EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Recursos para Matemática

Sites: http://www.sinalmaismat.com/ | http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/sinalmaismat/ | https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

PROVA MODELO N.º 10

JUNHO DE 2018

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

CADERNO 1

1. Tem-se que A e B são acontecimentos incompatíveis, pelo que:

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B)=0 \quad \text{e} \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Assim, como $P(A\cup B)=0{,}9$ e $P(\bar{A})=0{,}3 \Leftrightarrow P(A)=0{,}7$, vem que:

$$P(A\cup B)=0{,}9 \Leftrightarrow P(A)+P(B)=0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}7+P(B)=0{,}9 \Leftrightarrow P(B)=0{,}2$$

Portanto, $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\dfrac{0{,}7-0}{1-0{,}2}=\dfrac{0{,}7}{0{,}8}=\dfrac{7}{8}$.

Resposta: D

2.

2.1. Tem-se que:

- $P(X=-1)=P(X=2) \Leftrightarrow a=d$

- $\mu=\dfrac{5}{12} \Leftrightarrow -1\times a+0\times b+1\times c+2\times d=\dfrac{5}{12} \underset{a=d}{\Leftrightarrow} -a+c+2a=\dfrac{5}{12} \Leftrightarrow a+c=\dfrac{5}{12}$

- $a+b+c+d=1 \Leftrightarrow a+c+b+d=1 \underset{\substack{a=d \\ a+c=\frac{5}{12}}}{\Leftrightarrow} \dfrac{5}{12}+b+a=1 \Leftrightarrow a+b=1-\dfrac{5}{12} \Leftrightarrow a+b=\dfrac{7}{12}$

Logo, $P(-1\le X\le 0)=P(X=-1)+P(X=0)=a+b=\dfrac{7}{12}$

Resposta: C

2.2. Tem-se que, $x(t)=\sqrt{3}\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)=2\times\left(\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)\right)=$

$$\underset{\substack{\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}}}{=} 2\times\underbrace{\left(\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)}_{=\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{\pi}{6}\right)}=2\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\underset{\operatorname{sen}\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{=} 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(-\frac{\pi t}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\cos\left(-\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\underset{\cos(-\alpha)=\cos\alpha}{=}2\cos\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$\underset{\cos\alpha=\cos(\alpha+2\pi)}{=}2\cos\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)=2\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

Logo, como $0\le\frac{4\pi}{3}<2\pi$ a fase deste oscilador harmónico é $\frac{4\pi}{3}$.

Resposta: C

3.

3.1. Como com o passar do tempo o número de girafas na reserva tende para 1000, vem que $\lim_{t\to+\infty} G(t)=8$.

Assim, como $0<G<A\Rightarrow A-G>0$, vem que $\frac{G}{A-G}>0$, pelo que:

$$t=\ln\left(\frac{G}{A-G}\right)^3 \underset{\frac{G}{A-G}>0}{\Leftrightarrow} t=3\ln\left(\frac{G}{A-G}\right)\Leftrightarrow \frac{t}{3}=\ln\left(\frac{G}{A-G}\right)\Leftrightarrow \frac{G}{A-G}=e^{\frac{t}{3}}\Leftrightarrow \frac{A-G}{G}=\frac{1}{e^{\frac{t}{3}}}\Leftrightarrow \frac{A}{G}-\frac{\cancel{G}}{\cancel{G}}=e^{-\frac{t}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{G}=1+e^{-\frac{t}{3}}\Leftrightarrow \frac{G}{A}=\frac{1}{1+e^{-\frac{t}{3}}}\Leftrightarrow G=\frac{A}{1+e^{-\frac{t}{3}}}\Rightarrow G(t)=\frac{A}{1+e^{-\frac{t}{3}}}$$

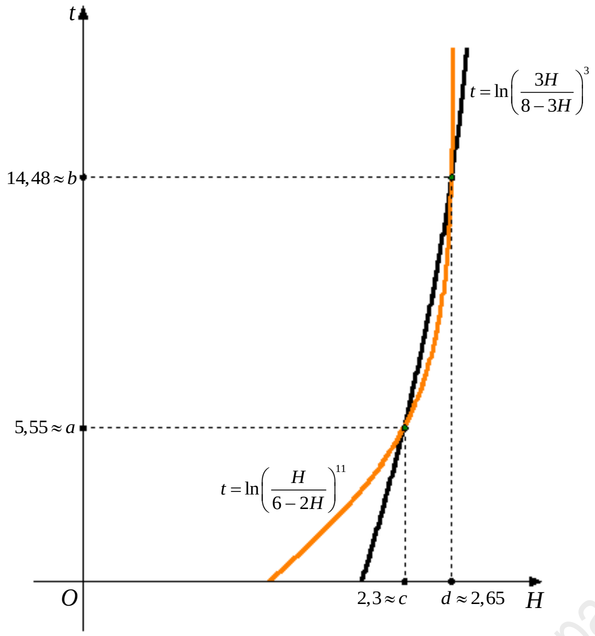
Logo, $\lim_{t\to+\infty} G(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{A}{1+e^{-\frac{t}{3}}}=\frac{A}{1+e^{-\frac{+\infty}{3}}}=\frac{A}{1+e^{-\infty}}=\frac{A}{1+0}=A$.

Portanto, como $\lim_{t\to+\infty} G(t)=8$, vem que $A=8$.

3.2. Pretende-se determinar o instante t de modo que $G=3H$, ou seja, pretende-se determinar t de modo que:

$$\ln\left(\frac{3H}{8-3H}\right)^3=\ln\left(\frac{H}{6-2H}\right)^{11}$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, vamos definir $y_1=\ln\left(\frac{3N}{8-3N}\right)^3$ e $y_2=\ln\left(\frac{N}{6-2N}\right)^{11}$ na janela $[0,3]\times[0,20]$:



Assim, os gráfico das funções $t=\ln\left(\frac{3H}{8-3H}\right)^3$ e $t=\ln\left(\frac{H}{6-2H}\right)^{11}$ intersectam-se nos pontos de coordenadas (c,a), com $c\approx 2,3$ e $a\approx 5,55$, e (d,b), com $d\approx 2,65$ e $b\approx 14,48$.

Como $0,55\times 12=6,6$ e $0,48\times 12=5,76$, vem que o número de girafas na reserva é o triplo do número de hipopótamos em Julho de 2015 e em Junho de 2024.

4. Seja r a razão da progressão geométrica (u_n).

A soma dos n primeiros termos de (u_n) é dada por $S_n=u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$, pelo que a soma de todos os seus termos é dada por $\lim S_n$. Como $\lim S_n=\frac{8}{5}$, vem que (S_n) é convergente e portanto tem-se necessariamente $-1<r<1$ (caso contrário, (S_n) seria divergente).

Assim, $\lim S_n=\lim\left(u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}\right)=u_1\times\lim\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{2}{1-r}\times\left(1-\lim r^n\right)\underset{-1<r<1}{=}\frac{2}{1-r}\times(1-0)=\frac{2}{1-r}$

Logo, $\frac{2}{1-r}=\frac{8}{5}\underset{-1<r<1}{\Leftrightarrow}2\times 5=8(1-r)\Leftrightarrow 10=8-8r\Leftrightarrow 8r=-2\Leftrightarrow r=-\frac{2}{8}\Leftrightarrow r=-\frac{1}{4}$ e portanto, como a razão é negativa, a sucessão (u_n) não é monótona, pelo que a afirmação **I** é falsa.

Por outro lado, $u_5=u_1\times r^4=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)^4=2\times\frac{1}{256}=\frac{1}{128}$, pelo que a afirmação **II** é verdadeira.

Resposta: C

5. Tem-se que:

- b é o zero da função f, pelo que $f(b)=0 \Leftrightarrow \log_4(ab)=0 \Leftrightarrow ab=4^0 \Leftrightarrow ab=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{b}$

- a abcissa do ponto B é $\frac{1}{b}$, mas como $a=\frac{1}{b}$, vem que a sua ordenada é dada por:

$$f\left(\frac{1}{b}\right)=f(a)=\log_4(a\times a)=\log_4\left(a^2\right)\underset{a>0}{=}2\log_4 a$$

A altura do triângulo $[ABC]$ é dada por $f\left(\frac{1}{b}\right)=f(a)=2\log_4 a$ e $\overline{BC}=\frac{1}{b}=a$ é a medida do comprimento da sua base, pelo que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times f\left(\frac{1}{b}\right)}{2}=\frac{a\times \cancel{2}\log_4 a}{\cancel{2}}=a\log_4 a$$

A área do rectângulo $[ODEF]$ é dada por $\overline{OD}\times\overline{OF}=\frac{1}{b}\times 3=3a$.

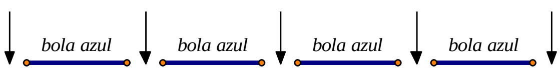
Assim, $A_{[ABC]}=A_{[ODEF]}=\cancel{a}\log_4 a=3\cancel{a}\underset{a>0}{\Leftrightarrow}a=4^3\Leftrightarrow a=64$. Como $a=\frac{1}{b}\Leftrightarrow b=\frac{1}{a}$, vem que $b=\frac{1}{64}$.

Resposta: B

6.

6.1. Vamos começar por agrupar num bloco as três bolas brancas e num outro bloco as três bolas pretas. Assim, dentro do bloco das bolas brancas, estas permutam entre si de $3!$ maneiras distintas e dentro do bloco das pretas, estas permutam entre si de $3!$ maneiras distintas.

Como não podem haver bolas brancas e bolas pretas em posições consecutivas, os dois blocos têm de ocupar posições entre as bolas azuis, pelo que os dois bloco podem ocupar duas das posições entre cinco, três entre as quatro azuis mais as duas nas pontas:



Portanto, das cinco posições escolhem-se duas para os dois blocos. O número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2$. Para cada uma destas maneiras, os dois blocos permutam entre si de $2!$ maneiras distintas.

Finalmente, as quatro bolas azuis permutam entre si de $4!$ maneiras distintas nas restantes quatro posições.

Logo, uma resposta ao problema é ${}^5C_2 \times 2! \times 3! \times 3! \times 4! = 17280$.

6.2. $P(Y \cap Z | X)$ designa a probabilidade de na segunda extracção uma das bolas retiradas ser branca e a outra ser preta, sabendo que na primeira extracção foi retirada uma bola azul.

Assim, como a bola retirada na primeira extracção foi azul, essa bola voltou a ser colocada no saco e acrescentaram-se mais n bolas azuis ao saco, pelo que no seu interior ficam $n+10$ bolas, três brancas, três pretas e $n+4$ azuis.

Nestas condições vão extrair-se, simultaneamente e ao acaso duas bolas, pelo que:

- o número de casos possíveis é ${}^{n+10}C_2 = \frac{(n+10)!}{2!(n+10-2)!} = \frac{(n+10)(n+9)\cancel{(n+8)!}}{2!\cancel{(n+8)!}} = \frac{(n+10)(n+9)}{2}$

- o número de casos favoráveis é ${}^3C_1 \times {}^3C_1 = 9$

Assim:

$$P(Y \cap Z | X) = 0{,}075 \Leftrightarrow \frac{9}{\frac{(n+10)(n+9)}{2}} = \frac{3}{40} \Leftrightarrow \frac{18}{n^2+9n+10n+90} = \frac{3}{40} \Leftrightarrow 18 \times 40 = 3(n^2+19n+90) \Leftrightarrow$$

$$\underset{\div 3}{\Leftrightarrow} 6 \times 40 = n^2+19n+90 \Leftrightarrow n^2+19n-150=0 \Leftrightarrow n^2+19n-150=0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2-4\times1\times(-150)}}{2\times1} \Leftrightarrow n = \frac{-19\pm\sqrt{961}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-19\pm31}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-19-31}{2} \vee n = \frac{-19+31}{2} \Leftrightarrow n=-25 \vee n=6$$

$\therefore$ Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n=6$.

7.

7.1. A função h é contínua em $x=1$ se $\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^+} h(x) = h(1)$.

Tem-se que:

- $h(1) = -5$

- $\lim\limits_{x\to1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+3x-4}{\text{sen}(1-x)}\underset{i)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)(x+4)}{\text{sen}(1-x)}=-\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x}{\text{sen}(1-x)}\times\lim\limits_{x\to1^-}(x+4)=$

$$\underset{\substack{y=1-x\\ x\to1^-\Rightarrow y=1-x\to0^+}}{=}-\lim_{y\to0^+}\frac{y}{\text{sen}\,y}\times(1+4)=-\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\text{sen}\,y}{y}}_{\textit{Limite notável}}}\times5=-\frac{1}{1}\times5=-5$$

- $\lim\limits_{x\to1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-7x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{2x-2}+6-7x}{x-1}\underset{6=-1+7}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{2x-2}-1+7-7x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{2x-2}-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{7x-7}{x-1}=$

$$=2\times\underbrace{\lim_{x\to1^+}\frac{e^{2(x-1)}-1}{2(x-1)}}_{\substack{x\to1^+\Rightarrow2(x-1)\to0^+\\ \textit{Limite notável}}}-\lim_{x\to1^+}\frac{7\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2\times1-7=-5$$

$\therefore$ Como $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}h(x)=h(1)=-5$, vem que a função *h* é contínua em $x=1$.

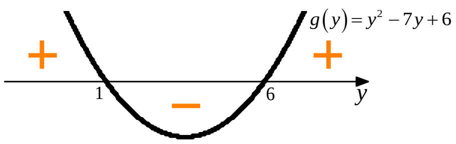
i) Tem-se que $x^2+3x-4=0\underset{F.R.}{\Leftrightarrow}x=1\ \vee\ x=-4$, pelo que $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.

7.2. Tem-se que $f(x)<\dfrac{7}{e^{1-x}}\Leftrightarrow e^{2x-2}+6<\dfrac{7}{e^{1-x}}\Leftrightarrow e^{2(x-1)}+6<7e^{x-1}\Leftrightarrow\left(e^{x-1}\right)^2-7e^{x-1}+6<0$

Fazendo $y=e^{x-1}$, vem que $\left(e^{x-1}\right)^2-7e^{x-1}+6<0\Leftrightarrow y^2-7y+6<0$.

Cálculo auxiliar: $y^2-7y+6=0\Leftrightarrow y=\dfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times6}}{2\times1}\Leftrightarrow y=\dfrac{7\pm\sqrt{25}}{2}\Leftrightarrow y=1\ \vee\ y=6$

Como a função $g(y)=y^2-7y+6$ é quadrática e o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo, então as soluções da inequação $y^2-7y+6<0$ são os valores de *y* tais que $y\in\,]1,6[$.



Assim, $y^2-7y+6<0\Leftrightarrow y>1\ \wedge\ y<6\underset{y=e^{x-1}}{\Leftrightarrow}e^{x-1}>e^0\ \wedge\ e^{x-1}<e^{\ln6}\Leftrightarrow x-1>0\ \wedge\ x-1<\ln6\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x>1\ \wedge\ x<1+\ln6\Leftrightarrow x>1\ \wedge\ x<\ln e+\ln6\Leftrightarrow1<x<\ln(6e)$$

$\therefore$ O conjunto solução da inequação é $]1,\ln(6e)[$.

Caderno 2

8. As opções **B** e **D** não podem ser as correctas pois:

▪ como a função g' tem um máximo em $x=-2$ e é derivável em $x=-2$, vem que a sua derivada nesse ponto é nula, isto é, $g''(-2)=0$, pelo que $\left(g'(-4)-g''(0)\right)\times g''(-2)=\left(g'(-4)-g''(0)\right)\times 0=0$.

▪ como o gráfico da função g' tem um ponto anguloso em $x=1$, vem que g' não é derivável em $x=1$ e portanto $g''(1)$ não existe, pelo que $\left(g''(-4)-g'(0)\right)\times g''(1)$ também não existe.

Analisando as restantes opções:

▪ para $0<x<3$, $g'(x)<0$, pelo que g é decrescente em $[1,3]$.

Logo, como $1,2\in[1,3]$ e $1<2$, vem que $g(1)>g(2)\Leftrightarrow g(1)-g(2)>0$.

Por outro lado, a recta tangente ao gráfico de g' no ponto de abcissa 0 tem declive negativo, pelo que a sua derivada é negativa em $x=0$, isto é, $g''(0)<0$.

Portanto, $\underbrace{\left(g(1)-g(2)\right)}_{>0}\times \underset{<0}{g''(0)}<0$, pelo que a opção **A** não é a correcta.

▪ para $-4<x<0$, $g'(x)>0$, pelo que g é decrescente em $[-4,0]$.

Logo, como $-3,-2\in[-4,0]$ e $-3<-2$, vem que $g(-3)<g(-2)\Leftrightarrow g(-3)-g(-2)<0$.

Por outro lado, a recta tangente ao gráfico de g' no ponto de abcissa -1 tem declive negativo, pelo que a sua derivada é negativa em $x=-1$, isto é, $g''(-1)<0$.

Portanto, $\underbrace{\left(g(-3)-g(-2)\right)}_{<0}\times \underbrace{g''(-1)}_{<0}>0$, pelo que a opção **C** é a correcta.

Resposta: C

9.

9.1. Tem-se que:

▪ o ponto B tem ordenada 2, pois $A(0,2)$ e o lado $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox. Assim, como o ponto $B(x_B,2)$ pertence à recta BC, vem que $2=\frac{x_B}{2}+1\Leftrightarrow 4=x_B+2\Leftrightarrow x_B=2\Rightarrow B(2,2)$.

▪ os lados $[BC]$ e $[CE]$ são perpendiculares e como o declive da recta BC é igual a $\frac{1}{2}$, vem que o declive da recta CE é dado por $m_{CE}=-\frac{1}{m_{BC}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$, pelo que $CE: y=-2x+b$. Como o ponto $P(5,6)$ pertence à recta EC, vem que $6=-2\times 5+b\Leftrightarrow b=16$ e portanto $CE: y=-2x+16$.

▪ C é o ponto de intersecção entre as rectas BC e CE, pelo que:

$$\begin{cases} y=\frac{x}{2}+1 \\ y=-2x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+16=\frac{x}{2}+1 \\ y=-2x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+32=x+2 \\ y=-2x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x=-30 \\ y=-2x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-2\times 6+16=4 \end{cases} \Rightarrow C(6,4)$$

▪ o ponto E tem ordenada 8, pois $F(0,8)$ e o lado $[EF]$ é paralelo ao eixo Ox. Assim, como o ponto $E(x_E,8)$ pertence à recta CE, vem que $8=-2x_E+16\Leftrightarrow 2x_E=8\Leftrightarrow x_E=4\Rightarrow E(4,8)$.

Finalmente, para $z=0$, tem-se que $0=5kx+ky\Leftrightarrow -ky=5kx \underset{k>0\Leftrightarrow -k<0\Rightarrow -k\neq 0}{\underset{\div(-k)}{\Leftrightarrow}} y=-5x$. Assim, como a recta de equação $y=-5x$ (recta de nível 0), não é paralela a nenhum dos lados do polígono $[ABCEF]$ a solução óptima deste problema é atingida num dos seus vértices (pretende-se maximizar a função objectivo), pelo que:

Vértice	$z=5kx+ky$
$A(0,2)$	$z=5k\times 0+k\times 2=2k$
$B(2,2)$	$z=5k\times 2+k\times 2=12k$
$C(6,4)$	$z=5k\times 6+k\times 4=34k$
$E(4,8)$	$z=5k\times 4+k\times 8=28k$
$F(0,8)$	$z=5k\times 0+k\times 8=16k$

$k>0\Rightarrow 34k>28k>16k>12k>2k$

Resposta: B

9.2. Tem-se que:

- $D_g = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f(x-1) \leq 1\}$

Como, $-1 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$, pelo que $-1 \leq f(x-1) \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

Portanto, $D_g = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f(x-1) \leq 1\} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

- para $x \in D_g = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, vem que $-1 < f(x-1) \leq 1$, e portanto:

$$-1 < f(x-1) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \arccos\left(f(x-1)\right) < \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\arccos\left(f(x-1)\right) < 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\pi \leq 2\arccos\left(f(x-1)\right) - \pi < 2\pi - \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi \leq 2\arccos\left(f(x-1)\right) - \pi < \pi \Leftrightarrow -\pi \leq g(x) < \pi$$

Logo, $D'_g = [-\pi, \pi[$.

$\therefore\ D_g = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ e $D'_g = [-\pi, \pi[$.

Resposta: B

10.

10.1. Tem-se que:

- um vector normal do plano α é $\vec{n}_\alpha(1, 2, -1)$

- $\beta : 4a^2x + 2ax = ay - a^4z \Leftrightarrow (4a^2 + 2a)x - ay + a^4z = 0$, pelo que um vector normal do plano β é:

$$\vec{n}_\beta\left(4a^2 + 2a, -a, a^4\right)$$

Como os planos α e β dão perpendiculares, vem que os vectores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ também o são, pelo que $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$.

Assim:

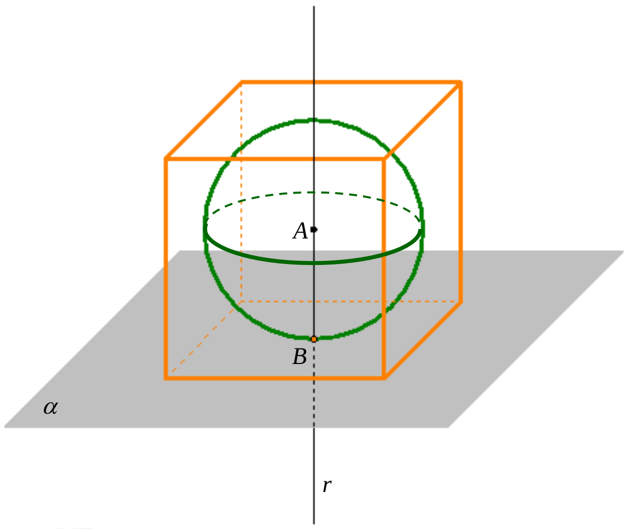
$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow (1,2,-1)\cdot\left(4a^2+2a,-a,a^4\right)=0 \Leftrightarrow 4a^2+\cancel{2a}-\cancel{2a}-a^4=0 \Leftrightarrow a^2\left(4-a^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2=0 \ \vee \ 4-a^2=0 \Leftrightarrow a^2=0 \ \vee \ a^2=4$$

$$\Leftrightarrow a=0 \ \vee \ a=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow a=0 \ \vee \ a=-2 \ \vee \ a=2$$

Como $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, vem que $a=-2 \ \vee \ a=2$.

10.2. Na figura está uma representação do plano α, da superfície esférica centrada em $A(2,2,-2)$ e que é tangente ao plano α num ponto B, do cubo em cuja superfície esférica está inscrita e da recta r, perpendicular a α que contém o ponto A:



Como a recta r é perpendicular ao plano α, um vector director de r pode ser $\vec{n}_\alpha(1,2,-1)$, pelo que uma equação vectorial de r é $(x,y,z)=(2,2,-2)+k(1,2,-1)$, $k\in\mathbb{R}$.

B é o ponto de intersecção da recta r com o plano α (como a superfície esférica é tangente a α no ponto B, vem que α é perpendicular ao raio $[AB]$). Assim, fazendo a intersecção, tem-se:

$$\begin{cases}(x,y,z)=(2,2,-2)+k(1,2,-1),\ k\in\mathbb{R}\\ x+2y-z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+k\\ y=2+2k\\ z=-2-k\\ \cancel{2}+k+2(2+2k)-(-2-k)=\cancel{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+k\\ y=2+2k\\ z=-2-k\\ k+4+4k+2+k=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+k \\ y = 2+2k \\ z = -2-k \\ 6k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-1 \\ y = 2+2\times(-1) \\ z = -2+1 \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow B(1,0,-1)$$

Portanto, a medida do comprimento da aresta do cubo é igual a $2\overline{AB} = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,0,-1)-(2,2,-2) = (-1,-2,1)$, vem que $2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2} = 2\sqrt{6}$.

$\therefore$ A medida do volume do cubo é igual a $\left(2\sqrt{6}\right)^3 = 2^3\times\left(\sqrt{6}\right)^3 = 8\times\left(\sqrt{6}\right)^2\times\sqrt{6} = 8\times 6\times\sqrt{6} = 48\sqrt{6}$.

11. Tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x+4\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-(2x-4)\right)=0$, pelo que a recta de equação $y=2x-4$ é assimptota oblíqua do gráfico de g, quando $x\to+\infty$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{g(x)}=\dfrac{1}{2}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x\right)=-4$, pelo que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{g(x)}}{g(x)e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{g(x)}\times\frac{e^{g(x)}}{e^{2x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{g(x)}\times\lim_{x\to+\infty}e^{g(x)-2x} = \frac{1}{2}\times e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)} = \frac{1}{2}\times e^{-4} = \frac{1}{2e^4}$$

Resposta: A

12. Fazendo $z=x+yi$,com $x,y\in\mathbb{R}$, vem:

$$z+2\overline{z}-2\operatorname{Re}(z) = x+yi+2(x-yi)-2x = x+yi+\cancel{2x}-2yi-\cancel{2x} = x-yi=\overline{z}$$

Portanto, $z+2\overline{z}-2\operatorname{Re}(z)=w \Leftrightarrow \overline{z}=w \Leftrightarrow \overline{z}=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i \Leftrightarrow z=-\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

Assim, sendo θ um argumento de w, tem-se que $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{-\sqrt{2}}=\sqrt{3}$ e $\theta\in 3.^{\text{o}}Q$, pelo que $\theta=\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{4\pi}{3}$.

Portanto, um argumento da solução da equação $\dfrac{4\pi}{3}$.

Resposta: C

13. Tem-se que:

- $8i^{27} = 8i^{24+3} = 8\times i^{24}\times i^3 = 8\times i^{4\times 6}\times(-i) = -8\times\left(i^4\right)^6\times i = -8\times 1^6\times i = -8i = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Portanto, as raízes sextas de $8i^{27}$ são dadas por:

$$\sqrt[6]{8i^{27}} = \sqrt[6]{8e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt[6]{8}\,e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}\right)} = \sqrt[6]{2^3}\,e^{i\left(\frac{3\pi+4k\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi+4k\pi}{12}\right)}\ ,\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

Assim, para $k=0$, vem $\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{12}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$; para $k=1$, vem $\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$; para $k=2$, vem $\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$; para $k=3$, vem $\sqrt{2}\,e^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$; para $k=4$, vem $\sqrt{2}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$; para $k=5$, vem $\sqrt{2}\,e^{i\frac{23\pi}{12}}$.

Portanto, A é o afixo de $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, pelo que $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ e C é o afixo de $\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$, pelo que $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

- $z_3 = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha = e^{i\alpha}$

Logo,

$$\frac{z_1\times z_2}{(z_3)^3} = -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\times\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}}{\left(e^{i\alpha}\right)^3} = 2e^{i\pi} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{12}\right)}}{e^{i(3\alpha)}} = 2e^{i\pi} \Leftrightarrow \cancel{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}-3\alpha\right)} = \cancel{2}e^{i\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} - 3\alpha = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow -3\alpha = \pi - \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow -3\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{18} - \frac{2k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- se $k=0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{18}\notin\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$
- se $k=-1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{18}$; $\frac{13\pi}{18}\notin\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$
- se $k=-2 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3} = \frac{25\pi}{18}$; $\frac{25\pi}{18}\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$
- se $k=-3 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{18}+\frac{6\pi}{3} = \frac{37\pi}{18}$; $\frac{37\pi}{18}\notin\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$

$\therefore\ \alpha = \frac{25\pi}{18}$

14.

14.1. Tem-se que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-3x+2}\underset{i)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x-2)}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{=f'(1)}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-2}=f'(1)\times\frac{1}{1-2}=-f'(1)=$$

$$=-\ln\left(e^{1-1}+e^{1-1}\right)=-\ln\left(e^0+e^0\right)=-\ln(1+1)=-\ln 2=\ln\left(2^{-1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

i) Tem-se que $x^2+3x-4=0\underset{F.R.}{\Leftrightarrow}x=1 \vee x=-4$, pelo que $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.

Portanto, como $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-3x+2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{f(1)}{4}\right)$, vem que:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{f(1)}{4}\right)\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{f(1)}{4}\right)\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2=\ln\left(\frac{f(1)}{4}\right)\Leftrightarrow \frac{f(1)}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow f(1)=1$$

Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1. Tem-se que:

- o declive da recta r é dado por $f'(1)=\ln\left(e^{1-1}+e^{1-1}\right)=\ln\left(e^0+e^0\right)=-\ln(1+1)=\ln 2$, pelo que:

$$r: y=x\ln 2+b$$

- as coordenadas do ponto de tangência são $(1, f(1))=(1,1)$, pelo que:

$$1=1\times\ln 2+b\Leftrightarrow b=1-\ln 2\Leftrightarrow b=\ln e-\ln 2\Leftrightarrow b=\ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

$\therefore\ r: y=x\ln 2+\ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

14.2. Tem-se que:

- $f''(x)=\left(\ln\left(e^{x-1}+e^{1-x}\right)\right)'=\dfrac{\left(e^{x-1}+e^{1-x}\right)'}{e^{x-1}+e^{1-x}}=\dfrac{(x-1)'\,e^{x-1}+(1-x)'\,e^{1-x}}{e^{x-1}+e^{1-x}}=\dfrac{e^{x-1}-e^{1-x}}{e^{x-1}+e^{1-x}}$

- $f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-1}-e^{1-x}}{e^{x-1}+e^{1-x}}=0\Leftrightarrow e^{x-1}-e^{1-x}=0\ \wedge\ \underbrace{e^{x-1}+e^{1-x}\neq 0}_{Cond.\ universal\ em\ \mathbb{R}}\Leftrightarrow e^{x-1}=e^{1-x}\Leftrightarrow x-1=1-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$

Fazendo um quadro de variação do sinal de f'', vem:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$e^{x-1}-e^{1-x}$	$-$	0	$+$
$e^{x-1}+e^{1-x}$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Gráfico de f	$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,1]$, tem a concavidade voltada para cima em $[1,+\infty[$ e tem ponto de inflexão em $x=1$.

15. Tem-se que $b^2 g(x)=a^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\Leftrightarrow b^2 g(x)-a^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)=0$.

Seja h a função definida em $[0,\pi]$ por $h(x)=b^2 g(x)-a^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e vamos provar, utilizando o teorema de Bolzano-Cauchy que a função h tem pelo menos um zero.

- h é contínua em $[0,\pi]$ pois é a composição, o produto e a diferença entre funções contínuas no seu domínio (funções trigonométricas e polinomiais).

- $h(0)=b^2 g(0)-a^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{0}{2}\right)=b^2\left(\cos(2\times 0)-\operatorname{sen}(0)\right)-a^2\times 0=b^2\left(\cos(0)-0\right)-0=b^2\times 1=b^2$

Como $b^2>0$, vem que $h(0)>0$

- $h(\pi) = b^2 g(\pi) - a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = b^2\left(\cos(2\pi) - \operatorname{sen}(\pi)\right) - a^2 \times 1 = b^2(1-0) - a^2 = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

Como $a<0$ e $b<0$, vem que $b+a<0$ e como $a<b$ vem que $a-b<0 \Leftrightarrow b-a>0$.

Logo, $h(\pi) = \underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{(b+a)}_{<0} < 0 \Rightarrow h(\pi) < 0$

Portanto, como $h(0)$ e $h(\pi)$ têm sinais contrários, pelo corolário do teorema de Bolzano:

$$\exists c \in]0,\pi[: h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]0,\pi[: b^2 g(c) - a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]0,\pi[: b^2 g(c) = a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)$$

ou seja, a equação $b^2 g(x) = a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ tem pelo menos uma solução em $]0,\pi[$.

FIM