Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Prova Modelo n.º 11

Julho de 2018

CADERNO 1

Neste grupo a utilização de calculadora gráfica é permitida.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

1.1.	1.2.
P2001/2002	PMC2015

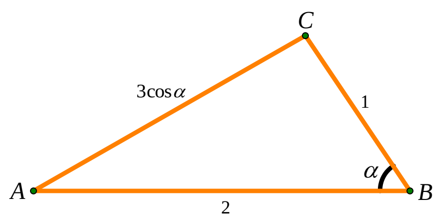
1.1. De um dado viciado, com as faces numeradas de 1 a 6, sabe-se que lançando-o quatro vezes, a probabilidade de sair face com o número 2 exactamente duas vezes é $\frac{8}{27}$.

Lança-se este dado dez vezes.

Qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de sair face com o número 2 exactamente cinco vezes?

A $0,039$ **B** $0,099$ **C** $0,137$ **D** $0,575$

1.2. Na figura está representado o triângulo escaleno $[ABC]$.

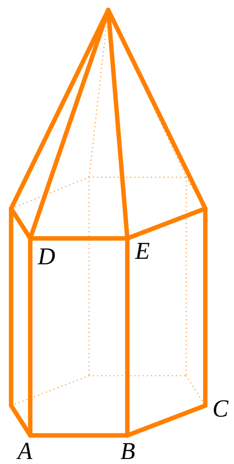


Sabe-se que α é a amplitude, em radianos, do ângulo ABC, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$ e $\overline{AC}=3\cos\alpha$.

Qual é o valor de α, arredondado às milésimas?

A $0,680$ **B** $0,982$ **C** $1,110$ **D** $1,347$

2. Num referencial o.n. $Oxyz$, não representado na figura, considere um sólido constituído por um prisma e uma pirâmide, ambos hexagonais regulares.



Sabe-se que:

- $A(-1,2,0)$ e B é o ponto de intersecção do plano ABC com o eixo Oz
- uma equação cartesiana do plano ABC é $2x+2y+z=2$
- o prisma e a pirâmide têm a mesma altura
- o volume do sólido é $108\sqrt{3}$

2.1. Determine o valor de $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$.

2.2. Escreva uma equação cartesiana do plano ABD.

2.3. Estão disponíveis dez cores (amarelo, azul, encarnado, preto, branco, verde, roxo, laranja, rosa e castanho) para colorir o sólido. Pretende-se que cada face fique colorida com apenas uma cor de modo que:

- nas faces do prisma não haja cores repetidas
- as faces da pirâmide fiquem coloridas com as cores amarelo, azul, preto, branco, verde e rosa, com a cor preta e a cor branca em faces consecutivas

De quantas maneiras se pode colorir o sólido nas condições do enunciado?

A 29030400 **B** 72576000

C 174182400 **D** 435456000

3. Numa empresa sabe-se que:

- 40% dos funcionários são homens
- $\frac{1}{8}$ dos funcionários do sexo masculino são licenciados
- entre os funcionários licenciados, três em cada quatro são mulheres

3.1. Escolhe-se ao acaso um funcionário desta empresa.

Qual é a probabilidade de não ser licenciado ou ser do sexo masculino?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

3.2. A empresa tem 120 funcionários dos quais se escolhem quatro, simultaneamente e ao acaso.

Considere os acontecimentos:

X : «Os quatro funcionários escolhidos são do sexo masculino»

Y : «Pelo menos três dos funcionários escolhidos são licenciados»

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(Y|X)$.

Comece por interpretar o significado de $P(Y|X)$ no contexto da situação descrita.

Apresente o resultado na forma de dízima com quatro casas decimais.

4. Numa experiência científica foi utilizada uma cultura de bactérias. O número de bactérias nessa cultura, em milhares, t horas após o início da experiência é dado, aproximadamente, por:

$$f(t)=\frac{3}{1+10e^{-0,8t}}\text{, com } t\geq 0$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o instante correspondente à abcissa do ponto de inflexão do gráfico de f e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s)
- apresentar o instante pedido em horas e minutos, minutos arredondados às unidades
- interpretar o resultado no contexto da situação descrita

No caso de fazer algum arredondamento intermédio utilize, no mínimo, três casas decimais.

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z=2\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha+i\operatorname{sen}(2\alpha)\right)$, com $\alpha\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right[$.

Sabe-se que:

- o afixo de z pertence ao terceiro quadrante
- z é uma das raízes de índice n, com $n\in\mathbb{N}$, do número complexo -128

Qual das seguintes opções é a correcta?

A $\alpha=\frac{10\pi}{7}$

B $\alpha=\frac{9\pi}{7}$

C $\alpha=\frac{10\pi}{14}$

D $\alpha=\frac{9\pi}{14}$

6. Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões tais que:

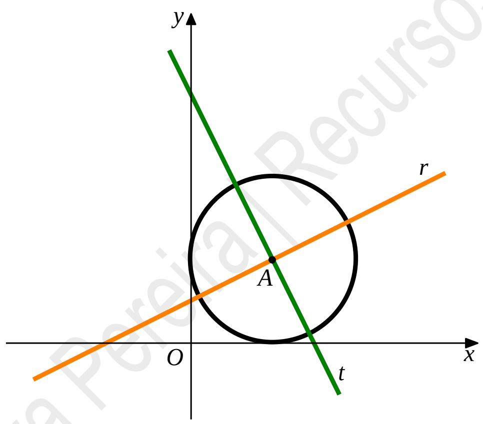
- (u_n) é uma progressão aritmética e $u_2 = u_8 + 6$

- $v_n = \dfrac{16^n}{8^{-2u_n+1}}$ e a soma dos seus seis primeiros é 10920

Mostre que $u_3 = 0$.

Sugestão: determine a razão da progressão aritmética (u_n) e mostre que a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica.

7. Na figura estão representadas em referencial o.n. xOy, uma circunferência, centrada no ponto A e tangente aos eixos coordenados, e as rectas r e t.



Sabe-se que:

- uma equação vectorial da recta r é $(x,y)=(0,1)+k(8,4)$, $k \in \mathbb{R}$

- as rectas r e t são perpendiculares e intersectam-se no ponto A

Qual é a equação reduzida da recta t?

A $y=-2x+6$

B $y=-\frac{1}{2}x+3$

C $y=-2x+9$

D $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$

FIM DO CADERNO 1

CADERNO 2

Neste grupo a utilização de calculadora gráfica não é permitida.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

8.1.	8.2.
P2001/2002	PMC2015

8.1. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere, para $a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

- a recta r definida por $\frac{x-1}{2a} = \frac{z-1}{a} \;\wedge\; y = 4$
- o plano α definido por $\frac{ax}{2} + y + bz = 1$

A recta r está contida no plano α.

Quais são os valores de a e de b?

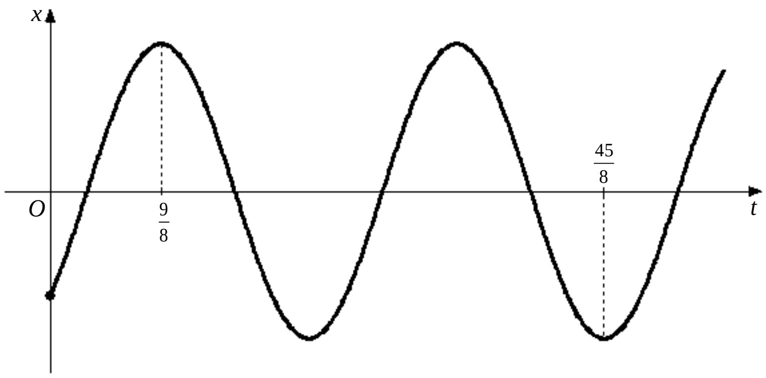
A $a = b = -2$

B $a = 6$ e $b = -6$

C $a = -6$ e $b = 6$

D $a = b = 2$

8.2. Na figura está representado em referencial o.n. o movimento de um oscilador harmónico.



Tal como a figura sugere a função x, que dá a abcissa deste oscilador harmónico em função do tempo t, em segundos, tem um máximo em $t=\frac{9}{8}$ e um mínimo em $t=\frac{45}{8}$.

Sejam ω e φ, respectivamente, a pulsação e a fase deste oscilador.

Quais são os valores de ω e de φ?

A $\omega=\frac{2\pi}{3}$ e $\varphi=\frac{\pi}{4}$

B $\omega=\frac{5\pi}{4}$ e $\varphi=\frac{2\pi}{3}$

C $\omega=\frac{2\pi}{3}$ e $\varphi=\frac{5\pi}{4}$

D $\omega=\frac{\pi}{4}$ e $\varphi=\frac{2\pi}{3}$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$ e $z_2=\frac{i^{35}-2}{(2i-1)(\overline{z_1})^5}$, com $\alpha\in[0,\pi[$.

Determine os valores que α para os quais o afixo de z_2 pertence à região do plano complexo definida pela condição:

$$\operatorname{Arg}(z)=\operatorname{Arg}\left(\sqrt{6}-3\sqrt{2}i\right)$$

10.1.	10.2.
P2001/2002	PMC2015

10.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 12 e desvio padrão σ tal que:

$$P(12 \le X \le 14) = 0{,}3$$

Qual das seguintes afirmações é falsa?

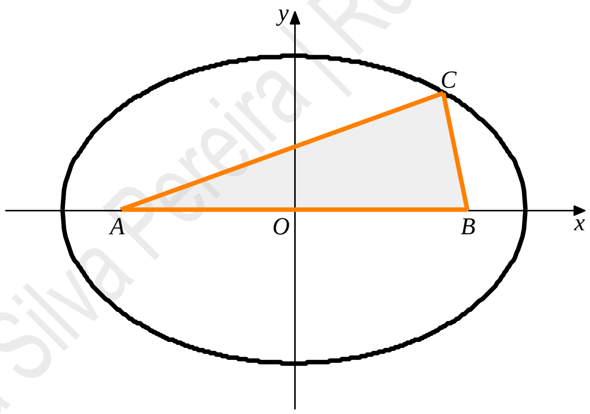
A $\sigma > 2$

B $P(X \le 10) = 20\%$

C $P(X \le 14 | X \ge 10) = 60\%$

D $P(X \le 10 | X \le 14) = 25\%$

10.2. Na figura estão representados num referencial o.n. xOy uma elipse de focos A e B e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto C pertence à elipse e tem ordenada 2
- em relação ao triângulo $[ABC]$ a sua área é 6 e o seu perímetro é 14

Qual das seguintes é a equação reduzida da elipse da figura?

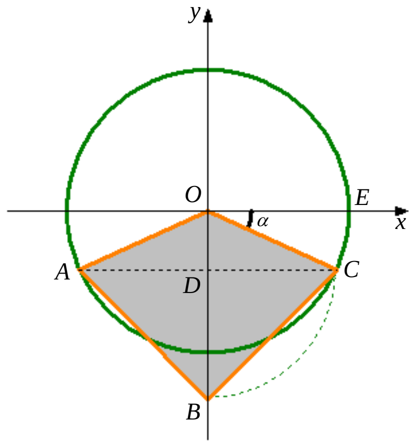
A $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

B $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

C $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

D $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

11. Na figura estão representados num referencial o.n. xOy a circunferência trigonométrica e o quadrilátero $[OABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto C desloca-se sobre a circunferência, no quarto quadrante (eixo Oy não incluído). O ponto A acompanha o movimento de C, de modo que o segmento de recta $[AC]$ é sempre paralelo a Ox

- o ponto B pertence ao eixo Oy e o arco de circunferência BC está centrado no ponto D, ponto médio de $[AC]$

Sejam α a amplitude, em radianos, do ângulo EOC, com $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e f a função que dá a área do quadrilátero $[OABC]$ em função de α.

11.1. Mostre que $f(\alpha) = \cos^2 \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$.

11.2. Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos e indique o valor máximo da área do quadrilátero $[OABC]$.

Sugestão: para determinar o valor máximo do quadrilátero $[OABC]$ tenha em conta que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$.

12. Considere as funções g e h, de domínios $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, definidas por:

$$g(x) = x\ln^2 x \qquad \text{e} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{e^{2x-1}-e}+k & \text{se} \quad x<1 \\ \dfrac{g(x)}{x^3} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}, \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

12.1. Seja (x_n) a sucessão definida por $x_n = \left(n^3 - e^n\right)^2$.

Qual é o valor de $\lim h(x_n)$?

A $-\infty$

B 0

C 1

D $+\infty$

12.2. Determine o valor de k de modo que a função h seja contínua.

12.3. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Itens extra:

a) Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa e.

b) Determine o conjunto solução da inequação $g'(x) - \ln^2 x - \ln(8-2x) \geq \ln(x-1)$.

13. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ tal que a recta de equação $2y + x = 4$ é assimptota do gráfico de h.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_2 (h(x))^2 - 2\log_2 x}{2h(x)+x}$?

A $-\dfrac{1}{2}$

B $-\dfrac{1}{4}$

C $\dfrac{1}{4}$

D $\dfrac{1}{2}$

14. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tais que:

- f é contínua e estritamente monótona
- o gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1 e o eixo Oy num ponto de ordenada positiva
- $g(x) = e^{x^2 - x} \times f(x) \times (x + a)$, com $0 < a < 1$

Mostre que a equação $\frac{g(x)}{f(1)} = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0,1]$.

FIM DO CADERNO 2

FIM DA PROVA MODELO 11

Cotações

Caderno 1

1.		8 pontos
2.		
	2.1.	10 pontos
	2.2.	10 pontos
	2.3.	8 pontos
3.		
	3.1.	12 pontos
	3.2.	12 pontos
4.		12 pontos
5.		8 pontos
6.		12 pontos
7.		8 pontos
	Total Caderno 1	100 pontos

Caderno 2

8.		8 pontos
9.		12 pontos
10.		8 pontos
11.		
	11.1.	10 pontos
	11.2.	12 pontos
12.		
	12.1.	8 pontos
	12.2.	12 pontos
	12.3.	12 pontos
13.		8 pontos
14.		10 pontos
	Total Caderno 2	100 pontos

Total Caderno 1 + Caderno 2 200 pontos

Solucionário

Caderno 1

1.1. C **1.2.** B

2.1. 27 **2.2.** $2x-y-2z=-4$ **2.3.** C

3.1. $85\,\%$ **3.2.** $\approx 0{,}0044$

4. $t \approx 2{,}878$, que corresponde a, aproximadamente duas horas e 53 minutos. Passadas, aproximadamente duas horas e 53 minutos, a taxa de crescimento do número de bactérias começa a diminuir.

5. D **7.** A

Caderno 2

8.1. B **8.2.** C **9.** $\alpha = \frac{7\pi}{30} \vee \alpha = \frac{19\pi}{30}$

10.1. C **10.2.** D

11.2. A função g é decrescente em $\left[-\frac{\pi}{8},0\right]$ e é crescente em $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{8}\right]$. Tem um máximo absoluto em $\alpha=-\frac{\pi}{8}$ e um mínimo relativo em $\alpha=0$. O valor máximo da área do quadrilátero $[OABC]$ é $g\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

12.1. B **12.2.** $k=-\frac{2}{e}$

12.3. O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,\frac{1}{e}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$ e tem ponto de inflexão em $x=\frac{1}{e}$.

I.E. **a)** $y=3x-2e$ **I.E.** **b)** $\left]1,\frac{4}{3}\right]\cup[2,4[$ **13.** A