Resolução da Prova Modelo n.º 14

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Consideremos o seguinte esquema: Se as duas letras A ficassem nas duas primeiras posições e a letra D na terceira posição temos:

$$\underset{1}{\underline{\textbf{A}}}\quad \underset{1}{\underline{\textbf{A}}}\quad \underset{1}{\underline{\textbf{D}}}\quad \underbrace{\underset{11}{\underline{\quad}}\ \underset{10}{\underline{\quad}}\ \underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{7}{\underline{\quad}}}_{11\times10\times9\times8\times7={}^{11}A_5}$$

As duas letras A podem ocupar as oito posições de ${}^{8}C_2$ maneiras distintas. Entre as restantes seis posições disponíveis escolhemos uma para a letra D, o número de maneiras de o fazer é ${}^{6}C_1=6$. Por fim escolhemos, ordenadamente, cinco letras entre as restantes onze para ocuparem as posições que restam, o número de maneiras de é fazer é dado por ${}^{11}A_5$. Logo o número total de palavras nas condições pedidas é dado por ${}^{8}C_2\times6\times{}^{11}A_5$ e a resposta correcta é a **B**.

2.

i) Como os acontecimentos A e B são independentes então $P(A|B)=P(A)$ (Também se tem $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$). Assim como $P(A|B)=0{,}7$ então $P(A)=0{,}7$.

ii) $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=$

$$\underset{\text{i)}}{=}P(\overline{A})+P(B)-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)=$$

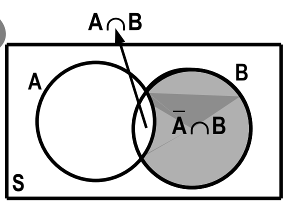
$$=1-P(A)+\cancel{P(B)}-\cancel{P(B)}+P(A)\times P(B)=$$

$$=1-0{,}7+0{,}7\times0{,}2=0{,}3+0{,}14=0{,}44$$

A resposta correcta é a **C**.

Justificações:

i)



$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$$

Nota 1: Esta questão poderia ser resolvida de outra maneira, usando a seguinte propriedade:

Se os acontecimentos A e B são independentes então os acontecimentos $\overline{A}$ e B também são independentes.

Demonstração: Como os acontecimentos A e B são independentes então $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. Assim:

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)\times P(B)=$$

$$=P(B)\times(1-P(A))=P(\overline{A})\times P(B)$$

Então os acontecimentos $\overline{A}$ e B também são independentes.

Usando então esta propriedade vem:

$$P(\overline{A}\cup B)=\underbrace{P(\overline{A})}_{0{,}3}+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=0{,}3+0{,}2-P(\overline{A})\times P(B)=$$

$$=0{,}5-0{,}3\times0{,}2=0{,}5-0{,}06=0{,}44$$

Nota 2: Demonstra-se, utilizando um processo semelhante, que se os acontecimentos A e B forem independentes então os acontecimentos $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são independentes.

3. Vamos começar por fazer uma tabela de dupla entrada para ajudar na resolução desta questão. Assim temos:

+	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	2	2
2	2	2	2	2	3	3

Com a ajuda da tabela concluímos que a variável aleatória X toma os valores 0, 1, 2 e 3, ou seja, $X=\{0,1,2,3\}$. E que as respectivas probabilidades são:

$$P(X=0)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=2)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

A resposta correcta é a **A**.

4. Tem-se $\log_9(3a)=2 \Leftrightarrow 3a=9^2 \Leftrightarrow a=\frac{81}{3} \Leftrightarrow a=27$. Então:

$$\log_3\left(\frac{9a^2}{27}\right)=\log_3\left(\frac{9\times 27^{\cancel{2}}}{\cancel{27}}\right)=\log_3(9\times 27)=\log_3 9+\log_3 27=$$

$$=\log_3 3^2+\log_3 3^3=2+3=5$$

A resposta correcta é a **B**.

5.

i) Como os pontos de coordenadas $A(3,1)$ e $B(0,2)$ pertencem à recta **r** então $\overrightarrow{AB}$ é um vector director da recta **r**. Assim:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(3,1)-(0,2)=(3,-1)$$

Logo o declive da **r** é $-\frac{1}{3}$ e como o ponto de coordenadas $(0,2)$ pertence à recta **r** então a sua equação reduzida é $y=-\frac{1}{3}x+2$.

ii) Como a recta de equação $y=-\frac{1}{3}x+2$ é assimptota do gráfico de f, quando $x\to+\infty$, então:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{3}x+2\right)\right)=0 \text{ e } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{3}x\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{3} \text{ e } \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}x+2\right)=-\infty \end{cases}$$

Logo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+3f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}(3f(x)+x)=$

$$=-\frac{1}{3}+3\times\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{3}x\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}+3\times 2=-\frac{1}{3}+6=\frac{17}{3}$$

A resposta correcta é a **C**.

6. Sejam **a**, **b** e **c** os zeros da função g'', com $a<b<c$. Fazendo um quadro de sinal vem:

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$		$\cup$

O gráfico da função g tem concavidade voltada para baixo em $[a,b]$. De todos os intervalos apresentados o único que pode estar contigo em $[a,b]$ é o intervalo $]-2,0[$ e portanto a resposta correcta é a **D**.

7. O número complexo z_1+z_2-2i é um imaginário puro se e só se $\text{Re}(z_1+z_2-2i)=0 \;\wedge\; \text{Im}(z_1+z_2-2i)\neq 0$. Assim:

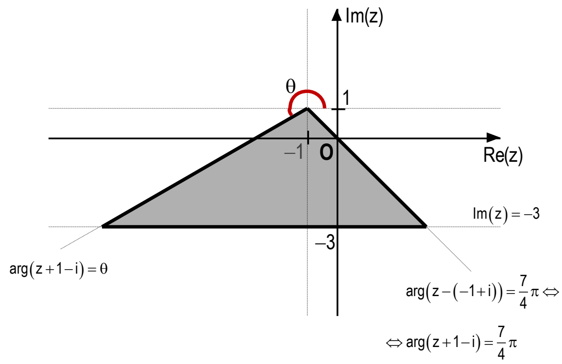
$$z_1+z_2-2i=3a(i-1)+a^3+2a^2-ai-2i=$$
$$=3ai-3a+a^3+2a^2-ai-2i=$$
$$=a^3+2a^2-3a+i(3a-a-2)=$$
$$=a^3+2a^2-3a+i(2a-2)$$

Então $\text{Re}(z_1+z_2-2i)=a^3+2a^2-3a$ e $\text{Im}(z_1+z_2-2i)=2a-2$. Assim:

$$a^3+2a^2-3a=0 \;\wedge\; 2a-2\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\times(a^2+2a-3)=0 \;\wedge\; a\neq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a=0 \;\vee\; a^2+2a-3=0) \;\wedge\; a\neq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a=0 \;\vee\; a=-3 \;\vee\; a=1) \;\wedge\; a\neq 1$$

Como $a\neq 0$ e $a\neq 1$ então $a=-3$. A resposta correcta é a **A**.

8. Consideremos a seguinte figura:



As semi-rectas têm origem na imagem geométrica do número complexo $-1+i$. Como $\theta \in \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$ então, tendo em conta as opções de resposta, $\theta = \frac{7}{6}\pi$. Logo a condição em C que define triângulo é:

$$\frac{7}{6}\pi \le \arg(z+1-i) \le \frac{7}{4}\pi \quad \wedge \quad \operatorname{Im}(z) \ge -3$$

A resposta correcta é a **D**.

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.

1.1

i) Vamos começar por escrever o número complexo z na forma trigonométrica, tem-se:

$|z| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 64\times 3} = \sqrt{256} = 16$. Seja θ um argumento do número complexo z, assim $\operatorname{tg}\theta = \frac{8\sqrt{3}}{-8} = -\sqrt{3}$.

Como $\theta \in 2.\text{º}Q$ então $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Logo $z = 16\operatorname{cis}\frac{2}{3}\pi$.

Utilizando a fórmula da radiciação vamos determinar as raízes quartas do número complexo z. Assim:

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16\operatorname{cis}\frac{2}{3}\pi} = \sqrt[4]{16}\operatorname{cis}\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$, ou seja, $2\operatorname{cis}\frac{2\pi + 6k\pi}{12}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Para $k = 0 \rightarrow 2\operatorname{cis}\frac{2\pi + 0}{12} = 2\operatorname{cis}\frac{2}{12}\pi = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$

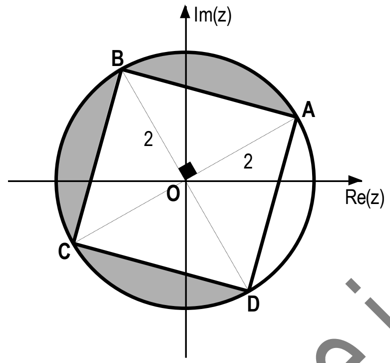
Para $k = 1 \rightarrow 2\operatorname{cis}\frac{2\pi + 6\pi}{12} = 2\operatorname{cis}\frac{8}{12}\pi = 2\operatorname{cis}\frac{2}{3}\pi$

Para $k = 2 \rightarrow 2\operatorname{cis}\frac{2\pi + 12\pi}{4} = 2\operatorname{cis}\frac{14}{12}\pi = 2\operatorname{cis}\frac{7}{6}\pi$

Para $k = 3 \rightarrow 2\operatorname{cis}\frac{2\pi + 18\pi}{4} = 2\operatorname{cis}\frac{20}{12}\pi = 2\operatorname{cis}\frac{5}{3}\pi$

Portanto os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos A, B, C e D são, respectivamente, $2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$, $2\operatorname{cis}\frac{2}{3}\pi$, $2\operatorname{cis}\frac{7}{6}\pi$ e $2\operatorname{cis}\frac{5}{3}\pi$.

ii) Consideremos a seguinte figura:



A área da região sombreada da figura é dada por:

$$A_{\text{sombreada}} = \frac{3}{4}\times\left(A_{\text{círculo}} - A_{[ABDC]}\right) = \frac{3}{4}\times\left(\pi\times 2^2 - \overline{AB}^2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\times(4\pi - 8) = \frac{3}{\cancel{4}}\times\cancel{4}\pi - \frac{3}{4}\times 8 = 3\pi - 6$$

Cálculo Auxiliar: Pelo Teorema de Pitágoras tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 8$$

1.2

i) O número complexo z_1 é da forma $z_1 = \rho\operatorname{cis}\frac{2}{9}\pi$, portanto o número complexo z_2 é da forma $z_2 = \rho\operatorname{cis}\left(\frac{2}{9}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \rho\operatorname{cis}\frac{13}{18}\pi$.

ii) A imagem geométrica do número complexo $(w\times z_2)^3$ pertence à bissectriz do segundo quadrante real se e só se $\arg\left((w\times z_2)^3\right) = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in Z$. Assim:

$$(w\times z_2)^3 = \left(\operatorname{cis}\alpha\times\rho\operatorname{cis}\frac{13}{18}\pi\right)^3 = \left(\rho\operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{13}{18}\pi\right)\right)^3 =$$

$$= \rho^3\operatorname{cis}\left(3\times\left(\alpha + \frac{13}{18}\pi\right)\right) = \rho^3\operatorname{cis}\left(3\alpha + \frac{39}{18}\pi\right) =$$

$$= \rho^3\operatorname{cis}\left(3\alpha + \frac{13}{6}\pi\right) = \rho^3\operatorname{cis}\left(3\alpha + \frac{13}{6}\pi - 2\pi\right) =$$

$$= \rho^3\operatorname{cis}\left(3\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

Logo $\quad 3\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in Z \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{7}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \to \alpha = \frac{7}{36}\pi \notin \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Para $k = 1 \to \alpha = \frac{11}{36}\pi \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Portanto $\alpha = \frac{31}{36}\pi$.

2.

2.1

2.1.1 Consideremos os acontecimentos M/F: «O aluno escolhido é do sexo Masculino/Feminino» e C/L: «O aluno escolhido prefere um curso relacionado com Ciências/Letras». Queremos determinar $P(F|C)$. Vamos construir uma tabela para responder a esta questão. Do enunciado tem-se $P(M) = 0{,}3 = \frac{3}{10}$, $P(C|M) = \frac{2}{3}$ e $P(L|F) = 0{,}5 = \frac{1}{2}$. Assim:

	M	F	**p.m.**
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{11}{20}$
L	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$
p.m.	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

Logo $P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{\cancel{20}}}{\frac{11}{\cancel{20}}} = \frac{7}{11}$.

Justificações:

i) $P(C|M) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(C \cap M) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$

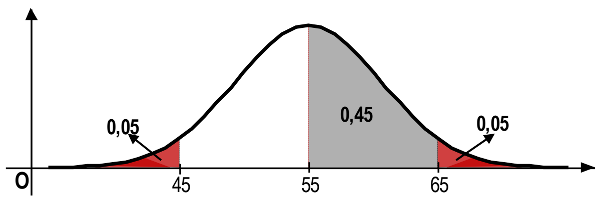
ii) $P(L|F) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(L \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(L \cap F) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{20}$

iii) $P(L \cap M) = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

iv) $P(C \cap F) = \frac{7}{10} - \frac{7}{20} = \frac{7}{20}$

2.1.2 Como 30% dos participantes no estudo eram rapazes e como $0{,}3 \times 200 = 60$ então participaram no estudo 60 rapazes e 140 raparigas. O número de casos possíveis é dado por ${}^{200}C_6$ (dos 200 alunos que participaram no estudo escolhemos seis). Para determinarmos o número de casos favoráveis temos de considerar dois casos: A comissão é formada por quatro rapazes e duas raparigas, o número de comissões que é possível formar nestas condições é ${}^{139}C_1 \times {}^{60}C_4 = 139 \times {}^{60}C_4$ (como a Sónia tem de fazer parte da comissão então das restantes 139 raparigas escolhemos uma e dos 60 rapazes escolhemos quatro); A comissão é formada por cinco rapazes e uma rapariga, o número de comissões que é possível formar nestas condições é ${}^{60}C_5$ (como a Sónia tem de fazer parte da comissão temos apenas de escolher cinco rapazes entre os 60). Logo o número de casos favoráveis é $139 \times {}^{60}C_4 + {}^{60}C_5$. Pela Regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis. Assim a probabilidade pedida é dada por $\frac{139 \times {}^{60}C_4 + {}^{60}C_5}{{}^{200}C_6}$.

2.2 Comecemos esquematizar a situação, representando a Curva de Gauss associada à variável aleatória X:



Como $P(X < 45) = P(X > 65) = 0{,}5 - 0{,}45 = 0{,}05$ e como $P(55 < X < 65) = 45\% = 0{,}45$ então:

$$P(X < 45 \ \vee \ X > 65) = P(X < 45) + P(X > 65) =$$
$$= 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}10$$

Logo o número de raparigas que têm peso inferior a 45kg e superior a 65 kg é dado por $0{,}10 \times 140 = 14$.

3. O número de casos possíveis é dado por ${}^{n}A_2 = n \times (n-1)$ (Para a primeira bola que vamos colocar temos **n** compartimentos à escolha e para a segunda bola temos $\mathbf{n-1}$ compartimentos à escolha). Como o número de compartimentos é par então existem

$\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$ compartimentos numerados com um número para e $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$ compartimentos numerados com um número ímpar. Para determinar o número de casos favoráveis começamos por escolher uma das bolas (visto que são distintas) para colocar num dos compartimentos numerados com um número par, essa escolha pode ser feita de ${}^{2}C_1 = 2$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras existem $\frac{n}{2}$ formas distintas de colocar a bola escolhida num dos compartimentos numerados com um número para e $\frac{n}{2}$ formas distintas de colocar a outra bola num dos compartimentos numerados com um número ímpar. Portanto o número de casos favoráveis é $\cancel{2} \times \frac{n}{\cancel{2}} \times \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$. Assim tem-se:

$$\frac{\frac{n^2}{2}}{n \times (n-1)} = \frac{6}{11} \Leftrightarrow \frac{n^{\cancel{2}}}{2\cancel{n} \times (n-1)} = \frac{6}{11} \Leftrightarrow \frac{n}{2n-2} = \frac{6}{11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11n = 6 \times (2n-2) \Leftrightarrow 11n = 12n - 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n = -12 \Leftrightarrow n = 12$$

4. O gráfico da função g e a recta **r** intersectam-se em pelo menos um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ se a equação $g(x) = -\frac{1}{2}$ for possível nesse intervalo, para o provarmos vamos utilizar o Teorema de Bolzano. Para mostrarmos que esse ponto é único temos de verificar que a equação $g(x) = -\frac{1}{2}$ tem uma única solução em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

i) A função g é contínua em IR pois é diferença de duas funções contínuas em IR ($y = \cos(2x)$ é continua em IR porque é a composta entre a função $y = \cos x$, trigonométrica, continua em IR, e a função $y = 2x$, polinomial, contínua em IR e $y = 2\operatorname{sen}x$ é função trigonométrica contínua em IR) Logo g é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \subset IR$.

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos\pi - 2 \times 1 = -1 - 2 = -3$$

$$g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(2 \times \frac{3}{2}\pi\right) - 2\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = \cos(3\pi) - 2 \times (-1) =$$

$$= -1 + 2 = 1$$

Como g é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ e como $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ então pelo Teorema de Bolzano $\exists x_0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right[: g(x_0) = -\frac{1}{2}$, ou seja, o gráfico de g e a recta **r** intersectam-se em pelo menos um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

ii) $g(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) - 2\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

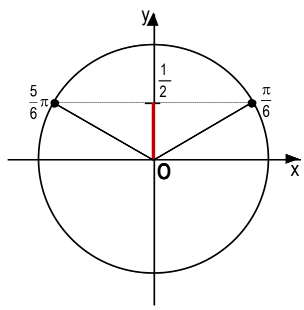
$$\Leftrightarrow -4\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-4) \times 3}}{2 \times (-4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}x = -\frac{3}{2}}_{\text{Eq. impossível}} \lor \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in Z$$

Figura Auxiliar:



Para $k = 0 \rightarrow x = \cancel{\frac{\pi}{6}} \lor x = \frac{5}{6}\pi$

Para $k = 1 \rightarrow x = \cancel{\frac{13}{6}\pi} \lor x = \cancel{\frac{17}{6}\pi}$

Para $k = -1 \rightarrow$ ——— $\lor x = \cancel{-\frac{7}{6}\pi}$

Então $\frac{5}{6}\pi$ é a única solução da equação no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ e portanto o gráfico da função g e a recta **r** intersectam-se num único ponto cuja abcissa pertence a esse intervalo. As coordenadas desse ponto são $\left(\frac{5}{6}\pi,-\frac{1}{2}\right)$.

5.

5.1 Vamos começar por determinar a expressão analítica de f' e determinar os seus zeros.

i) $f'(x)=\left(x^2\ln x\right)'=2x\ln x+x^{\cancel{2}}\times\frac{1}{\cancel{x}}=2x\ln x-x=x(2\ln x+1)$

ii) $f'(x)=0\Leftrightarrow x(2\ln x+1)=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ 2\ln x+1=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0\ \vee\ \ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=0\ \vee\ x=e^{-\frac{1}{2}}\right)\ \wedge\ x\in IR^+\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Fazendo um quadro de sinal vem:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
x	n.d.	$+$	0	$+$
$2\ln x-1$	n.d.	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	Min.	$\nearrow$

Assim concluímos que a função f é decrescente em $\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right[$. A função f tem mínimo absoluto para $x=1$ que é:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\times\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{e}\times\ln e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2e}.$$

5.2 O domínio da função f é IR^+. Assim:

i) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)\overset{(0\times\infty)}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2\underbrace{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}_{=-\ln y}\right)=-\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y^2}=$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=-\frac{1}{+\infty}\times0=0\times0=0$$

Mudança de Variável: Se $x\to0^+$ então $\underbrace{\frac{1}{x}}_{y}\to+\infty$. Seja $y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$. Se $x\to0^+$ então $y\to+\infty$.

Logo a recta de equação $x=0$ não é assimptota vertical do gráfico de f. Como a função f é contínua em IR^+ então o gráfico de f não assimptotas verticais.

ii) Quando $x\to+\infty$ tem-se:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\ln x}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty\times\underbrace{\ln(+\infty)}_{+\infty}=+\infty$$

Logo o gráfico da função f não tem assimptotas não verticais.

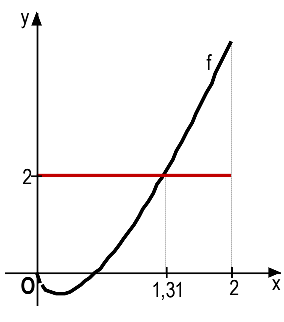
Concluímos então que o gráfico da função f não tem qualquer tipo de assimptotas (nem verticais nem não verticais)

5.3

i) Seja x a abcissa do ponto P. Como a recta **s** é tangente ao gráfico de f no ponto P então $f'(x)=m_s$. A recta **s** é perpendicular à recta de equação $y=-\frac{1}{2}x$, portanto o declive da recta **s** é dado por $m_s=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow m_s=2$. Queremos então determinar o valor de x para o qual $f'(x)=2$.

Nota: Duas rectas **r** e **t**, do plano, são perpendiculares se e só se $m_r=-\frac{1}{m_t}$.

ii) Utilizando o editor de funções da calculadora vamos definir as funções $y_1=f'(x)=x(2\ln x+1)$ e $y_2=2$ na janela $[0,2]\times[-1,5]$ Obtemos:



Logo a abcissa do ponto P é, aproximadamente, 1,31 ($x\approx1,31$).

6.

6.1 Como passados dez anos, ou seja, uma década, a massa de CS137 presente no local era de 397,46 g e como em 2001, ou seja, passados 15 anos (uma década e meia) a massa de Cs 137 presente no local era de 354,38 g então $m(1)=397,46$ e $m(1,5)=354,38$. Assim tem-se:

$$\begin{cases} m(1)=397,46 \\ m(1,5)=354,38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times e^{b\times 1}=397,46 \\ a\times e^{b\times 1,5}=354,38 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{397,46}{e^{b}} \\ \dfrac{397,46}{e^{b}}\times e^{1,5b}=354,38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \dfrac{e^{1,5b}}{e^{b}}=\dfrac{354,38}{397,46} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ e^{0,5b}=0,8916 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 0,5b=\ln(0,8916) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{397,46}{e^{-0,229}} \\ b=\dfrac{\ln(0,8916)}{0,5}\approx -0,229 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\approx 500 \\ b\approx -0,229 \end{cases}$$

Logo, na altura da explosão, a massa de Cs 137 libertada foi de 500 gramas

6.2 Tem-se:

$$m(x+t)=0,3\times m(t) \Leftrightarrow \cancel{a}\times e^{-0,229\times(x+t)}=0,3\times\cancel{a}\times e^{-0,229t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,229x-0,229t}=0,3\times e^{-0,229t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-0,229x-0,229t}}{e^{-0,229t}}=0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,229x\cancel{-0,229t}\cancel{+0,229t}}=0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,229x}=0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,229x=\ln(0,3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln(0,3)}{-0,229}\approx 5,3$$

A concentração de Cs137 reduz-se 70% a cada 5,3 décadas, ou seja, a cada 53 anos, aproximadamente.