EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 2 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Recursos para Matemática

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. O último algarismo de cada um dos n telemóveis pode ser um dos dez algarismos (do 0 ao 9), logo o número de casos possíveis é $\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ vezes}} = 10^n$.

O número de casos favoráveis é 10 (ou todos os números dos n telemóveis terminam em 0, ou em 1, ou em 2, ou em 3, …, ou em 9).

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}$.

Resposta: A

2. Tem-se que:

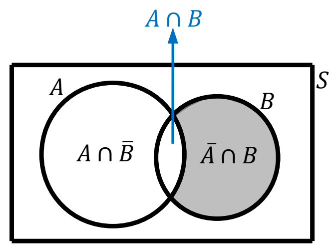
$$P(B|\bar{A}) = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = 0{,}2 \underset{i)}{\Leftrightarrow} \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{0{,}7} = 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}14 + P(A \cap B)$$

i)



$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Como a probabilidade da intersecção de dois acontecimentos não pode ser maior que a probabilidade de cada um desses acontecimentos, então $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow 0 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}3$. Portanto:

$$0 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}3 \Leftrightarrow 0{,}14 \leq 0{,}14 + P(A \cap B) \leq 0{,}3 + 0{,}14 \Leftrightarrow 0{,}14 \leq P(B) \leq 0{,}44$$

Assim, tendo em conta as opções, $P(B)$ só pode ser igual a $0{,}3$.

Nota: Sejam $X, Y \subset S$. Tem-se que:

$\text{máx}\{P(X), P(Y)\} \leq P(X \cup Y) \leq \min\{1, P(X) + P(Y)\}$ e que $\text{máx}\{0, P(X) + P(Y) - 1\} \leq P(X \cap Y) \leq \min\{P(X), P(Y)\}$

Resposta: B

3. A variável aleatória X: «quantidade de água, em mL, presente nas garrafas que a empresa produz» tem distribuição normal, isto é, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, sendo μ o valor médio e σ o desvio padrão. Assim:

$$P(\text{garrafa de água ser aprovada}) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9545$$

Logo, $P(\text{garrafa de água ser reprovada}) = 1 - (\text{garrafa de água ser aprovada}) = 1 - 0{,}9545 = 0{,}0455$.

Seja Y a variável aleatória «número de garrafas de água rejeitadas num lote de doze». Tem-se que $Y \sim \mathrm{Bin}(12; 0{,}0455)$ e portanto $P(Y = 3) = {}^{12}C_3 \times (0{,}0455)^3 \times (0{,}9545)^9 \approx 0{,}014$.

Resposta: B

4. Tem-se que $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CD}+\overline{AB}}{2} \times \text{altura}$, onde $\overline{CD} = f(3a) - g(3a)$, $\overline{AB} = f(a) - g(a)$ e a altura é igual a $3a - a = 2a$. Logo:

- $\overline{CD} = f(3a) - g(3a) = f(3a) - f\left(\frac{1}{3a}\right) = \log_3(3a) - \log_3\left(\frac{1}{3a}\right) \underset{i)}{=} 2\log_3(3a)$

- $\overline{AB} = f(a) - g(a) = f(a) - f\left(\frac{1}{a}\right) = \log_3 a - \log_3\left(\frac{1}{a}\right) \underset{i)}{=} 2\log_3 a$

Assim, $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CD}+\overline{AB}}{2} \times \text{altura} = \frac{2\log_3(3a)+2\log_3 a}{2} \times 2a = \left(2\log_3(3a) + 2\log_3 a\right) \times a =$

$$= 2a\left(\log_3(3a) + \log_3 a\right) = 2a\log_3(3a \times a) = 2a\log_3(3a^2)$$

i) Nota: $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$, $\forall a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Resposta: C

5. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, logo também o é em $x = 1$ e portanto $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$. Assim:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(a^2 \cos(\pi x)\right) = a^2 \cos(\pi \times 1) = a^2 \times (-1) = -a^2$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^{b-bx}-1}{\ln(ax-a+1)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^{-b(x-1)}-1}{\ln(a(x-1)+1)} \underset{i)}{=} \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^{-by}-1}{\ln(ay+1)} = \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{\frac{e^{-by}-1}{y}}{\frac{\ln(ay+1)}{y}} = \frac{-b \times \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^{-by}-1}{-by}}{a \times \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{\ln(ay+1)}{ay}} =$

$$= \frac{-b \times 1}{a \times 1} = -\frac{b}{a}$$

Se $y \longrightarrow 0^-$ então $ay \longrightarrow 0$ e $-by \longrightarrow 0$

i) Mudança de variável: Se $x \to 1^-$ então $x - 1 \to 0^-$. Seja $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$, $y \to 0^-$.

- $f(1) = a^2 \cos(\pi \times 1) = a^2 \times (-1) = -a^2$

Logo $-\frac{b}{a} = -a^2 \Leftrightarrow b = a^3$. Das opções apresentadas a única verifica esta equação é a $\boxed{\text{D}}$, pois se $a = 2$ então $b = 2^3 = 8$.

Resposta: D

6. A função h tem um zero em $x = 3$, logo $h(3) = 0$. Assim:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{h(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{h(x)-h(3)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3} x \times \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{h(x)-h(3)} = 1 \Leftrightarrow 3 \times \frac{1}{h'(3)} = 1 \Leftrightarrow h'(3) = 3$$

Como h é par, então h' é ímpar. Logo $h'(-3) = -h'(3) = -3$ i).

Seja t recta a tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -3. Assim, $m_t = h'(-3) = -3$ e uma equação da recta t é do tipo $y = -3x + b$. O ponto de coordenadas $\left(-3, h(-3)\right) = (-3, 0)$ pertence à recta t, logo:

$$0 = -3 \times (-3) + b \Leftrightarrow 0 = 9 + b \Leftrightarrow b = -9$$

Portanto $t: y = -3x - 9$.

i) $h'(-3) = \lim_{x\to -3}\frac{h(x)-h(-3)}{x+3} \underset{\text{Seja } y=-x \Leftrightarrow x=-y\text{. Se } x\to -3 \text{ então } y\to 3}{=} \lim_{y\to 3}\frac{h(-y)-h(-3)}{-y+3} \overset{h \text{ é par}}{=} \lim_{y\to 3}\frac{h(y)-h(3)}{-(y-3)} = -\lim_{y\to 3}\frac{h(y)-h(3)}{y-3} = -h'(3) = -3.$

Resposta: C

De facto, se uma função é par, a sua derivada é ímpar e se uma função é ímpar a sua derivada é par. Vamos provar que se uma função f derivável em $D \subseteq \mathbb{R}$ é par, então f' é ímpar e que se uma função f derivável em $D \subseteq \mathbb{R}$ é ímpar, então f' é par.

I) Se f é par, então $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$. Seja $a \in D$, tem-se:

$$f'(-a) = \lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a} \underset{\text{Seja } y=-x \Leftrightarrow x=-y\text{. Se } x\to -a \text{ então } y\to a}{=} \lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(-a)}{-y+a} = \lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{-(y-a)} = -\lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = -f'(a)$$

Logo f' é ímpar.

II) Se f é ímpar, então $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$. Seja $a \in D$, tem-se:

$$f'(-a) = \lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a} \underset{\text{Seja } y=-x \Leftrightarrow x=-y\text{. Se } x\to -a \text{ então } y\to a}{=} \lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(-a)}{-y+a} = \lim_{y\to a}\frac{-f(y)+f(a)}{-(y-a)} = \lim_{y\to a}\frac{-\left(f(y)-f(a)\right)}{-(y-a)} = \lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a)$$

Logo f' é par.

7. Tem-se:

$$z - (\bar{z})^2 = \operatorname{cis}\alpha - (\operatorname{cis}(-\alpha))^2 = \operatorname{cis}\alpha - \operatorname{cis}(-2\alpha) =$$

$$= \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha - (\cos(-2\alpha) + i\operatorname{sen}(-2\alpha)) =$$

$$= \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha - \cos(-2\alpha) - i\operatorname{sen}(-2\alpha) =$$

$$= \cos\alpha - \cos(-2\alpha) + i(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}(-2\alpha))$$

O número complexo $z-(\bar{z})^2$ é real se $\operatorname{Im}(z-(\bar{z})^2)=0$. Assim:

$$\operatorname{Im}(z-(\bar{z})^2)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}(-2\alpha)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(-2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-2\alpha+2k\pi \quad \vee \quad \alpha=\pi-(-2\alpha)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha=2k\pi \quad \vee \quad -\alpha=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad \alpha=-\pi-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad \alpha=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

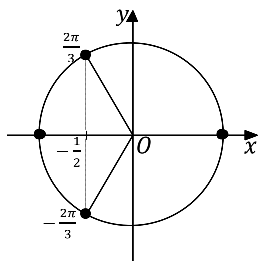
Observa que $-2k\pi$ é o mesmo que $2k\pi$ pois $k\in\mathbb{Z}$. Como $2k\pi$ representa voltas completas e π e $-\pi$ estão separados por uma volta, a expressão $\alpha=\frac{2k\pi}{3} \ \vee \ \alpha=-\pi-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ é equivalente a $\alpha=\frac{2k\pi}{3} \ \vee \ \alpha=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Outra resolução para a equação $\operatorname{Im}\left(z-(\bar{z})^2\right)=0$:

$$\operatorname{Im}(z-(\bar{z})^2)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}(-2\alpha)=0 \underset{\text{A função seno é ímpar}}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}(2\alpha)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha\,(1+2\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=0 \quad \vee \quad \cos\alpha=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha=k\pi \ \vee \ \alpha=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \ \vee \ \alpha=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}}_{\alpha=\frac{2k\pi}{3} \ \vee \ \alpha=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}}$$



Resposta: A

8. Sejam $z_1=2\operatorname{cis}\theta$ e $z_2=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\cos\theta+\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\operatorname{sen}\theta$, com $\theta\in\mathbb{R}$. Os números complexos z_1 e z_2 são raízes de índice n de um número complexo z se $|\arg(z_2)-\arg(z_1)|=\frac{2k\pi}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$ e $n\geq 2$.

Tem-se, $z_2=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\cos\theta+\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\operatorname{sen}\theta=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\cos\theta+\left(\frac{\sqrt{2}}{i}+\sqrt{2}\right)i\operatorname{sen}\theta=$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\cos\theta+\left(\frac{\sqrt{2}}{i}\times\frac{-i}{-i}+\sqrt{2}\right)i\operatorname{sen}\theta=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\cos\theta+\left(\frac{-\sqrt{2}i}{-i^2}+\sqrt{2}\right)i\operatorname{sen}\theta=$$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\cos\theta+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)i\operatorname{sen}\theta=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=$$

$$\underset{i)}{=} 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\operatorname{cis}\theta=2\operatorname{cis}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

Logo, $|\arg(z_2)-\arg(z_1)|=\frac{2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left|\cancel{\theta}-\frac{\pi}{4}-\cancel{\theta}\right|=\frac{2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left|-\frac{\pi}{4}\right|=\frac{2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n\cancel{\pi}=8k\cancel{\pi}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n=8k, k\in\mathbb{Z}$$

Assim, n é um múltiplo de 8 e portanto, tendo em conta as opções apresentada, n só pode ser 16.

i) Para escrever $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ na forma trigonométrica, vem: $\left|\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$. Sendo θ um argumento de $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$ e $\theta \in 4.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Assim $\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Resposta: D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1. Para $x=-1$, tem-se:

- $z_1 = 2+2\times(-1)i+(-1)^2 i^{8n+3} = 2-2i+i^{8n}\times i^3 = 2-2i+i^{4\times 2n}\times(-i) =$

$$= 2-2i+\left(i^4\right)^{2n}\times(-i) = 2-2i+1^{2n}\times(-i) = 2-2i-i = 2-3i$$

- $z_2 = -3+(-1)^2+(-1)^3 i^{5-16n} = -3+1-\frac{i^5}{i^{16n}} = -2-\frac{i^4\times i}{i^{4\times 4n}} = -2-\frac{i}{\left(i^4\right)^{4n}} = -2-\frac{i}{1^{4n}} = -2-i$

Assim, $\frac{z_1}{z_2-\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}}+\frac{1+4i}{4i}+\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = \frac{2-3i}{-2+i-(-i)}+\frac{1}{4i}+\frac{\cancel{4i}}{\cancel{4i}}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{2-3i}{-2+2i}\times\frac{-2-2i}{-2-2i}+\frac{1}{4i}\times\frac{-i}{-i}+1+\frac{\sqrt{3}}{4}i =$

$$= \frac{-4-4i+6i+6i^2}{(-2)^2-(2i)^2}+\frac{-i}{-4i^2}+1+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{-10+2i}{8}-\frac{i}{4}+1+\frac{\sqrt{3}}{4}i =$$

$$= -\frac{10}{8}+\frac{2i}{8}-\frac{i}{4}+1+\frac{\sqrt{3}}{4}i = -\frac{5}{4}+\cancel{\frac{i}{4}}-\cancel{\frac{i}{4}}+1+\frac{\sqrt{3}}{4}i = -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$$

Cálculo Auxiliar: Para escrever $-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$ na forma trigonométrica, vem: $\left|-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Sendo θ um argumento de $-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{3}$ e $\theta \in 2.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2\pi}{3}$.
Assim $-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$.

1.2. Pela alínea anterior sabe-se que $i^{8n+3}=-i$ e $i^{5-16n}=i$, logo $z_1 = 2+2xi-x^2 i$ e $z_2 = -3+x^2+x^3 i$. Pretende-se determinar x de modo que $z_2 = -\overline{z_1}$ (z_2 seja igual ao simétrico do conjugado de z_1). Assim:

$$z_2 = -\overline{z_1} \Leftrightarrow -3+x^2+x^3 i = -\overline{\left(2+2xi-x^2 i\right)} \Leftrightarrow -3+x^2+x^3 i = -\underbrace{\overline{\left(2+i\left(2x-x^2\right)\right)}}_{2-i\left(2x-x^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3+x^2+x^3 i = -2+i\left(2x-x^2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -3+x^2 = -2 \\ x^3 = 2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -2+3 \\ x^3+x^2-2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x\left(x^2+x-2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \ \vee \ x=1 \\ x=0 \ \vee \ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \ \vee \ x=1 \\ x=0 \ \vee \ x=-2 \ \vee \ x=1 \end{cases}$$

Logo $x=1$.

2.

2.1. Considere-se a variável aleatória X: «produto dos números inscritos nas quatro bolas extraídas». O produto das cinco bolas extraídas pode ser:

- -4, se entre as quatro bolas extraídas, duas estiverem numeradas com o número 1, uma com o -2 e uma com o 2.

- 0, se pelo menos uma das quatro bolas extraídas estiver numerada com o número 0.

- 4, se as quatro bolas extraídas, estiverem numeradas com os números -1, 1, -2 e 2.

Assim, $X = \{-4, 0{,}4\}$ e portanto tem-se:

- $P(X = -4) = \frac{{}^2C_2 \times {}^1C_1 \times {}^1C_1}{{}^5C_2 \times {}^3C_2} = \frac{1}{30}$

- $P(X = 0) = P(\text{pelo menos uma das quatro bolas estar numerada com o número zero}) =$

$$= 1 - P(\text{nenhuma das quatro bolas estar numerada com o número zero}) =$$

$$= 1 - \frac{{}^3C_2 \times {}^2C_2}{{}^5C_2 \times {}^3C_2} = \frac{9}{10}$$

- $P(X = 4) = \frac{{}^1C_1 \times {}^2C_1 \times {}^1C_1 \times {}^1C_1}{{}^5C_2 \times {}^3C_2} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	-4	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$

O valor médio da variável aleatória X é dado por $\mu = -4 \times \frac{1}{30} + 0 \times \frac{9}{10} + 4 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$, ou seja, em cada realização da experiência o "produto médio" (ou "produto esperado") é de $\frac{2}{15}$, portanto em $15\,000$ realizações desta experiência é de esperar que a soma dos produtos obtidos esteja próxima de $\frac{2}{15} \times 15000 = 2000$.

2.2. $P\left(Z \middle| (X \cap \overline{Y})\right)$ designa a probabilidade do produto dos números das quatro bolas retiradas da caixa C ser positivo, sabendo que os números das três bolas retiradas da caixa A têm o mesmo valor absoluto e os números das duas bolas retiradas da caixa B são diferentes. Assim as bolas retiradas da caixa A são as numeradas com os números -1, 1 e 1 (pois $|-1| = |1| = |1| = 1$) e as bolas retiradas da caixa B estão numeradas com os números 0 e 2 (pois são diferentes). Portanto na caixa C ficam oito bolas, uma numerada com o número -2, uma com o -1, duas com o 0, duas com o 1 e duas com o 2. Logo, o número de casos possíveis é ${}^8C_4$ (das oito bolas, retiram-se quatro). Para que o produto dos números seja positivo temos de considerar dois casos: retirar quatro bolas numeradas com números positivos, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_4 = 1$ (retirar as duas bolas numeradas com o número 1 e as duas com o número 2); retirar duas bolas numeradas com números negativos e duas com números positivos, o número de maneiras de o fazer é ${}^{2}C_2 \times {}^{4}C_2 = {}^{4}C_2$ (retirar as duas bolas numeradas com um número negativo e duas bolas entre quatro numeradas com um número positivo). Logo, o número de casos favoráveis é $1 + {}^{4}C_2$. Pela lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que estes sejam equiprováveis. Como qualquer uma bolas tem igual probabilidade de ser escolhida, a lei de Laplace pode ser aplicada a este problema. Portanto, $P\left(Z \middle| \left(X \cap \overline{Y}\right)\right) = \frac{1+{}^{4}C_2}{{}^{8}C_4}$.

3. Tem-se:

$$P(\overline{A} \cup B) - P(A|\overline{B}) \times P(B) = P(\overline{A}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{P(\overline{A})} + P(B) - P(\overline{A} \cap B) - P(A|\overline{B}) \times \left(1 - P(\overline{B})\right) = \cancel{P(\overline{A})} \Leftrightarrow$$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow} \cancel{P(B)} - \cancel{P(B)} + P(A \cap B) - P(A|\overline{B}) + P(A|\overline{B}) \times P(\overline{B}) = 0 \Leftrightarrow$$

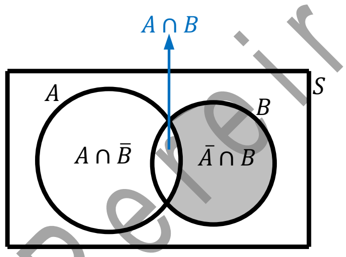
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) - \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} + \frac{P(A \cap \overline{B})}{\cancel{P(\overline{B})}} \times \cancel{P(\overline{B})} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow} \cancel{P(A \cap B)} - \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} + P(A) - \cancel{P(A \cap B)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} \Leftrightarrow P(A) \times P(\overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(\overline{B}) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times \left(1 - P(\overline{B})\right) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow A$ e B são acontecimentos independentes

i)



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

4.

4.1. Tem-se:

- $g'(x) = -e^{4-x^2} + \left(-x \times (-2x)e^{4-x^2}\right) = -e^{4-x^2} + 2x^2 e^{4-x^2} = e^{4-x^2}(2x^2 - 1)$

$$g''(x) = -2xe^{4-x^2}(2x^2 - 1) + e^{4-x^2} \times 4x = e^{4-x^2}(2x - 4x^3) + e^{4-x^2} \times 4x =$$

$$= e^{4-x^2}(2x - 4x^3 + 4x) = e^{4-x^2}(6x - 4x^3) = xe^{4-x^2}(6 - 4x^2)$$

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{4-x^2}(6 - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow xe^{4-x^2} = 0 \quad \vee \quad 6 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad \underbrace{e^{4-x^2} = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \quad \vee \quad x^2 = \frac{6}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -\sqrt{\frac{6}{4}} \quad \vee \quad x = \sqrt{\frac{6}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'', vem:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
i) xe^{4-x^2}	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$6-4x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$	p.i.	$\cap$

i) Observa que o sinal de xe^{4-x^2} depende apenas do sinal de x, pois $e^{4-x^2} > 0, \forall x \in \mathrm{IR}$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e em $\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e tem pontos de inflexão em $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, em $x = 0$ e em $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4.2.

▪ Assimptotas verticais

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(g(x)\ln(-x)\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(-xe^{4-x^2}\ln(-x)\right) = \lim_{x\to 0^-} e^{4-x^2} \times \lim_{x\to 0^-} \left(-x\ln(-x)\right) =$$

$$\underset{i)}{=} e^{4-0^2} \times \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right) = e^4 \times \lim_{y\to+\infty} \frac{-\ln y}{y} = -e^4 \times \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = -e^4 \times 0 = 0$$

i) Mudança de variável: Se $x \to 0^-$ então $-\frac{1}{x} \to +\infty$. Seja $y = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{y}$, $y \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x}{x-\sqrt{4x}} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Logo a recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical do gráfico de f.

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x}{x-\sqrt{4x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(x+\sqrt{4x})}{(x-\sqrt{4x})(x+\sqrt{4x})} = \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(x+\sqrt{4x})}{x^2-\left(\sqrt{4x}\right)^2} = \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(x+\sqrt{4x})}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4} \frac{-\cancel{(x-4)}(x+\sqrt{4x})}{x\cancel{(x-4)}} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-(x+\sqrt{4x})}{x} = \frac{-4-\sqrt{4\times 4}}{4} = \frac{-4-4}{4} = -2$$

Logo a recta de equação $x = 4$ não é assimptota vertical do gráfico de f.

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0,4\}$, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais.

- Assimptotas Horizontais

Quando $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(g(x)\ln(-x)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-xe^{4-x^2}\ln(-x)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-xe^4}{e^{x^2}}\ln(-x)\right) =$$

$$= e^4 \times \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{e^{x^2}}\ln(-x)\right) \underset{ii)}{=} e^4 \times \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{e^{(-y)^2}}\ln y\right) = e^4 \times \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^{y^2}} \times \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y} =$$

$$= e^4 \times 0 \times 0 = 0$$

Se $y \longrightarrow +\infty$ então $y^2 \longrightarrow +\infty$

ii) Mudança de variável: Se $x \to -\infty$ então $-x \to +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, $y \to +\infty$.

Logo a reta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \longrightarrow -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x}{x-\sqrt{4x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{4}{x}-1\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{\sqrt{4x}}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}-1}{1-\sqrt{\frac{4x}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}-1}{1-\sqrt{\frac{4}{x}}} = \frac{\frac{4}{+\infty}-1}{1-\sqrt{\frac{4}{+\infty}}} = \frac{0-1}{1-\sqrt{0}} = 1$$

Nota: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$. Como $x \longrightarrow +\infty$ pode assumir-se que x é positivo, logo $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

Logo a recta de equação $y = 1$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \longrightarrow +\infty$.

5. O gráfico da função $g(x) = mx + b$, com $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1{,}0\}$ e $b \in \mathbb{R}$ é assimptota do gráfico de f. Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx\right) = b$.

Assim, quando $x \longrightarrow -\infty$, uma assimptota do gráfico de h terá declive:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{f(-x)-g\left(\frac{x}{m}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\left(f(-x)-\left(m\times\frac{x}{m}+b\right)\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{f(-x)-x-b} \underset{i)}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{-y}{f(y)+y-b} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{-\cancel{y}}{\cancel{y}\left(\frac{f(y)}{y}+1-\frac{b}{y}\right)} = \lim_{y\to+\infty}\frac{-1}{\frac{f(y)}{y}+1-\frac{b}{y}} = \frac{-1}{m+1-\frac{b}{+\infty}} = -\frac{1}{m+1-0} = -\frac{1}{m+1}$$

$-\frac{1}{m+1} \in \mathbb{R}$, pois $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1{,}0\}$.

E terá ordenada na origem:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x) + \frac{1}{m+1}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{f(-x)-g\left(\frac{x}{m}\right)} + \frac{x}{m+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{f(-x)-x-b} + \frac{x}{m+1}\right) =$$

$$\underset{i)}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{(-y)^2}{f(y)+y-b}-\frac{y}{m+1}\right) = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2(m+1)-y(f(y)+y-b)}{(f(y)+y-b)(m+1)} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2m+\cancel{y^2}-yf(y)-\cancel{y^2}+yb}{(f(y)+y-b)(m+1)} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2m-yf(y)+yb}{(f(y)+y-b)(m+1)} = \lim_{y\to+\infty}\frac{-\cancel{y}(f(y)-my-b)}{\cancel{y}\left(\frac{f(y)}{y}+1-\frac{b}{y}\right)(m+1)} == \frac{-(b-b)}{\left(m+1-\frac{b}{+\infty}\right)(m+1)} = \frac{0}{(m+1)^2} = 0\ (m\neq -1)$$

i) Mudança de variável: Se $x \to -\infty$ então $-x \to +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, $y \to +\infty$.

Logo, o gráfico da função h tem uma assimptota de equação $y = -\frac{x}{m+1}$, quando $x \to -\infty$.

6.

6.1. Tem-se:

▪ $V'(t) = \frac{2}{3} - 2 \times \frac{(t^2+7t+1)'}{t^2+7t+1} = \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2t+7}{t^2+7t+1} = \frac{2}{3} - \frac{4t+14}{t^2+7t+1} = \frac{2t^2+14t+2-12t-42}{3t^2+21t+3} = \frac{2t^2+2t-40}{3t^2+21t+3}$

▪ $V'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2+2t-40}{3t^2+21t+3} = 0 \Leftrightarrow 2t^2+2t-40 = 0 \ \wedge \ \underbrace{3t^2+21t+3 \neq 0}_{\text{Condição universal em } [0,10]} \ \Leftrightarrow t = -5 \ \vee \ t = 4$

Como $t \in [0,10]$ então $t = 4$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função V', vem:

t	0		4		10
i) $V'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$V(t)$	máx.	↘	mín.	↗	máx.

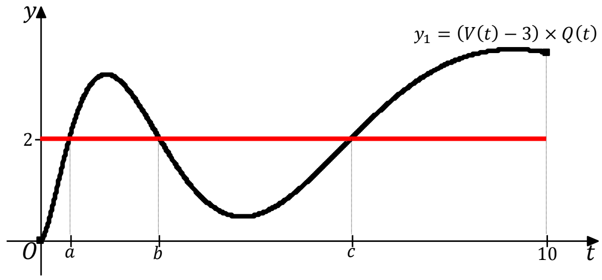
i) Observa que o sinal de V' depende apenas do sinal de $2t^2+2t-40$, pois $3t^2+21t+3 > 0, \forall\, t \in [0,10]$.

A função V tem mínimo em $t = 4$, ou seja, o preço de venda de cada quilograma de cerejas foi mínimo passadas quatro semanas. Esse preço foi de, aproximadamente, $V(4) = \frac{2}{3} \times 4 + 8 - 2\ln(4^2) \approx 3{,}05$ euros.

6.2.

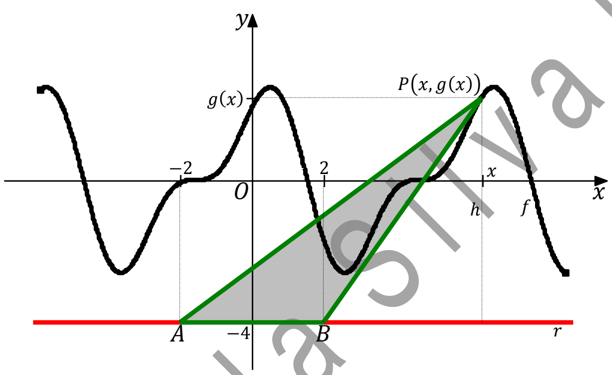
▪ O lucro do hipermercado por cada quilograma de cerejas, em função de t, em semanas, é dado por $V(t) - 3$. Como o hipermercado vende $Q(t)$ milhares de quilogramas de cerejas, então o seu lucro, em milhares de euros, é dado por $(V(t) - 3) \times Q(t)$, com t em semanas.

▪ Pretende-se determinar $t \in [0,10]$ tal que $(V(t) - 3) \times Q(t) > 2$. Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = (V(t) - 3) \times Q(t)$ e $y_2 = 2$ na janela de visualização $[0,10] \times [0,4]$.



Assim, $(V(t) - 2) \times Q(t) > 2 \Leftrightarrow t \in]a, b[\cup]c, 10]$, com $a \approx 0{,}572$, $b \approx 2{,}37$ e $c \approx 6{,}126$. O lucro do hipermercado foi superior a 2000 euros durante $(b - a) + (10 - c) \approx 5{,}672$ semanas, isto é, durante, aproximadamente, 5 semanas e 5 dias $(0{,}672 \times 7 \approx 5)$.

7. Considere-se a figura:



A área do triângulo $[ABP]$ é dada por $\frac{\overline{AB} \times h}{2}$, onde $\overline{AB} = 4$ e $h = g(x) - (-4) = g(x) + 4$. Assim:

$$A_{[ABP]} = \frac{4 \times (g(x) + 4)}{2} = 2 \times (a \operatorname{sen}(2x) + a^2 \cos x + 4) = 2a \operatorname{sen}(2x) + 2a^2 \cos x + 8$$

Pretende-se mostrar que existe pelo menos uma abcissa de P, pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, tal que a área do triângulo $[ABP]$ é igual a $4a + 4$, ou seja, tal que:

$$2a \operatorname{sen}(2x) + 2a^2 \cos x + 8 = 4a + 4 \Leftrightarrow 2a \operatorname{sen}(2x) + 2a^2 \cos x - 4a + 4 = 0, \text{ com } a > 1$$

Seja $f(x) = 2a \operatorname{sen}(2x) + 2a^2 \cos x - 4a + 4$, com $a > 1$. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pois é composição e soma entre funções contínua em $\mathbb{R}$. Logo f é contínua em $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$. Tem-se:

- $f(0) = 2a \operatorname{sen}(0) + 2a^2 \cos(0) - 4a + 4 = 2a \times 0 + 2a^2 \times 1 - 4a + 4 = 2a^2 - 4a + 4 =$

$$= 2(a^2 - 2a) + 4 = 2(\underbrace{a^2 - 2a + 1}_{(a-1)^2} - 1) + 4 = 2(a - 1)^2 - 2 + 4 = 2(a - 1)^2 + 2$$

Como $a > 1$, então $a - 1 > 0 \Leftrightarrow 2(a - 1)^2 > 0$ e portanto $2(a - 1)^2 + 2 > 2 \Leftrightarrow f(0) > 2 \Rightarrow f(0) > 0$

- $f(\pi) = 2a\,\text{sen}(2\pi) + 2a^2\cos(2\pi) - 4a + 4 = 2a \times 0 + 2a^2 \times (-1) - 4a + 4 = -2a^2 - 4a + 4 =$

$$= -2(a^2 + 2a) + 4 = -2(\underbrace{a^2 + 2a + 1}_{(a+1)^2} - 1) + 4 = -2(a+1)^2 + 2 + 4 = -2(a+1)^2 + 6$$

Como $a > 1$, então:

$a + 1 > 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 > 2^2 \Leftrightarrow -2(a+1)^2 < -8 \Leftrightarrow -2(a+1)^2 + 6 < -2 \Leftrightarrow f(\pi) < -2 \Rightarrow f(\pi) < 0$

Assim, como f é contínua em $[0, \pi]$ e $f(0)$ e $f(\pi)$ têm sinais contrários (e portanto $f(0) \times f(\pi) < 0$), então pelo corolário do teorema de Bolzano:

$$\exists c \in \,]0, \pi[: f(c) = 0 \Leftrightarrow 2a\,\text{sen}(2c) + 2a^2\cos c + 8 = 4a + 4$$

ou seja, existe pelo menos uma abcissa de P, pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, tal que a área do triângulo $[ABP]$ é igual a $4a + 4$.