Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Num certo dia entraram numa loja de telemóveis n pessoas ($n \in \mathbb{N}$) todas proprietárias de um único telemóvel. Qual é a probabilidade do último algarismo do número do telemóvel de cada uma destas pessoas ser igual?

A $\frac{1}{10^{n-1}}$ **B** $\frac{10}{n!}$ **C** $\frac{9!}{10^{n-1}}$ **D** $\frac{10!}{n!}$

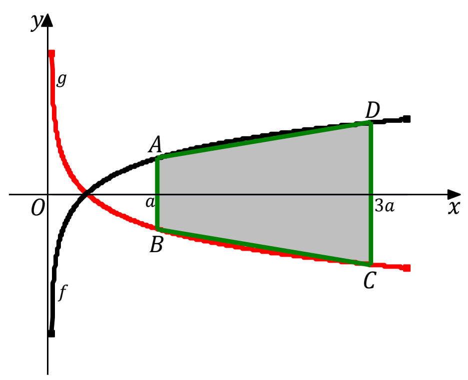
2. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A) = 0{,}3$ e que $P(B|\bar{A}) = 0{,}2$. Qual pode ser o valor de $P(B)$?

A $0{,}1$ **B** $0{,}3$ **C** $0{,}5$ **D** $0{,}7$

3. A quantidade de água, em mL, presente nas garrafas de água que uma empresa produz é uma variável aleatória com distribuição normal. Todas as garrafas de água passam pelo controle de qualidade e só são aprovadas se o seu volume estiver a menos de dois desvios padrões da média. Num lote de doze garrafas, qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de exactamente três serem rejeitadas?

A $0{,}013$ **B** $0{,}014$ **C** $0{,}226$ **D** $0{,}227$

4. Na figura estão representados num referencial o.n. xOy os gráficos das funções f e g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definidas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ e o trapézio $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- Os pontos A e D pertencem ao gráfico de f e os pontos B e C pertencem ao gráfico de g.
- Os pontos A e B têm abcissa a e os pontos C e D têm abcissa $3a$.

Qual é a expressão que dá a área do trapézio $[ABCD]$ em função de a?

A $a\log_3(3a^2)$ **B** $2a\log_3(9a^2)$ **C** $2a\log_3(3a^2)$ **D** $a\log_3(9a^2)$

5. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a^2\cos(\pi x) & \text{se} \quad x\leq 1 \\ \frac{e^{b-bx}-1}{\ln(ax-a+1)} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}, \text{com } a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Quais podem ser os valores de a e de b?

A $a=-2$ e $b=-6$ **B** $a=-1$ e $b=1$ **C** $a=1$ e $b=3$ **D** $a=2$ e $b=8$

6. De uma função h par, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se 3 é um zero de h e que $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{h(x)}=1$. Qual das seguintes, é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -3?

A $y=3x+9$ **B** $y=-3x+9$ **C** $y=-3x-9$ **D** $y=3x-9$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número $z=\operatorname{cis}\alpha$, com $\alpha\in\mathbb{R}$. Quais são os valores de α para os quais $z-(\bar{z})^2$ é um número real?

A $\alpha=\pi+2k\pi \ \vee \ \alpha=\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

B $\alpha=\pi+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

C $\alpha=2k\pi \ \vee \ \alpha=\pi+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

D $\alpha=\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

8. Em $\mathbb{C}$, os números complexos $2\operatorname{cis}\theta$ e $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\cos\theta+\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\operatorname{sen}\theta$, com $\theta\in\mathbb{R}$, são duas raízes de índice n de um número complexo z, com $n\geq 2$. Qual pode ser o valor de n?

A 6 **B** 10 **C** 12 **D** 16

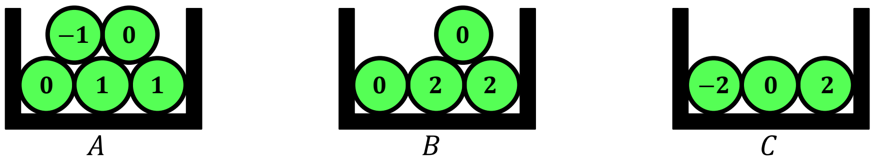
GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=2+2xi+x^2i^{8n+3}$ e $z_2=-3+x^2+x^3i^{5-16n}$, com $n\in\mathbb{N}$ e $x\in\mathbb{R}$.

1.1. Nesta alínea, considere $x=-1$. Determine, na forma trigonométrica $\frac{z_1}{\overline{z_2}-\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}}+\frac{1+4i}{4i}+\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$.

1.2. Determine x de modo que z_2 seja igual ao simétrico do conjugado de z_1.

2. Considere três caixas, A, B e C que contêm bolas numeradas com a composição indicada na figura.



2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa A e duas bolas da caixa C e calcular o produto dos números das quatro bolas extraídas.

Repete-se esta experiência quinze mil vezes e somam-se todos os produtos obtidos. De que valor é de esperar que essa soma esteja próxima?

Sugestão: Comece por construir a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X: «produto dos números inscritos nas quatro bolas retiradas».

2.2. Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso três bolas da caixa A e duas bolas da caixa B e colocá-las na caixa C. Em seguida retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro bolas da caixa C. Considere os acontecimentos:

X: «os números das três bolas retiradas da caixa A têm o mesmo valor absoluto»

Y: «os números das duas bolas retiradas da caixa B são iguais»

Z: «o produto dos números das quatro bolas retiradas da caixa C é positivo»

Qual é o valor de $P\left(Z\middle|(X \cap \bar{Y})\right)$?

Uma resposta a esta questão é $\frac{1+{}^4C_2}{{}^8C_4}$. Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada explique esta resposta, começando por interpretar o significado de $P\left(Z\middle|(X \cap \bar{Y})\right)$ no contexto da situação descrita. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis.
- uma explicação do número de casos favoráveis.

3. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Mostre que:

$$P(\bar{A} \cup B) - P(A|\bar{B}) \times P(B) = P(\bar{A}) \text{ se e só se } A \text{ e } B \text{ forem independentes.}$$

4. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = -xe^{4-x^2}$.

4.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

4.2. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0,4\}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\ln(-x) & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{4-x}{x-\sqrt{4x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

5. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = mx + b$, com $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ e $b \in \mathbb{R}$. Sabe-se que o gráfico de g é assimptota do gráfico de f, quando $x \longrightarrow +\infty$.

Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{x^2}{f(-x)-g\left(\frac{x}{m}\right)}$. Mostre que o gráfico de h admite uma assimptota quando $x \longrightarrow -\infty$ e escreva uma equação que a defina.

6. Num hipermercado o preço de venda, em euros, de um quilograma de cerejas é dado por:

$$V(t) = \frac{2}{3}t + 8 - 2\ln(t^2 + 7t + 1), \text{ com } t \in [0,10]$$

onde t representa o tempo, em semanas, decorrido após o inicio da sua comercialização.

6.1. Ao fim de quanto tempo foi mínimo o preço de venda de cada quilograma de cerejas? Qual foi esse preço? Apresente o resultado em euros.

6.2. Durante as dez semanas que as cerejas estiveram à venda, o hipermercado comprou cada quilograma por 3 euros. O número de quilogramas que vendeu, em milhares, é dado por:

$$Q(t) = 4t^2e^{-0,5t}, \text{ com } t \in [0,10]$$

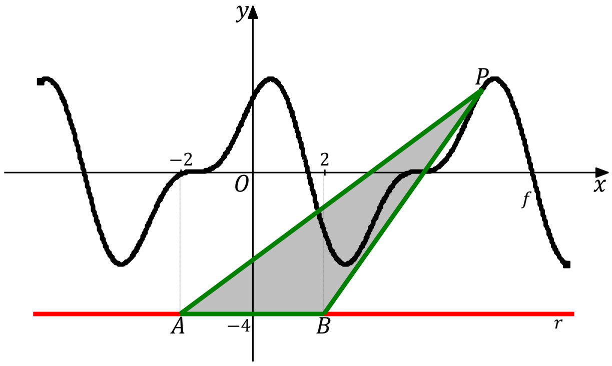
Recorrendo à calculadora gráfica, determine durante quanto tempo o lucro do hipermercado foi superior a 2000 euros.

Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar os valores que t que são solução do problema.

Apresente os valores que retirar da calculadora arredondados às milésimas e a resposta à questão em semanas e dias, com os dias arredondados às unidades.

7. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a\,\text{sen}(2x) + a^2 \cos x$, com $a > 1$, a reta r de equação $y = -4$ e o triângulo $[ABP]$.



Os pontos A e B pertencem à recta r e têm abcissa -2 e 2 respetivamente. O ponto P desloca-se sobre o gráfico da função f, para cada posição de P seja x a sua abcissa.

Mostre que existe pelo menos uma abcissa de P, pertencente ao intervalo $]0,\pi[$, tal que a área do triângulo $[ABP]$ é igual a $4a + 4$.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. A **2.** B **3.** B **4.** C **5.** D **6.** C **7.** A **8.** D

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. $\frac{1}{2}\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$ **1.2.** $x = 1$

2.1

x_i	-4	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$

$\mu = \frac{2}{15}$; soma esperada: $\frac{2}{15} \times 15000 = 2000$.

4.1. $g''(x) = xe^{4-x^2}(6 - 4x^2)$; O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e em $\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e tem pontos de inflexão em $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, em $x = 0$ e em $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4.2. A.V.: $x = 0$; A.H.: $y = 0$, quando $x \longrightarrow -\infty$ e $y = -1$, quando $x \longrightarrow +\infty$.

5. $y = -\frac{x}{m+1}$.

6.1. O preço de venda de cada quilograma de cerejas foi mínimo passadas quatro semanas. Esse preço foi de, aproximadamente, 3,05 euros $(V(4) \approx 3{,}05)$

6.2. $(V(t) - 2) \times Q(t) > 2 \Leftrightarrow t \in]a, b[\cup]c, 10]$, com $a \approx 0{,}572$, $b \approx 2{,}37$ e $c \approx 6{,}126$. O lucro do hipermercado foi superior a 2000 euros durante $(b - a) + (10 - c) \approx 5{,}672$ semanas, isto é, durante, aproximadamente, 5 semanas e 5 dias $(0{,}672 \times 7 \approx 5)$.