Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

Prova Modelo n.º 1

12.º Ano de Escolaridade

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Uma empresa tem 1501 trabalhadores divididos em três turnos, o $1.°$ turno tem 500 trabalhadores, o $2.°$ tem também 500 trabalhadores e o $3.°$ tem 501 trabalhadores. O director da empresa pretende escolher alguns trabalhadores de um mesmo turno para representarem a empresa num evento. Para tal ou escolhe 100 trabalhadores do $1.°$ turno, ou 101 trabalhadores do $2.°$, ou 102 trabalhadores do $3.°$. De quantas maneiras o pode fazer?

A ${}^{501}C_{101}$ **B** ${}^{502}C_{101}$ **C** ${}^{501}C_{102}$ **D** ${}^{502}C_{102}$

2. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A, B e C três acontecimentos possíveis ($A \subset S$, $B \subset S$ e $C \subset S$). Sabe-se que, A, B e C são independentes e são independentes dois a dois, que $P(A \cup B) = 2P(C)$ e que $P(A) = P(B) = a$, com $0 < a < 1$. Qual é o valor de $P\big(C \big| (A \cup B)\big)$?

A $a - a^2$ **B** $a - 0{,}5a^2$ **C** $2a - a^2$ **D** $0{,}5a - 0{,}5a^2$

Nota: Diz-se que os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$. Diz-se que os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes dois a dois se $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$, $\forall i, j = 1,2, \ldots, n$, com $i \neq j$.

3. Considere um dado tetraédrico viciado, com as faces numeradas de 1 a 4. As probabilidades dos acontecimentos elementares estão apresentadas na tabela:

Acontecimentos Elementares	1	2	3	4
Probabilidades	$\frac{n}{{}^{n}C_2}$	$\frac{n-1}{{}^{n}C_2}$	$\frac{n-2}{{}^{n}C_2}$	$\frac{n-4}{{}^{n}C_2}$

$n \in \mathbb{N}$

Lançam-se este dado quatro vezes e considere-se a face que fica voltada para baixo. Qual é a probabilidade, arredondada às centésimas, de sair a face numerada com 2, no máximo duas vezes?

A $0{,}93$ **B** $0{,}67$ **C** $0{,}25$ **D** $0{,}09$

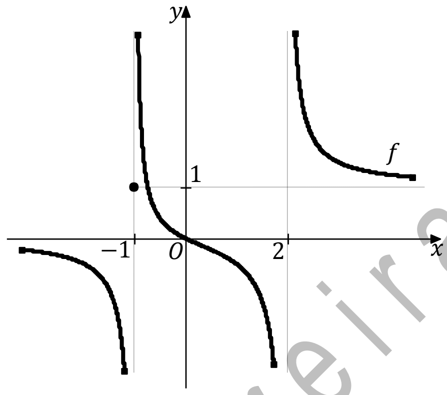
4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^+$ tal que $a = \log_2 x$ e $b = \log_4 y$. A que é igual a expressão $\log_{64}\left(\frac{x^5}{(xy)^2}\right)$?

A $\frac{3a-2b}{6}$ **B** $\frac{a-4b}{6}$ **C** $\frac{3a-4b}{6}$ **D** $\frac{4a-3b}{6}$

5. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Sabe-se que:

- $f(-1) = 1$
- as rectas de equação $x = -1$, $x = 2$ e $y = 0$ são assimptotas do gráfico de f.



Seja (x_n) uma sucessão tal que $x_n \longrightarrow 2$ e $-1 < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Qual é o valor de $\lim f\left(2 - e^{-\frac{1}{2-x_n}}\right)$?

A $-\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** $+\infty$

6. Sejam f, g e h três funções de domínio $\mathbb{R}$, tal que o contradomínio de f é $]0,1[$, a função g é definida por $g(x) = e^{x^3-2x^2+x}$ e a segunda derivada de h é definida por $h''(x) = \ln(f(x)) \times g'(x)$. Qual das afirmações é verdadeira?

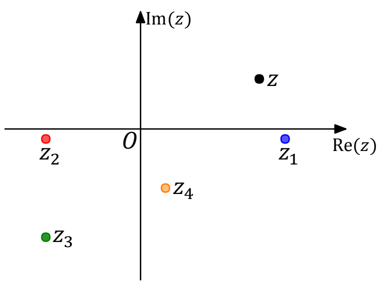
A O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

B O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

C O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e em $[1, +\infty[$.

D O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e em $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$.

7. Na figura estão representados, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos z, z_1, z_2, z_3 e z_4.



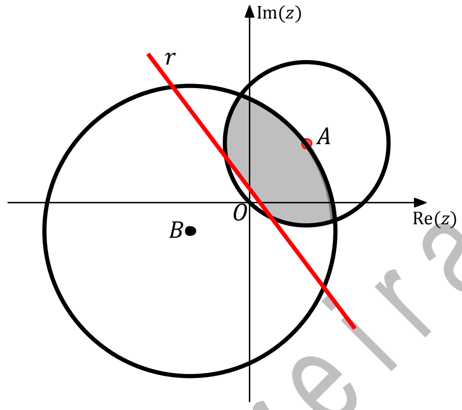
Sabendo que $|z| = 2$, qual deles pode ser igual a $\frac{8}{z^3} - \bar{z}$?

A z_1 **B** z_2 **C** z_3 **D** z_4

8. Considere a figura a sombreado, representada no plano complexo.

Sabe-se que

- o ponto A é a imagem geométrica de uma das raízes cúbicas do número complexo $16\sqrt{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4}$.
- o ponto B é a imagem geométrica do número complexo $-2-i$.
- uma das circunferência está centrada em A e contém a origem, e a outra está centrada em B e contém o ponto A.
- a recta r é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.



Qual das condições define a região sombreada da figura?

A $|z-2-2i| \leq 2\sqrt{2} \ \wedge \ |z+2+i| \leq 5 \ \wedge \ |z-2-2i| \geq |z+2+i|$

B $|z-1-i| \leq \sqrt{2} \ \wedge \ |z+2+i| \leq \sqrt{13} \ \wedge \ |z-1-i| \leq |z+2+i|$

C $|z-1-i| \leq \sqrt{2} \ \wedge \ |z+2+i| \leq \sqrt{13} \ \wedge \ |z-1-i| \geq |z+2+i|$

D $|z-2-2i| \leq 2\sqrt{2} \ \wedge \ |z+2+i| \leq 5 \ \wedge \ |z-2-2i| \leq |z+2+i|$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números $z_1 = 2\text{cis}\frac{5\pi}{12}$ e $z_2 = \frac{-4i^{37}}{1+i} - \frac{1}{i} - i$.

1.1. Mostre que $z_2 = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$ e determine o menor natural n de modo que a imagem geométrica do número complexo $\left(\frac{z_2}{(z_1)^2 \times i}\right)^{3n}$ pertença à bissectriz do terceiro quadrante.

1.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 \times (z_2)^2 - 32\bar{z} = 0 \quad \wedge \quad z \neq 0$ e determine a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da condição. Apresente as soluções na forma trigonométrica.

2. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).

2.1. Mostre que $P(A|\bar{B}) \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) - \frac{P(A)}{P(B)} = P(\bar{A}|B) - 1$.

2.2. Uma caixa contém bolas pretas e encarnadas numeradas com números naturais.

Sabe-se que:

- O número de bolas pretas é o dobro do número de bolas numeradas com um número par.
- Entre as bolas numeradas com um número ímpar, 70% são pretas.
- Entre as bolas numeradas com um número par, dois quintos são encarnadas.

Escolhendo ao acaso uma bola da caixa, qual é a probabilidade de ser preta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 2.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

3. A Marta pretende arrumar numa só fila alguns livros, seis de Divulgação Científica, três romances e n dicionários, com $n \in \mathbb{N}$.

Arrumando os livros ao acaso, qual é a probabilidade de os dicionários ficarem em lugares consecutivos? Duas respostas a este problema são:

$$\frac{10! \times n!}{(n+9)!} \qquad \text{e} \qquad \frac{10}{{}^{n+9}C_n}$$

Numa pequena composição, explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis para cada uma das respostas.
- uma explicação do número de casos favoráveis para cada uma das respostas.

4. Uma substância radioactiva desintegra-se segundo uma expressão do tipo $m(t) = e^{a(2t-b)}$, em que m é a massa, em gramas, t é o tempo em anos e $a, b \in \mathbb{R}$. Uma amostra de uma substância radioactiva é colocada em repouso.

Sabe-se que passados três anos a massa desta substância era de 3 gramas e que $\frac{m(t+5)}{m(t)} = 0{,}7, \forall t \geq 0$. Interprete o valor de $\frac{m(t+5)}{m(t)}$ no contexto do problema e determine a quantidade de substância colocada em repouso. Apresente o resultado em gramas, arredondado às centésimas. Caso faça arredondamentos nos cálculos intermédios, utilize pelo menos quatro casas decimais.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+\ln(2x)}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 2x - \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

5.1. Determine, por definição, $f'(1)$ e mostre que uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é $y = \ln\left(\frac{e^{x+2}}{2^{x-2}}\right)$.

5.2. Verifique se existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ e estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indique as suas equações.

5.3. Estude, para $x \in \mathbb{R}^+$, a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos, determinando-os caso existam.

6. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tais que, f', g', f'' e g'', todas de domínio $\mathbb{R}$, satisfazem as condições:

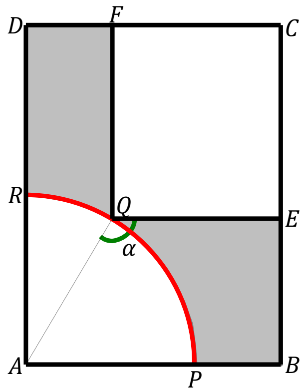
- $f''(x) > 0$ e $g''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f'(1) = 0$ e $g'(2) = 0$

Mostre que existe pelo menos um $c \in]0,3[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de f e g no ponto de abcissa c são paralelas.

7. Na figura estão representados um retângulo $[ABCD]$ e o retângulo $[ECFQ]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AD} = 4$, $\overline{AB} = 3$ e $\overline{AD} = 2 \times \overline{AR}$
- O ponto Q desloca-se sobre o arco RP.
- α é a amplitude do ângulo AQE, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.



Seja h a função que dá a área da região sombreada da figura em função de α.

7.1. Mostre que $h(\alpha) = 6\,\text{sen}\,\alpha - 8\cos\alpha + 2\,\text{sen}(2\alpha) - \pi$.

7.2. Recorrendo à calculadora gráfica determine os valores de α de modo que a área da região sombreada da figura seja maior que o dobro da área sector RAQ.

Na sua resposta deve:

- escrever a área do sector RAQ em função de α.
- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar os valores que α que são solução do problema.

Apresente todos os valores que retirar da calculadora arredondados às centésimas.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. D **2.** B **3.** A **4.** C **5.** A **6.** C **7.** B **8.** D

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. $n = 3$

1.2. $\left\{2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right), 2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{8}, 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{8}, 2\operatorname{cis}\frac{11\pi}{8}\right\}$; $\text{Área}_{\text{polígono}} = 8$

2.2. $\frac{2}{3}$

4. A cada cinco anos a massa da substância radioactiva reduz-se 30%; $m(0) \approx 3{,}72$ gramas ($a \approx -0{,}0357$ e $b \approx 36{,}8015$)

5.1. $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$

5.2. Não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, porque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. A.V.: $x = 0$; A.O.: $y = 2x + 1$, quando $x \longrightarrow -\infty$; A.H.: $y = 3$, quando $x \longrightarrow +\infty$.

5.3. Para $x \in \mathbb{R}^+$, a função f é crescente em $\left]0, \frac{e}{2}\right]$, é decrescente em $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right[$ e tem máximo em $x = \frac{e}{2}$ que é $f\left(\frac{e}{2}\right) = 3 + \frac{2}{e}$.

7.2. $h(\alpha) > 4\alpha - 2\pi \Leftrightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, a\right[$, com $a \approx 2{,}86$.