"A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências."
Jacques Hadamard

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considera as treze primeiras letras do alfabeto. Quantas palavras, com ou sem sentido, se podem formar com oito dessas treze letras sabendo que existem exactamente duas letras A e uma letra D e **não** existem mais letras repetidas?

A ${}^{8}A_2 \times 6 \times {}^{11}A_5$ **B** ${}^{8}C_2 \times 6 \times {}^{11}A_5$ **C** ${}^{8}C_2 \times 6 \times {}^{11}C_5$ **D** ${}^{8}C_2 \times 6 \times 5!$

2. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis e **independentes** ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(B) = 0{,}2$ e $P(A|B) = 0{,}7$. Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup B)$?

A 0,26 **B** 0,36 **C** 0,44 **D** 0,84

3. Considera um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas com os números 0, 0, 0, 0, 1 e 1 e um dado tetraédrico equilibrado com as faces numeradas com os números 0, 0, 1 e 2. Considera a experiência aleatória que consiste em lançar, simultaneamente, os dois dados e verificar, em cada um deles, o número saído (no dado cúbico o número saído na face que fica voltada para cima e no dado tetraédrico na face que fica voltada para baixo). Seja X a variável aleatória:

X: «Soma dos números saídos».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X?

A

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

B

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

C

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

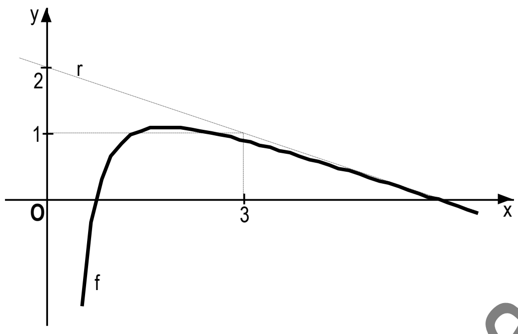
D

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

4. Considera um número real positivo **a** tal que $\log_9(3a) = 2$. Qual é o valor de $\log_3\left(\frac{9a^2}{27}\right)$?

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7

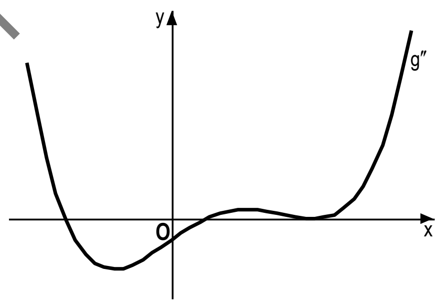
5. Na figura está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$.



A recta **r** é assimptota do gráfico de f. O ponto de coordenadas $(3,1)$ pertence à recta **r** que intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+3f(x)+x\right)$?

A $\frac{5}{3}$ **B** $\frac{7}{3}$ **C** $\frac{17}{3}$ **D** $\frac{19}{3}$

6. Na figura está parte da representação gráfica da função g'', **segunda derivada** de uma função g de domínio IR.



Em qual dos intervalos seguintes o gráfico da função g pode ter concavidade voltada para baixo?

A $]0,+\infty[$ **B** $]1,+\infty[$

C $]-\infty,0[$ **D** $]-2,0[$

7. Considera um número real não nulo **a** e sejam $z_1 = 3a(i-1)$ e $z_2 = a^3 + 2a^2 - ai$ dois números complexos. Qual é o valor de **a** de modo que o número complexo $z_1 + z_2 - 2i$ seja um imaginário puro?

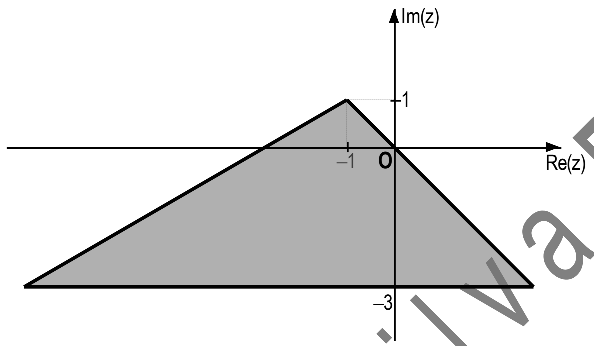
A $a = -3$

B $a = -3 \;\vee\; a = 0$

C $a = -3 \;\vee\; a = 1$

D $a = 2$

8. Considera a figura, representada no plano complexo.



Qual das seguintes condições define, em C, a região sombreada da figura, **incluindo a fronteira**?

A $\frac{7}{6}\pi \le \arg(z+1-i) \le \frac{7}{4}\pi \;\wedge\; \operatorname{Re}(z) \ge -3$

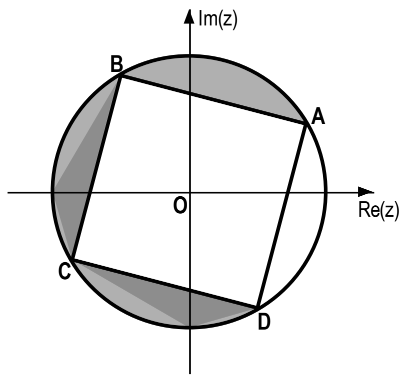
B $\frac{7}{6}\pi \le \arg(z-1+i) \le \frac{7}{4}\pi \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) \ge -3$

C $\pi \le \arg(z+1-i) \le \frac{7}{4}\pi \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) \ge -3$

D $\frac{7}{6}\pi \le \arg(z+1-i) \le \frac{7}{4}\pi \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) \ge -3$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Na figura está representado, no plano complexo, um quadrado $[ABCD]$ inscrito numa circunferência centrada na origem.



1.1 Sabe-se que A, B, C e D são as imagens geométricas das raízes quartas do número complexo $z=-8+8\sqrt{3}i$.

Determina, na forma trigonométrica, os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos A, B, C e D. Determina a área da região sombreada da figura.

1.2 Considera agora que A e B são as imagens geométricas dos números complexos z_1 e z_2, respectivamente, e que o argumento de z_1 é $\frac{2}{9}\pi$. Seja $w=\text{cis}\alpha$. Determina $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ de modo que a imagem geométrica de $\left(w\times z_2\right)^3$ pertença à bissectriz do segundo quadrante.

2. Numa escola do distrito de Santarém foi realizado um estudo com todos os alunos do 12.º Ano. Nesse estudo pretendia-se aferir as preferências relativamente aos cursos superiores que os alunos pretendiam ingressar.

2.1 No estudo cerca de 30% dos participantes eram rapazes e concluiu-se que:

– Entre os rapazes, dois terços preferiam cursos relacionados com a ciência;

– Entre as raparigas, 50% preferiam cursos relacionados com as letras.

2.1.1 Escolhe-se, ao acaso, um aluno que prefere um curso relacionado com a ciência. Qual é a probabilidade de ser uma rapariga? (Apresenta o resultado na forma de fracção irredutível)

2.1.2 Considera agora que participaram no estudo 200 alunos. Pretende-se escolher seis alunos para uma comissão que vai organizar uma visita de estudo ao Museu da Faculdade de Ciências. A Sónia, presidente da associação de estudantes faz parte dessa comissão. Qual é a probabilidade dessa comissão ter alunos dos dois sexos, mas mais rapazes que raparigas? Uma das respostas possíveis a este problema é:

$$\frac{139\times {}^{60}C_4 + {}^{60}C_5}{{}^{200}C_6}$$

Numa pequena composição, explica porquê. A composição deve incluir:

– Uma referência à Regra de Laplace;

– Uma explicação do número de casos possíveis;

– Uma explicação do número de casos favoráveis.

2.2 Num outro estudo, com os mesmos alunos, verificou-se que a variável aleatória X: «Peso das raparigas que participaram no estudo» tem uma distribuição aproximadamente normal de valor médio 55 kg. Sabendo que cerca de 45% têm entre 55 kg e 65 kg, quantas raparigas têm peso inferior a 45 kg ou superior a 65 kg?

3. Uma caixa está dividida em **n** (n par) compartimentos numerados de 1 a n. Pretende-se colocar duas bolas distintas nessa caixa, em compartimentos distintos. Sabe-se que $\frac{6}{11}$ é a probabilidade de uma bola ficar num compartimento numerado com um número par e a outra num compartimento numerado com um número ímpar. Mostra que $n = 12$.

4. Considera a função g, definida em IR por $g(x) = \cos(2x) - 2\operatorname{sen}x$ e seja **r** a recta de equação $y = -\frac{1}{2}$.

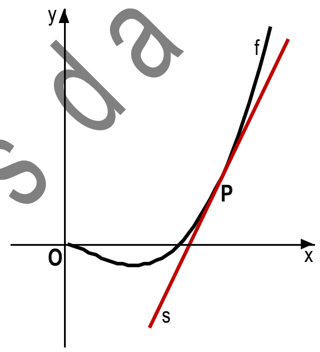
Mostra, **utilizando** o Teorema de Bolzano, que o gráfico da função g e a recta **r** se intersectam em pelo menos um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right[$. Em seguida, **utilizando métodos exclusivamente analíticos**, verifica que esse ponto é único e indica as suas coordenadas.

5. Considera a função f, de domínio IR^+, definida por $f(x) = x^2 \ln x$.

5.1 Estuda a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, determinando-os.

5.2 Mostra que o gráfico da função f não tem assimptotas.

5.3 Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e uma recta **s**, tangente ao gráfico de f no ponto P.



Recorrendo à calculadora gráfica determina a abcissa do ponto P de modo que a recta **s** seja perpendicular à recta de equação $y = -\frac{1}{2}x$. (Apresenta o resultado arredondado às centésimas)

6. Em 1986, com a explosão do reactor nuclear de Chernobyl, na Ucrânia, um dos isótopos radioactivos libertado foi o Césio – 137 (Cs137). A massa **m**, em gramas, de Cs137 desintegra-se segundo a lei:

$$m(t) = a \times e^{b \times t}, \quad t \geq 0$$

Onde t é o tempo em **décadas** desde o instante inicial e **a** e **b** são constantes reais. A constante **b** depende do isótopo e a constante real **a** é a massa do isótopo libertada no instante inicial.

6.1 Passados 10 anos a massa de Cs137 presente no local era de 397,46 g e em 2001 a massa de Cs137 presente no local era de 354,38 g. Determina o valor da constante real **b** e determina a massa de Cs137 libertada na altura a explosão do reactor nuclear. (No caso de fazeres arredondamentos intermédios utiliza no mínimo quatro casas decimais. Apresenta o valor da massa de Cs 137 libertada na altura da explosão arredondado às unidades e o valor de **b** arredondado às milésimas)

6.2 Considera agora que $b = -0,229$. Determina o valor de **x** de modo que $m(x+t) = 0,3 \times m(t)$. Interpreta o resultado no contexto do problema. (Apresenta o resultado arredondado às décimas)

Resolução da Prova Modelo n.º 14

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Consideremos o seguinte esquema: Se as duas letras A ficassem nas duas primeiras posições e a letra D na terceira posição temos:

$$\underset{1}{\underline{\mathbf{A}}}\quad \underset{1}{\underline{\mathbf{A}}}\quad \underset{1}{\underline{\mathbf{D}}}\quad \underbrace{\underset{11}{\underline{\quad}}\ \underset{10}{\underline{\quad}}\ \underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{7}{\underline{\quad}}}_{11\times10\times9\times8\times7={}^{11}A_5}$$

As duas letras A podem ocupar as oito posições de ${}^{8}C_2$ maneiras distintas. Entre as restantes seis posições disponíveis escolhemos uma para a letra D, o número de maneiras de o fazer é ${}^{6}C_1=6$. Por fim escolhemos, ordenadamente, cinco letras entre as restantes onze para ocuparem as posições que restam, o número de maneiras de é fazer é dado por ${}^{11}A_5$. Logo o número total de palavras nas condições pedidas é dado por ${}^{8}C_2\times6\times{}^{11}A_5$ e a resposta correcta é a **B**.

2.

i) Como os acontecimentos A e B são independentes então $P(A|B)=P(A)$ (Também se tem $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$). Assim como $P(A|B)=0{,}7$ então $P(A)=0{,}7$.

ii) $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=$

$$\underset{i)}{=}P(\overline{A})+P(B)-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)=$$

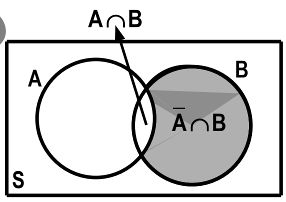
$$=1-P(A)+\cancel{P(B)}-\cancel{P(B)}+P(A)\times P(B)=$$

$$=1-0{,}7+0{,}7\times0{,}2=0{,}3+0{,}14=0{,}44$$

A resposta correcta é a **C**.

Justificações:

i)



$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$$

Nota 1: Esta questão poderia ser resolvida de outra maneira, usando a seguinte propriedade:

Se os acontecimentos A e B são independentes então os acontecimentos $\overline{A}$ e B também são independentes.

Demonstração: Como os acontecimentos A e B são independentes então $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. Assim:

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)\times P(B)=$$

$$=P(B)\times(1-P(A))=P(\overline{A})\times P(B)$$

Então os acontecimentos $\overline{A}$ e B também são independentes.

Usando então esta propriedade vem:

$$P(\overline{A}\cup B)=\underbrace{P(\overline{A})}_{0,3}+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=0{,}3+0{,}2-P(\overline{A})\times P(B)=$$

$$=0{,}5-0{,}3\times0{,}2=0{,}5-0{,}06=0{,}44$$

Nota 2: Demonstra-se, utilizando um processo semelhante, que se os acontecimentos A e B forem independentes então os acontecimentos $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são independentes.

3. Vamos começar por fazer uma tabela de dupla entrada para ajudar na resolução desta questão. Assim temos:

+	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	2	2
2	2	2	2	2	3	3

Com a ajuda da tabela concluímos que a variável aleatória X toma os valores 0, 1, 2 e 3, ou seja, $X=\{0,1,2,3\}$. E que as respectivas probabilidades são:

$$P(X=0)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=2)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

A resposta correcta é a **A**.

4. Tem-se $\log_9(3a)=2 \Leftrightarrow 3a=9^2 \Leftrightarrow a=\frac{81}{3} \Leftrightarrow a=27$. Então:

$$\log_3\left(\frac{9a^2}{27}\right)=\log_3\left(\frac{9\times 27^{\cancel{2}}}{\cancel{27}}\right)=\log_3(9\times 27)=\log_3 9+\log_3 27=$$

$$=\log_3 3^2+\log_3 3^3=2+3=5$$

A resposta correcta é a **B**.

5.

i) Como os pontos de coordenadas $A(3,1)$ e $B(0,2)$ pertencem à recta **r** então $\overrightarrow{AB}$ é um vector director da recta **r**. Assim:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(3,1)-(0,2)=(3,-1)$$

Logo o declive da **r** é $-\frac{1}{3}$ e como o ponto de coordenadas $(0,2)$ pertence à recta **r** então a sua equação reduzida é $y=-\frac{1}{3}x+2$.

ii) Como a recta de equação $y=-\frac{1}{3}x+2$ é assimptota do gráfico de f, quando $x\to+\infty$, então:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{3}x+2\right)\right)=0 \text{ e } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{3}x\right)=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{3} \text{ e } \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}x+2\right)=-\infty\end{cases}$$

Logo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+3f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}(3f(x)+x)=$

$$=-\frac{1}{3}+3\times\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{3}x\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}+3\times 2=-\frac{1}{3}+6=\frac{17}{3}$$

A resposta correcta é a **C**.

6. Sejam **a**, **b** e **c** os zeros da função g'' , com $a<b<c$. Fazendo um quadro de sinal vem:

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$		$\cup$

O gráfico da função g tem concavidade voltada para baixo em $[a,b]$. De todos os intervalos apresentados o único que pode estar contigo em $[a,b]$ é o intervalo $]-2,0[$ e portanto a resposta correcta é a **D**.

7. O número complexo z_1+z_2-2i é um imaginário puro se e só se $\operatorname{Re}(z_1+z_2-2i)=0 \;\wedge\; \operatorname{Im}(z_1+z_2-2i)\neq 0$. Assim:

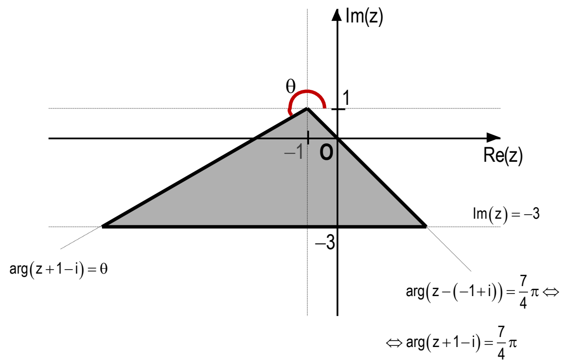
$$z_1+z_2-2i=3a(i-1)+a^3+2a^2-ai-2i=$$
$$=3ai-3a+a^3+2a^2-ai-2i=$$
$$=a^3+2a^2-3a+i(3a-a-2)=$$
$$=a^3+2a^2-3a+i(2a-2)$$

Então $\operatorname{Re}(z_1+z_2-2i)=a^3+2a^2-3a$ e $\operatorname{Im}(z_1+z_2-2i)=2a-2$. Assim:

$$a^3+2a^2-3a=0 \;\wedge\; 2a-2\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\times(a^2+2a-3)=0 \;\wedge\; a\neq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a=0 \;\vee\; a^2+2a-3=0) \;\wedge\; a\neq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a=0 \;\vee\; a=-3 \;\vee\; a=1) \;\wedge\; a\neq 1$$

Como $a\neq 0$ e $a\neq 1$ então $a=-3$. A resposta correcta é a **A**.

8. Consideremos a seguinte figura:



As semi-rectas têm origem na imagem geométrica do número complexo $-1+i$. Como $\theta \in \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$ então, tendo em conta as opções de resposta, $\theta = \frac{7}{6}\pi$. Logo a condição em C que define triângulo é:

$$\frac{7}{6}\pi \le \arg(z+1-i) \le \frac{7}{4}\pi \quad \wedge \quad \operatorname{Im}(z) \ge -3$$

A resposta correcta é a **D**.

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.

1.1

i) Vamos começar por escrever o número complexo z na forma trigonométrica, tem-se:

$|z| = \sqrt{(-8)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64 + 64\times 3} = \sqrt{256} = 16$. Seja θ um argumento do número complexo z, assim $\operatorname{tg}\theta = \frac{8\sqrt{3}}{-8} = -\sqrt{3}$.

Como $\theta \in 2.^{\text{o}}\text{Q}$ então $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Logo $z = 16\operatorname{cis}\frac{2}{3}\pi$.

Utilizando a fórmula da radiciação vamos determinar as raízes quartas do número complexo z. Assim:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16\operatorname{cis}\frac{2}{3}\pi} = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$ ou seja, $2\operatorname{cis}\frac{2\pi + 6k\pi}{12}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Para $k = 0 \rightarrow 2\operatorname{cis}\frac{2\pi+0}{12} = 2\operatorname{cis}\frac{2}{12}\pi = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$

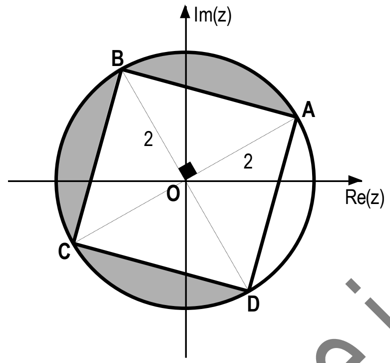
Para $k = 1 \rightarrow 2\operatorname{cis}\frac{2\pi+6\pi}{12} = 2\operatorname{cis}\frac{8}{12}\pi = 2\operatorname{cis}\frac{2}{3}\pi$

Para $k = 2 \rightarrow 2\operatorname{cis}\frac{2\pi+12\pi}{4} = 2\operatorname{cis}\frac{14}{12}\pi = 2\operatorname{cis}\frac{7}{6}\pi$

Para $k = 3 \rightarrow 2\operatorname{cis}\frac{2\pi+18\pi}{4} = 2\operatorname{cis}\frac{20}{12}\pi = 2\operatorname{cis}\frac{5}{3}\pi$

Portanto os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos A, B, C e D são, respectivamente, $2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$, $2\operatorname{cis}\frac{2}{3}\pi$, $2\operatorname{cis}\frac{7}{6}\pi$ e $2\operatorname{cis}\frac{5}{3}\pi$.

ii) Consideremos a seguinte figura:



A área da região sombreada da figura é dada por:

$$A_{\text{sombreada}} = \frac{3}{4}\times\left(A_{\text{círculo}} - A_{[ABDC]}\right) = \frac{3}{4}\times\left(\pi\times 2^2 - \overline{AB}^2\right) =$$
$$= \frac{3}{4}\times(4\pi - 8) = \frac{3}{\cancel{4}}\times\cancel{4}\pi - \frac{3}{4}\times 8 = 3\pi - 6$$

Cálculo Auxiliar: Pelo Teorema de Pitágoras tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 8$$

1.2

i) O número complexo z_1 é da forma $z_1 = \rho\operatorname{cis}\frac{2}{9}\pi$, portanto o número complexo z_2 é da forma $z_2 = \rho\operatorname{cis}\left(\frac{2}{9}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \rho\operatorname{cis}\frac{13}{18}\pi$.

ii) A imagem geométrica do número complexo $(w\times z_2)^3$ pertence à bissectriz do segundo quadrante real se e só se $\arg\left((w\times z_2)^3\right) = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in Z$. Assim:

$$(w\times z_2)^3 = \left(\operatorname{cis}\alpha \times \rho\operatorname{cis}\frac{13}{18}\pi\right)^3 = \left(\rho\operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{13}{18}\pi\right)\right)^3 =$$
$$= \rho^3\operatorname{cis}\left(3\times\left(\alpha + \frac{13}{18}\pi\right)\right) = \rho^3\operatorname{cis}\left(3\alpha + \frac{39}{18}\pi\right) =$$
$$= \rho^3\operatorname{cis}\left(3\alpha + \frac{13}{6}\pi\right) = \rho^3\operatorname{cis}\left(3\alpha + \frac{13}{6}\pi - 2\pi\right) =$$
$$= \rho^3\operatorname{cis}\left(3\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

Logo $\quad 3\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in Z \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha=\frac{7}{12}\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{7}{36}\pi+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0\rightarrow\alpha=\frac{7}{36}\pi\notin\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

Para $k=1\rightarrow\alpha=\frac{11}{36}\pi\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

Portanto $\alpha=\frac{31}{36}\pi$.

2.

2.1

2.1.1 Consideremos os acontecimentos M/F: «O aluno escolhido é do sexo Masculino/Feminino» e C/L: «O aluno escolhido prefere um curso relacionado com Ciências/Letras». Queremos determinar $P(F|C)$. Vamos construir uma tabela para responder a esta questão. Do enunciado tem-se $P(M)=0,3=\frac{3}{10}$, $P(C|M)=\frac{2}{3}$ e $P(L|F)=0,5=\frac{1}{2}$. Assim:

	M	F	**p.m.**
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{11}{20}$
L	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$
p.m.	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

Logo $P(F|C)=\frac{P(F\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{7}{\cancel{20}}}{\frac{11}{\cancel{20}}}=\frac{7}{11}$.

Justificações:

i) $P(C|M)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow P(C\cap M)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{5}$

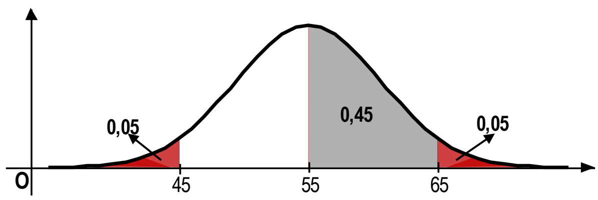
ii) $P(L|F)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{P(L\cap F)}{P(F)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(L\cap F)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{20}$

iii) $P(L\cap M)=\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

iv) $P(C\cap F)=\frac{7}{10}-\frac{7}{20}=\frac{7}{20}$

2.1.2 Como 30% dos participantes no estudo eram rapazes e como $0,3\times 200=60$ então participaram no estudo 60 rapazes e 140 raparigas. O número de casos possíveis é dado por ${}^{200}C_6$ (dos 200 alunos que participaram no estudo escolhemos seis). Para determinarmos o número de casos favoráveis temos de considerar dois casos: A comissão é formada por quatro rapazes e duas raparigas, o número de comissões que é possível formar nestas condições é ${}^{139}C_1\times{}^{60}C_4=139\times{}^{60}C_4$ (como a Sónia tem de fazer parte da comissão então das restantes 139 raparigas escolhemos uma e dos 60 rapazes escolhemos quatro); A comissão é formada por cinco rapazes e uma rapariga, o número de comissões que é possível formar nestas condições é ${}^{60}C_5$ (como a Sónia tem de fazer parte da comissão temos apenas de escolher cinco rapazes entre os 60). Logo o número de casos favoráveis é $139\times{}^{60}C_4+{}^{60}C_5$. Pela Regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis. Assim a probabilidade pedida é dada por $\frac{139\times{}^{60}C_4+{}^{60}C_5}{{}^{200}C_6}$.

2.2 Comecemos esquematizar a situação, representando a Curva de Gauss associada à variável aleatória X:



Como $P(X<45)=P(X>65)=0,5-0,45=0,05$ e como $P(55<X<65)=45\%=0,45$ então:

$$P(X<45\ \vee\ X>65)=P(X<45)+P(X>65)=$$
$$=0,05+0,05=0,10$$

Logo o número de raparigas que têm peso inferior a 45kg e superior a 65 kg é dado por $0,10\times 140=14$.

3. O número de casos possíveis é dado por ${}^{n}A_2=n\times(n-1)$ (Para a primeira bola que vamos colocar temos **n** compartimentos à escolha e para a segunda bola temos $\mathbf{n-1}$ compartimentos à escolha). Como o número de compartimentos é par então existem

$\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$ compartimentos numerados com um número para e $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$ compartimentos numerados com um número ímpar. Para determinar o número de casos favoráveis começamos por escolher uma das bolas (visto que são distintas) para colocar num dos compartimentos numerados com um número par, essa escolha pode ser feita de ${}^{2}C_1 = 2$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras existem $\frac{n}{2}$ formas distintas de colocar a bola escolhida num dos compartimentos numerados com um número para e $\frac{n}{2}$ formas distintas de colocar a outra bola num dos compartimentos numerados com um número ímpar. Portanto o número de casos favoráveis é $\cancel{2}\times\frac{n}{\cancel{2}}\times\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$. Assim tem-se:

$$\frac{\frac{n^2}{2}}{n\times(n-1)}=\frac{6}{11}\Leftrightarrow\frac{n^{\cancel{2}}}{2\cancel{n}\times(n-1)}=\frac{6}{11}\Leftrightarrow\frac{n}{2n-2}=\frac{6}{11}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11n=6\times(2n-2)\Leftrightarrow 11n=12n-12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n=-12\Leftrightarrow n=12$$

4. O gráfico da função g e a recta **r** intersectam-se em pelo menos um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ se a equação $g(x)=-\frac{1}{2}$ for possível nesse intervalo, para o provarmos vamos utilizar o Teorema de Bolzano. Para mostrarmos que esse ponto é único temos de verificar que a equação $g(x)=-\frac{1}{2}$ tem uma única solução em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$.

i) A função g é contínua em IR pois é diferença de duas funções contínuas em IR ($y=\cos(2x)$ é continua em IR porque é a composta entre a função $y=\cos x$, trigonométrica, continua em IR, e a função $y=2x$, polinomial, contínua em IR e $y=2\text{sen}x$ é função trigonométrica contínua em IR) Logo g é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]\subset IR$.

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)-2\text{sen}\frac{\pi}{2}=\cos\pi-2\times1=-1-2=-3$$

$$g\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left(2\times\frac{3}{2}\pi\right)-2\text{sen}\frac{3}{2}\pi=\cos(3\pi)-2\times(-1)=$$

$$=-1+2=1$$

Como g é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ e como $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<-\frac{1}{2}<g\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ então pelo Teorema de Bolzano $\exists x_0\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right[: g(x_0)=-\frac{1}{2}$, ou seja, o gráfico de g e a recta **r** intersectam-se em pelo menos um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$.

ii) $g(x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos(2x)-2\text{sen}x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\cos^2x-\text{sen}^2x-2\text{sen}x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\text{sen}^2x-\text{sen}^2x-2\text{sen}x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\text{sen}^2x-2\text{sen}x+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow$$

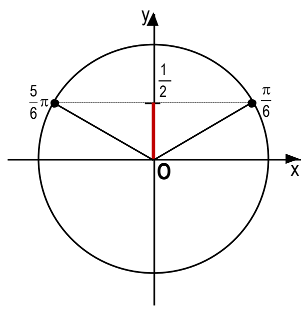
$$\Leftrightarrow -4\text{sen}^2x-4\text{sen}x+3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times(-4)\times3}}{2\times(-4)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}x=-\frac{3}{2}}_{\text{Eq. impossível}}\ \vee\ \text{sen}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \vee\ x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\quad k\in Z$$

Figura Auxiliar:



Para $k=0\rightarrow x=\cancel{\frac{\pi}{6}}\ \vee\ x=\frac{5}{6}\pi$

Para $k=1\rightarrow x=\cancel{\frac{13}{6}\pi}\ \vee\ x=\cancel{\frac{17}{6}\pi}$

Para $k=-1\rightarrow$ ——— $\vee\ x=\cancel{-\frac{7}{6}\pi}$

Então $\frac{5}{6}\pi$ é a única solução da equação no intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ e portanto o gráfico da função g e a recta **r** intersectam-se num único ponto cuja abcissa pertence a esse intervalo. As coordenadas desse ponto são $\left(\frac{5}{6}\pi,-\frac{1}{2}\right)$.

5.

5.1 Vamos começar por determinar a expressão analítica de f' e determinar os seus zeros.

i) $f'(x)=\left(x^2\ln x\right)'=2x\ln x+x^{\cancel{2}}\times\frac{1}{\cancel{x}}=2x\ln x-x=x(2\ln x+1)$

ii) $f'(x)=0\Leftrightarrow x(2\ln x+1)=0\Leftrightarrow x=0 \quad\vee\quad 2\ln x+1=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad\vee\quad \ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=0 \quad\vee\quad x=e^{-\frac{1}{2}}\right)\quad\wedge\quad x\in IR^+\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Fazendo um quadro de sinal vem:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
x	n.d.	$+$	0	$+$
$2\ln x-1$	n.d.	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	Min.	$\nearrow$

Assim concluímos que a função f é decrescente em $\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right[$. A função f tem mínimo absoluto para $x=1$ que é:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\times\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{e}\times\ln e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2e}.$$

5.2 O domínio da função f é IR^+. Assim:

i) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)\overset{(0\times\infty)}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2\underbrace{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}_{=-\ln y}\right)=-\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y^2}=$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=-\frac{1}{+\infty}\times0=0\times0=0$$

Mudança de Variável: Se $x\to0^+$ então $\underset{y}{\frac{1}{x}}\to+\infty$. Seja $y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$. Se $x\to0^+$ então $y\to+\infty$.

Logo a recta de equação $x=0$ não é assimptota vertical do gráfico de f. Como a função f é contínua em IR^+ então o gráfico de f não assimptotas verticais.

ii) Quando $x\to+\infty$ tem-se:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\ln x}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty\times\underbrace{\ln(+\infty)}_{+\infty}=+\infty$$

Logo o gráfico da função f não tem assimptotas não verticais.

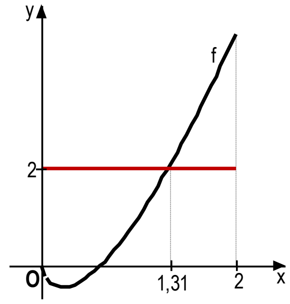
Concluímos então que o gráfico da função f não tem qualquer tipo de assimptotas (nem verticais nem não verticais)

5.3

i) Seja x a abcissa do ponto P. Como a recta **s** é tangente ao gráfico de f no ponto P então $f'(x)=m_s$. A recta **s** é perpendicular à recta de equação $y=-\frac{1}{2}x$, portanto o declive da recta **s** é dado por $m_s=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow m_s=2$. Queremos então determinar o valor de x para o qual $f'(x)=2$.

Nota: Duas rectas **r** e **t**, do plano, são perpendiculares se e só se $m_r=-\frac{1}{m_t}$.

ii) Utilizando o editor de funções da calculadora vamos definir as funções $y_1=f'(x)=x(2\ln x+1)$ e $y_2=2$ na janela $[0,2]\times[-1,5]$ Obtemos:



Logo a abcissa do ponto P é, aproximadamente, 1,31 ($x\approx1,31$).

6.

6.1 Como passados dez anos, ou seja, uma década, a massa de CS137 presente no local era de 397,46 g e como em 2001, ou seja, passados 15 anos (uma década e meia) a massa de Cs 137 presente no local era de 354,38 g então $m(1)=397,46$ e $m(1,5)=354,38$. Assim tem-se:

$$\begin{cases} m(1)=397,46 \\ m(1,5)=354,38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times e^{b\times 1}=397,46 \\ a\times e^{b\times 1,5}=354,38 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{397,46}{e^{b}} \\ \dfrac{397,46}{e^{b}}\times e^{1,5b}=354,38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \dfrac{e^{1,5b}}{e^{b}}=\dfrac{354,38}{397,46} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ e^{0,5b}=0,8916 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 0,5b=\ln(0,8916) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{397,46}{e^{-0,229}} \\ b=\dfrac{\ln(0,8916)}{0,5}\approx -0,229 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\approx 500 \\ b\approx -0,229 \end{cases}$$

Logo, na altura da explosão, a massa de Cs 137 libertada foi de 500 gramas

6.2 Tem-se:

$$m(x+t)=0,3\times m(t) \Leftrightarrow \cancel{a}\times e^{-0,229\times(x+t)}=0,3\times \cancel{a}\times e^{-0,229t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,229x-0,229t}=0,3\times e^{-0,229t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-0,229x-0,229t}}{e^{-0,229t}}=0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,229x\cancel{-0,229t}\cancel{+0,229t}}=0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,229x}=0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,229x=\ln(0,3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln(0,3)}{-0,229}\approx 5,3$$

A concentração de Cs137 reduz-se 70% a cada 5,3 décadas, ou seja, a cada 53 anos, aproximadamente.