Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

Prova Modelo n.º 3 – Proposta de Resolução

12.º Ano de Escolaridade

Recursos para Matemática

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Tem em atenção a figura seguinte:

$$\underbrace{\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\frac{7!\times 1}{2!}=\frac{7!}{2!}}$$

$\longrightarrow$ As duas bolas pretas indistinguíveis permutam entre si de $2!$ maneiras distintas.

Agrupando num bloco as seis bolas azuis, o bloco e as restantes seis bolas permutam entre si de $7!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as seis bolas azuis só podem ser colocadas de uma maneira, visto serem indistinguíveis. Como fora do bolco há duas bolas pretas indistinguíveis, o número pedido é $\frac{7!\times 1}{2!}=\frac{7!}{2!}$.

Resposta: A

2. Tem-se que ${}^{2012}C_{1713}={}^{2012}C_{2012-1713}={}^{2012}C_{299}$. Assim, vem:

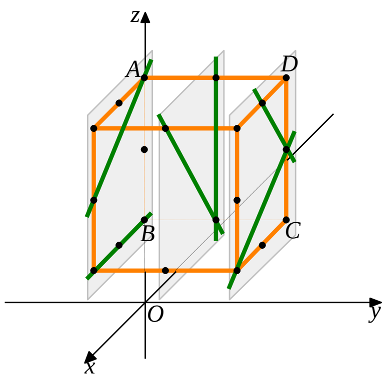
$$\frac{{}^{2012}C_{298}+{}^{2012}C_{300}}{{}^{2014}C_{300}}+\frac{a}{{}^{2014}C_{300}}+\frac{{}^{2012}C_{1713}}{{}^{2014}C_{300}}=1\Leftrightarrow\frac{{}^{2012}C_{298}+{}^{2012}C_{300}+a+{}^{2012}C_{299}}{{}^{2014}C_{300}}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{{}^{2012}C_{298}+{}^{2012}C_{299}}_{{}^{2013}C_{299}}+{}^{2012}C_{300}+a=\underbrace{{}^{2014}C_{300}}_{{}^{2013}C_{299}+{}^{2013}C_{300}}\Leftrightarrow\cancel{{}^{2013}C_{299}}+{}^{2012}C_{300}+a=\cancel{{}^{2013}C_{299}}+\underbrace{{}^{2013}C_{300}}_{{}^{2012}C_{299}+{}^{2012}C_{300}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cancel{{}^{2012}C_{300}}+a={}^{2012}C_{299}+\cancel{{}^{2012}C_{300}}\Leftrightarrow a={}^{2012}C_{299}$$

Resposta: B

3. O número de casos possíveis é ${}^{20}C_2$.



Uma recta é perpendicular ao eixo Oy se estiver contida num plano perpendicular a esse eixo. Assim, para que os dois pontos escolhidos definam uma recta perpendicular a Oy, os dois têm de estar contido num mesmo plano perpendicular a Oy.

Na figura, estão representados a cinzentos os planos perpendiculares a Oy (que contêm os pontos assinalados) e algumas das rectas contidas nesses planos a verde.

Logo, o número de casos favoráveis é ${}^{8}C_2 + {}^{4}C_2 + {}^{8}C_2 = 2 \times {}^{8}C_2 + {}^{4}C_2$.

Portanto, a probabilidade pedida é $\dfrac{2 \times {}^{8}C_2 + {}^{4}C_2}{{}^{20}C_2} = \dfrac{31}{95}$.

Resposta: D

4. Sabe-se que $\log_4 a = \dfrac{1}{2}$. Assim, vem:

$$\log_{16}\left(16a^3\right) - \log_4\left(a^3\right) = \log_{16} 16 + \log_{16}\left(a^3\right) - 3\log_4 a =$$

$$= 1 + \frac{\log_4\left(a^3\right)}{\log_4 16} - 3 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3\log_4 a}{\log_4\left(4^2\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3 \times \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Resposta: A

5. Seja r a razão da progressão geométrica $\left(x_n\right)$. Assim tem-se:

$$x_5 = x_2 \times r^3 \Leftrightarrow -\frac{128}{81} = -\frac{16}{3} r^3 \Leftrightarrow \frac{128}{81} = \frac{16}{3} r^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 128 \times 3 = 16 \times 81 r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{384}{1296} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$$

Logo, $x_n = x_2 \times r^{n-2} \Leftrightarrow -\dfrac{16}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-3} \to 0^-$ (Tem-se que $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} = \lim\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0^+$ e $x_n < 0 \, , \forall n \in \mathbb{N}$)

Assim, $x_n + 1 \to 1^-$ e portanto, pela definição de limite segundo Heine, $\lim f\left(x_n + 1\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} f\left(x\right) = +\infty$.

Resposta: D

6. Tem-se que $h''(x)=(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$. Assim:

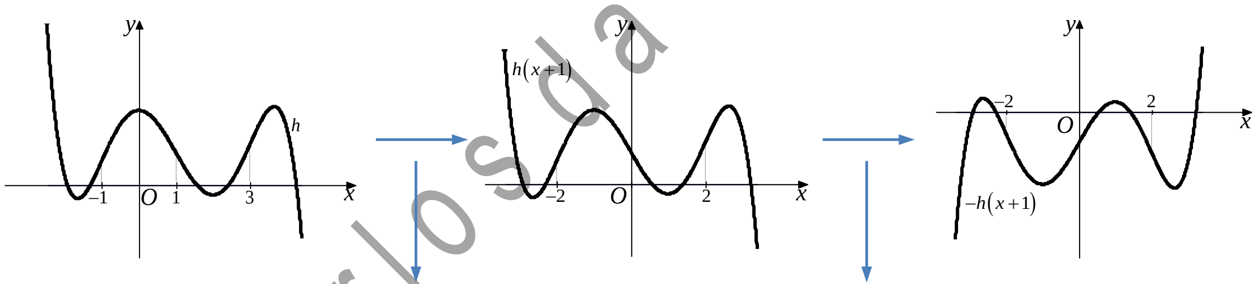
$$h''(x)=0\Leftrightarrow f(x)\times g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0 \quad \vee g(x)=0\Leftrightarrow x=-1 \quad \vee \quad x=3 \quad \vee \quad x=1$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função h'', vem:

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$h''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$	p.i.	$\cap$

O gráfico da função h tem a concavidade votada para baixo em $[-1,1]$ e em $[3,+\infty[$, tem a concavidade votada para cima em $]-\infty,-1]$ e em $[1,3]$ e tem pontos de inflexão em $x=-1$, em $x=1$ e em $x=3$.

Assim, tendo em conta as opções, o gráfico da função $-h(x+1)$ pode ser:



Translação segundo o vector $\vec{u}=(-1,0)$, ou seja, deslocamento horizontal de uma unidade para a esquerda.

Simetria em relação ao eixo Ox.

Resposta: C

7. O polígono $[ABCDEFGHIJ]$ é um decágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem. Logo, $A\hat{O}B=B\hat{O}C=\ldots=J\hat{O}A=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$. Além disso o ponto D é o simétrico de I em relação à origem do referencial. Portanto, as coordenadas de D são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, ou seja, D é a imagem geométrica de $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$. Assim:

$$\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$. Tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{\frac{6}{2}}=-\sqrt{3}$ e $\theta\in 2.^{\text{o}}Q$. Logo,

$\theta=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$ e portanto $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$.

Assim, o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto G é $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}+3\times\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{15}$.

Resposta: B

8.

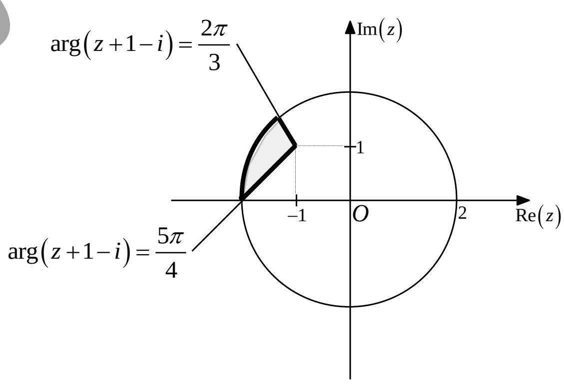
▪ Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$. Tem-se, $z\times\bar{z}\le 4\Leftrightarrow(x+yi)(x-yi)\le 4\Leftrightarrow x^2-y^2i^2\le 4\Leftrightarrow x^2+y^2\le 4$.

Portanto a condição $z\times\bar{z}\le 4$ define no plano complexo um círculo de raio 2 centrado na origem.

▪ A condição $\arg(z+1-i)=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\arg\left(z-(-1+i)\right)=\frac{2\pi}{3}$ define uma semi-recta com origem na imagem geométrica de $-1+i$, o ponto de coordenadas $(-1,1)$ e que faz um ângulo de amplitude $\frac{2\pi}{3}$ com o semi-eixo positivo real.

▪ A condição $\arg(z+1-i)=\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow\arg\left(z-(-1+i)\right)=\frac{5\pi}{4}$ define uma semi-recta com origem na imagem geométrica de $-1+i$, o ponto de coordenadas $(-1,1)$ e que faz um ângulo de amplitude $\frac{5\pi}{4}$ com o semi-eixo positivo real.

Representando no plano complexo:



Resposta: C

1.

- $i^{9-26n}=\dfrac{i^9}{i^{16n}}=\dfrac{i^{4\times 2+1}}{i^{4\times 4n+0}}=\dfrac{i^1}{i^0}=i$

- Recorrendo ao círculo trigonométrico, verifica-se que $\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha$.

- $\left|-1-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$. Seja θ um argumento de $-1-\sqrt{3}i$. Tem-se $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$ e $\theta\in 3.^{\text{o}}Q$. Logo, $\theta=\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{4\pi}{3}$

- $\left(z\times i^{9-16n}\right)^2=\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha-i\cos\alpha}{\operatorname{cis}(3\alpha)\times 2\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}}\times i\right)^2=\left(\dfrac{i\operatorname{sen}\alpha-i^2\cos\alpha}{2\operatorname{cis}\left(3\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^2=\left(\dfrac{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}{2\operatorname{cis}\left(3\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^2=\left(\dfrac{\operatorname{cis}\alpha}{2\operatorname{cis}\left(3\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^2=$

$$=\left(\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(\alpha-3\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-2\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\operatorname{cis}\left(-4\alpha-\frac{8\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{cis}\left(-4\alpha-\frac{8\pi}{3}+2\pi\right)=\frac{1}{4}\operatorname{cis}\left(-4\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$\left(z\times i^{9-16n}\right)^2$ é um número real negativo se o seu argumento for da forma $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Assim:

$$-4\alpha-\frac{2\pi}{3}=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow -4\alpha=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \alpha=-\frac{5\pi}{12}-\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

Logo, $\alpha=\dfrac{7\pi}{12}$ ($k=-2$).

2. Sejam $z=a+bi$ e $w=c+di$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Tem-se:

- $|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$

- $|w|^2=\left(\sqrt{c^2+d^2}\right)^2=c^2+d^2$

- $\bar{z}\times w=(a-bi)(c+di)=ac+adi-bci-bdi^2=ac+bd+i(ad-bc)$

Logo, $\operatorname{Re}(\bar{z}\times w)=ac+bd$

Assim:

$$\left|z-w\right|^2=\left|a+bi-c-di\right|^2=\left|a-c+i\left(b-d\right)\right|^2=\left(\sqrt{\left(a-c\right)^2+\left(b-d\right)^2}\right)^2=a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2=$$

$$=\underbrace{a^2+c^2}_{\left|z\right|^2}-2\underbrace{\left(ac+bd\right)}_{\mathrm{Re}\left(\bar{z}\times w\right)}+\underbrace{c^2+d^2}_{\left|w\right|^2}=\left|z\right|^2-2\,\mathrm{Re}\left(\bar{z}\times w\right)+\left|w\right|^2$$