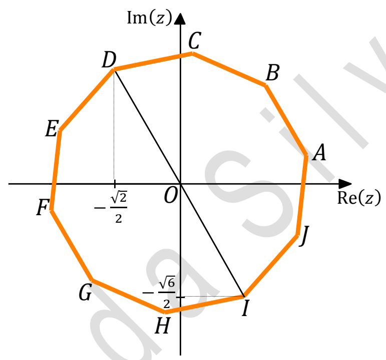
C



D



7. No plano complexo da figura está representado um decágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem. Os vértices do decágono são as raízes de índice n de um número complexo z. O vértice D tem abcissa $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e o vértice I tem ordenada $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.



Qual é o número complexo cuja imagem é o ponto G?

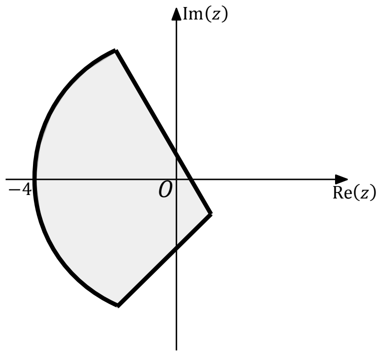
A $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{27\pi}{20}$ **B** $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{15}$ **C** $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{15}$ **D** $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{27\pi}{20}$

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a seguinte condição:

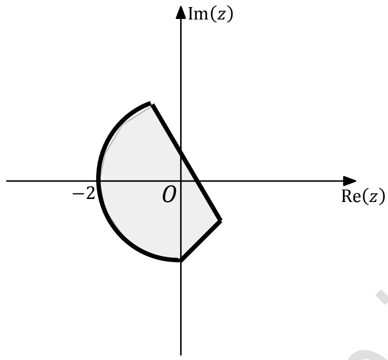
$$z \times \bar{z} \leq 4 \quad \wedge \quad \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{5\pi}{4}$$

Em qual das seguintes opções pode estar representado o conjunto de pontos definido pela condição?

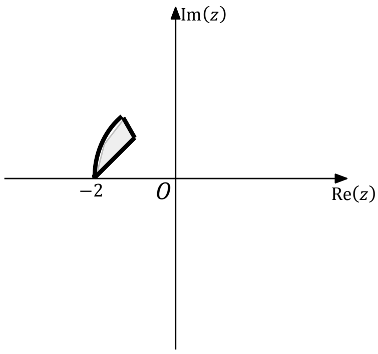
A



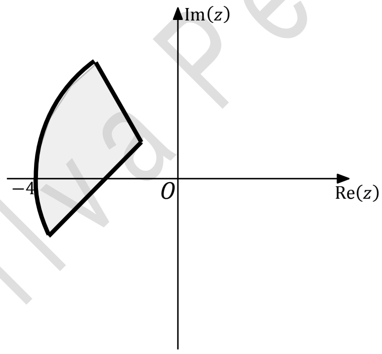
B



C



D



Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{\operatorname{sen} \alpha + i \cos(\alpha - \pi)}{\operatorname{cis}(3\alpha) \times (-1-\sqrt{3}i)}$, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Determine o valor de α de modo que $(z \times i^{9-16n})^2$ seja um número real negativo ($n \in \mathbb{N}$).

2. Mostre que $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{z} \times w) + |w|^2, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

3. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$) tais que $P(A \cap B) \neq 0$.

3.1. Mostre que $\frac{(1-P(\bar{A}|\bar{B})) \times (1-P(B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(\bar{B}|A)}{P(B|A)}$.

3.2. Num grupo de amigos sabe-se que:

- o número de amigos que gosta de música pop é o triplo do número de amigos que gosta de música rock;
- 10% gosta de ambos os tipos de música (pop e rock);
- dois em cada três dos amigos que gostam de música rock, também gostam de música pop;

Escolhendo ao acaso um dos amigos, qual é a probabilidade de não gostar de música rock, sabendo que não gosta de música pop? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 3.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

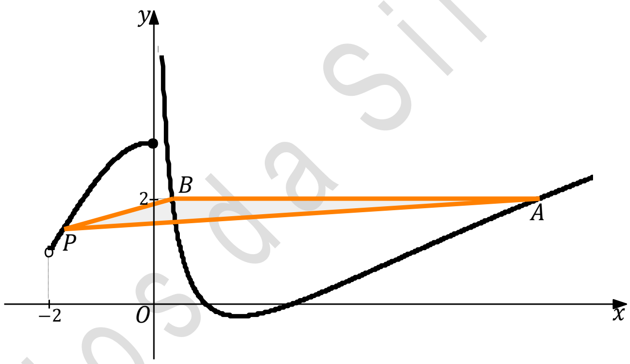
4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}-1 & \text{se} \quad x\leq 0\\ \ln^2 x-\ln x & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

4.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados. Caso existam, indique as suas equações.

4.2. Estude, para $x\in\mathbb{R}^+$, a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

4.3. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e um triângulo $[ABP]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f, têm ordenada 2 e têm abcissa positiva;

- o ponto P desloca-se sobre o gráfico da função f, no segundo quadrante. Para cada posição do ponto P a sua abcissa, x, pertence ao intervalo $]-2,0]$.

Determine as abcissas dos pontos P de modo que a área do triângulo $[ABP]$ seja igual a 2.

Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, o valor exacto das abcissas dos pontos A e B;

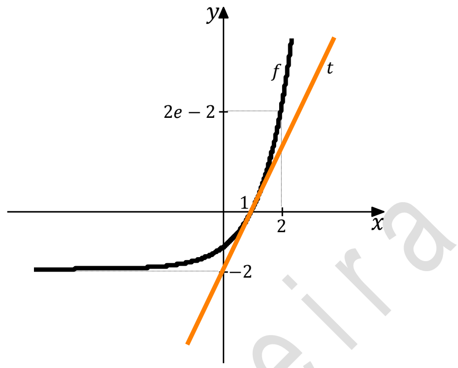
- escrever uma condição que permite resolver o problema;

- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;

- indicar as abcissas dos pontos P que são solução do problema, apresentando-as arredondadas às centésimas.

5. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, contínua em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:



- a função f tem um único zero em $x = 1$ e o ponto de coordenadas $(2, 2e - 2)$ pertence ao seu gráfico;
- a recta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 e contém o ponto de coordenadas $(0, -2)$;
- a recta de equação $y = -2$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \longrightarrow -\infty$.

Sejam g e h as funções de domínio $\mathbb{R}$ definidas por $g(x) = e^{x-1} \times (f(x) + 1)$ e $h(x) = \begin{cases} 3g(x) & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \frac{2\ln x}{x-1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$.

Qual das seguintes a afirmações não é necessariamente verdadeira?

A A recta de equação $y = 3x - 2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

B A equação $g(x) = e$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,2]$.

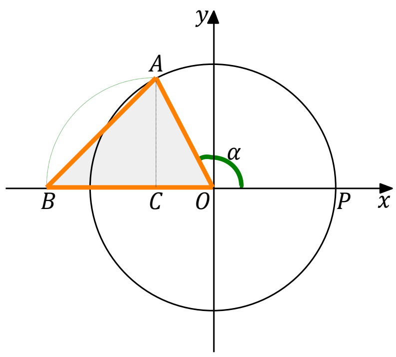
C A equação $h(x) = \frac{5}{2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,2]$.

D A recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de h, quando $x \longrightarrow -\infty$.

Numa pequena composição indique a opção correcta e explique as razões que o levam a rejeitar as restantes opções. Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

6. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy um círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:



- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, no segundo quadrante (eixo Ox não incluído). O ponto C acompanha o movimento de A, de modo que $[AC]$ é sempre paralelo a Oy;
- o ponto B pertence ao eixo Ox;
- o arco de circunferência AB está centrado em C;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo POA, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

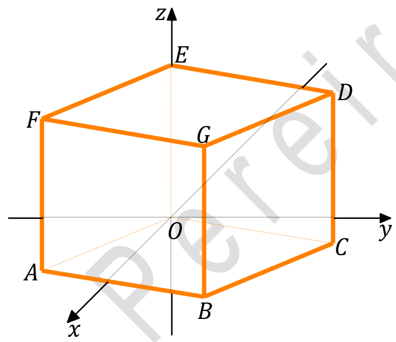
Seja g a função que dá a área do triângulo $[OAB]$ em função de α.

6.1. Mostre que $g(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$. Determine $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interpreta geometricamente o resultado obtido.

6.2. Mostre que $g'(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha) - \cos(2\alpha)}{2}$ e determine o valor de α para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é máxima.

7. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma em que as bases são paralelogramos.

Sabe-se que:



- a base $[OABC]$ está contida no plano xOy;
- a aresta $[OE]$ está contida no eixo Oz;
- o ponto A tem ordenada -2;
- uma equação do plano ABG é $5x - 2y = 24$;
- uma equação da recta CG é $(x, y, z) = (-2,7,-4) + k(4,-2,4)$, $k \in \mathbb{R}$.

Escreva uma equação cartesiana do plano ACG.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1.	A	**2.**	B	**3.**	D	**4.**	A	**5.**	D	**6.**	C	**7.**	B	**8.**	C

Grupo II – Itens de resposta aberta

1. $\alpha = \frac{7\pi}{12}$

3.2. $\frac{10}{11}$

4.1. A.V.: $x = 0$; A.H.: $y = -1$, quando $x \longrightarrow -\infty$.

4.2. $f''(x) = \frac{3 - 2\ln x}{x^2}$; Para $x \in \mathbb{R}^+$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\sqrt{e^3}, +\infty\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \sqrt{e^3}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x = \sqrt{e^3}$.

4.3. A altura do triângulo é dada por $\left|2 - \left(\frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 1\right)\right| = \left|3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}\right|$ e a sua área por $\left|3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}\right| \times \frac{e^2 - e^{-1}}{2}$. Assim:

$$\left|3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}\right| \times \frac{e^2-e^{-1}}{2} = 2 \Leftrightarrow x = a \quad \vee \quad x = b, \text{ com } a \approx -1{,}72 \text{ e } b \approx -0{,}92$$

5. C

6.1. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o triângulo $[OAB]$ é rectângulo e isósceles. A medida do comprimento dos seus catetos é 1 e a sua área $\frac{1}{2}$.

6.2. $\alpha = \frac{5\pi}{8}$

7. $7x + 2y - 6z = 24$