EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 1 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. O número de maneiras do director fazer a escolha é ${}^{500}C_{100} + {}^{500}C_{101} + {}^{501}C_{102}$ (pois tem de escolher **ou** 100 trabalhadores do $1.°$ turno, **ou** 101 trabalhadores do $2.°$, **ou** 102 trabalhadores do $3.°$) Assim, tendo em conta as propriedades do triângulo de Pascal, vem ${}^{500}C_{100} + {}^{500}C_{101} + {}^{501}C_{102} = {}^{501}C_{101} + {}^{501}C_{102} = {}^{502}C_{102}$.

Resposta: D

2. Como A, B e C são independentes e são independentes dois a dois, então:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C),\ P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \text{ e } P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

Assim:

$$P\big(C \big| (A \cup B)\big) = \frac{P(C\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P((C\cap A)\cup(C\cap B))}{2P(C)} = \frac{P(C\cap A)+P(C\cap B)-P\big(\overbrace{(C\cap A)\cap(C\cap B)}^{C\cap C\cap A\cap B = C\cap A\cap B}\big)}{2P(C)} =$$

$$= \frac{P(C\cap A)+P(C\cap B)-P(A\cap B\cap C)}{2P(C)} = \frac{P(C)\times P(A)+P(C)\times P(B)-P(A)\times P(B)\times P(C)}{2P(C)} =$$

$$= \frac{\cancel{P(C)}\times\big(P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)\big)}{2\cancel{P(C)}} = \frac{P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)}{2} =$$

$$= \frac{a+a-a\times a}{2} = \frac{2a-a^2}{2} = a - 0{,}5a^2$$

Outra resolução: Da resolução anterior conclui-se que os acontecimentos C e $A \cup B$ são independentes, pois:

$$P\big(C \cap (A \cup B)\big) = P(C) \times \big(\overbrace{P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)}^{P(A\cup B)}\big) = P(C) \times P(A \cup B)$$

Logo, $P\big(C \big| (A \cup B)\big) = P(C) = \frac{P(A\cup B)}{2} = \frac{P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)}{2} = a - 0{,}5a^2$

Resposta: B

3. Tem-se:

$$\frac{n}{{}^nC_2}+\frac{n-1}{{}^nC_2}+\frac{n-2}{{}^nC_2}+\frac{n-4}{{}^nC_2}=1 \Leftrightarrow n+n-1+n-2+n-4={}^nC_2 \Leftrightarrow 4n-7=\frac{n!}{2!\times(n-2)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n-7=\frac{n\times(n-1)\times\cancel{(n-2)!}}{2\times\cancel{(n-2)!}} \Leftrightarrow 8n-14=n^2-n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2-9n+14=0 \Leftrightarrow n=2 \quad \vee \quad n=7$$

Como n não pode ser 2, então $n=7$. (n não pode ser 2 porque se assim fosse a probabilidade de sair a face numerada com o número 1 seria 2 e a probabilidade de sair a face numerada com o número 4 seria negativa)

Seja X a variável aleatória «número de vezes que a face numerada com número 2 fica voltada para baixo em quatro lançamentos». Tem-se que $X \sim \text{Bin}\left(4, \frac{7-1}{{}^7C_2}=\frac{2}{7}\right)$ e pretende-se determinar $P(X \leq 2)$. Assim:

$$P(X \leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$={}^4C_0\times\left(\frac{2}{7}\right)^0\times\left(\frac{5}{7}\right)^4+{}^4C_1\times\left(\frac{2}{7}\right)^1\times\left(\frac{5}{7}\right)^3+{}^4C_2\times\left(\frac{2}{7}\right)^2\times\left(\frac{5}{7}\right)^2 \approx 0{,}93$$

Nota: A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 ou 4, ou seja, $X=\{0,1,2,3,4\}$.

Resposta: A

4. Tem-se:

$$\log_{64}\left(\frac{x^5}{(xy)^2}\right)=\log_{64}\left(\frac{x^5}{x^2y^2}\right)=\log_{64}\left(\frac{x^3}{y^2}\right)=\log_{64}(x^3)-\log_{64}(y^2)=3\log_{64}x-2\log_{64}y=$$

$$=3\frac{\log_2 x}{\log_2 64}-2\frac{\log_4 y}{\log_4 64}=3\frac{a}{\log_2(2^6)}-2\frac{b}{\log_4(4^3)}=\frac{3a}{6}-\frac{2b}{3}=\frac{3a-4b}{6}$$

Resposta: C

5. Tem-se que $x_n \longrightarrow 2$, portanto $2-x_n \longrightarrow 0$. Como $-1<x_n<2$, vem:

$$-1<x_n<2 \Leftrightarrow -2<-x_n<1 \Leftrightarrow 0<2-x_n<3$$

Portanto os termos da sucessão $(2-x_n)$ são positivos, logo $2-x_n \longrightarrow 0^+$. Assim:

$$\lim\left(2-e^{-\frac{1}{2-x_n}}\right)=2-e^{-\frac{1}{0^+}}=2-e^{-\infty}=2-0^+=2^- \quad \left(e^{-\frac{1}{2-x_n}}>0, \forall n \in \mathbb{N}\right)$$

Assim, pela definição de limite segundo Heine, tem-se $\lim f\left(2-e^{-\frac{1}{2-x_n}}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$.

Resposta: A

6.

▪ O contradomínio da função f é $]0,1[$, ou seja $0 < f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Como a função logarítmica é negativa no intervalo $]0,1[$, então $\ln\left(f(x)\right) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

▪ Tem-se $g'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' e^{x^3-2x^2+x} = (3x^2 - 4x)e^{x^3-2x^2+x}$. Assim:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 4x + 1)e^{x^3-2x^2+x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \vee \quad \underbrace{e^{x^3-2x^2+x} = 0}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = 1$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função h'', vem:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$\ln\left(f(x)\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
i) $g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\cap$	p.i.	$\cup$	p.i.	$\cap$

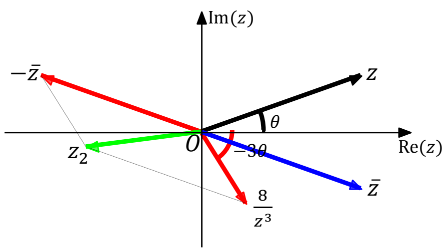
i) Observa que o sinal de g' depende apenas do sinal de $3x^2 - 4x + 1$ porque $e^{x^3-2x^2+x} > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e em $[1, +\infty[$.

Resposta: C

7. Seja $z = 2\text{cis}\theta$. Assim, $\frac{8}{z^3} = \frac{8}{(2\text{cis}\theta)^3} = \frac{8}{2^3\text{cis}(3\theta)} = \frac{8\text{cis}(0)}{8\text{cis}(3\theta)} = \text{cis}(-3\theta)$ e portanto $\left|\frac{8}{z^3}\right| = 1$.

Vamos utilizar a regra do paralelogramo para resolver este problema:



Portanto $\frac{8}{z^3} - \bar{z}$ só pode ser igual a z_2.

Resposta: B

8.

▪ Tem-se $\sqrt[3]{16\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[3]{\sqrt{16^2 \times 2}}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{512}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3\pi+8k\pi}{4}}{3}\right) = \sqrt[6]{2^9}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right) =$

$= \sqrt{2^3}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right)$, com $k \in \{0,1,2\}$

Para $k = 0$ obtém-se a raíz cúbica de $16\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ que cuja imagem geométrica é o ponto A. Assim, vem:

$$A \longrightarrow 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2i$$

Também se conclui que $\overline{AO} = 2\sqrt{2}$. Assim a circunferência de centro em A que contém o ponto O pode ser definida por $|z - (2 + 2i)| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 2 - 2i| = 2\sqrt{2}$

▪ Tem-se $\overline{AB} = |-2 - i - (2 + 2i)| = |-4 - 3i| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Assim a circunferência de centro em B que contém o ponto A pode ser definida por $|z - (-2 - i)| = 5 \Leftrightarrow |z + 2 + i| = 5$

▪ A recta r é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$. Assim pode ser definida por $|z - 2 - 2i| = |z + 2 + i|$.

Portanto a condição define a região sombreada da figura pode ser:

$$|z - 2 - 2i| \leq 2\sqrt{2} \;\wedge\; |z + 2 + i| \leq 5 \;\wedge\; |z - 2 - 2i| \leq |z + 2 + i|$$

Resposta: D

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.

1.1.

▪ $z_2 = \frac{-4i^{37}}{1+i} - \frac{1}{i} - i = \frac{-4i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} - \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} - i = \frac{-4i+4i^2}{1^2-i^2} - \frac{-i}{-i^2} - i = \frac{-4i-4}{2} + \frac{i}{1} - i = -2 - 2i + i - i =$

$= -2 - 2i \Leftrightarrow z_2 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$

Cálculos Auxiliares:

▪ $i^{37} = i^{4\times9+1} = i^1 = i$

▪ Para escrever $-2 - 2i$ na forma trigonométrica, vem: $|-2 - 2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $-2 - 2i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{-2}{-2} = 1$ e $\theta \in 3.^{\circ}$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$. Assim $-2 - 2i = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$.

▪ Tem-se:

$$\left(\frac{z_2}{(z_1)^2\times i}\right)^{3n}=\left(\frac{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{\left(2\text{cis}\frac{5\pi}{12}\right)^2\times\text{cis}\frac{\pi}{2}}\right)^{3n}=\left(\frac{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{2^2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\times 2\right)\times\text{cis}\frac{\pi}{2}}\right)^{3n}=\left(\frac{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{4\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{3n}=\left(\frac{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{4\text{cis}\frac{4\pi}{3}}\right)^{3n}=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)\right)^{3n}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)^{3n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3n}\text{cis}\left(-\frac{3n\pi}{12}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3n}\text{cis}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)$$

A imagem geométrica do número complexo $\left(\frac{z_2}{(z_1)^2\times i}\right)^{3n}$ pertence à bissectriz do terceiro quadrante se o seu argumento for da forma $\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Assim:

$$-\frac{n\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{n}{4}=\frac{5}{4}+2k, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-n=5+8k, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=-5-8k, k\in\mathbb{Z}$$

Logo, $n=3$ $(k=-1)$.

1.2.

▪ Fazendo $z=\rho\text{cis}\theta$, com $z\neq 0$, vem:

$$z^3\times(z_2)^2-32\bar{z}=0\Leftrightarrow(\rho\text{cis}\theta)^3\times\left(2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}\right)^2=32\rho\text{cis}(-\theta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\rho^3\text{cis}(3\theta)\times\left(2\sqrt{2}\right)^2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\times 2\right)=32\rho\text{cis}(-\theta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\rho^3\text{cis}(3\theta)\times 8\text{cis}\frac{5\pi}{2}=32\rho\text{cis}(-\theta)\Leftrightarrow 8\rho^3\text{cis}\left(3\theta+\frac{\pi}{2}\right)=32\rho\text{cis}(-\theta)\Leftrightarrow$$

$$\frac{5\pi}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8\rho^3=32\rho\\3\theta+\frac{\pi}{2}=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^3-4\rho=0\\4\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho(\rho^2-4)=0\\\theta=-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=0\ \vee\ \rho^2-4=0\\\theta=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=0\ \vee\ \rho=2\qquad(\rho>0)\\\theta=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Se $\rho = 0$ então $z = 0$ que não é solução, pois $z \neq 0$. Se $\rho = 2$ e substituindo k por valores pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, obtém-se:

$$z = 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right) \ \vee \ z = 2\text{cis}\frac{3\pi}{8} \ \vee \ z = 2\text{cis}\frac{7\pi}{8} \ \vee \ z = 2\text{cis}\frac{11\pi}{8}$$

Portanto, o conjunto solução da condição $z^3 \times (z_2)^2 - 32\bar{z} = 0 \ \wedge \ z \neq 0$ é:

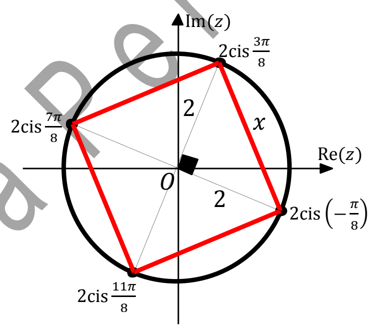
$$\left\{2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right), 2\text{cis}\frac{3\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{7\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{11\pi}{8}\right\}$$

▪ O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da condição é o quadrado inscrito na circunferência de centro na origem e raio 2 que está representado na figura.

Sendo x a medida do lado desse quadrado, vem:

$\text{Área}_{\text{quadrado}} = x^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ (usando o teorema de Pitágoras)

A área pedida é 8.



2.

2.1. Tem-se

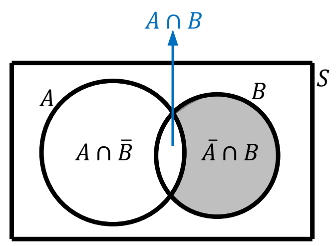
$$P(A|\bar{B}) \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) - \frac{P(A)}{P(B)} = P(A|\bar{B}) \times \frac{1 - P(B)}{P(B)} - \frac{P(A)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A \cap \bar{B})}{\cancel{P(\bar{B})}} \times \frac{\cancel{P(\bar{B})}}{P(B)} - \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B}) - P(A)}{P(B)} \underset{i)}{=} \frac{\cancel{P(A)} - P(A \cap B) - \cancel{P(A)}}{P(B)} =$$

$$= \frac{-P(A \cap B)}{P(B)} = -P(A|B) = -\left(1 - P(\bar{A}|B)\right) = P(\bar{A}|B) - 1$$

$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$

i)



$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Ou, de uma outra forma, como $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) - P(B) = -P(A \cap B)$, ao chegarmos ao passo $\frac{-P(A \cap B)}{P(B)}$, podíamos resolver da seguinte forma:

$$\frac{-P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A} \cap B) - P(B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} - \frac{P(B)}{P(B)} = P(\bar{A}|B) - 1$$

Q.E.D.

2.2. Considere-se os acontecimentos A: «a bola é preta» e B: «a bola está numerada com um número par». Do enunciado vem $P(A) = 2P(B)$, $P(A|\bar{B}) = 0{,}7$ e $P(\bar{A}|B) = \frac{2}{5} = 0{,}4$. Assim, por 2.1. vem:

$$0{,}7 \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) - \frac{2\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = 0{,}4 - 1 \Leftrightarrow \frac{0{,}7}{P(B)} - 0{,}7 - 2 = -0{,}6 \Leftrightarrow \frac{0{,}7}{P(B)} = 2{,}1 \Leftrightarrow P(B) = \frac{0{,}7}{2{,}1} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Logo $P(A) = 2P(B) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Outra resolução:

Considere-se os acontecimentos A: «a bola é preta» e B: «a bola está numerada com um número par» e a seguinte tabela:

	A	$\bar{A}$	p.m.
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
p.m.	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Tendo em conta a tabela, tem-se:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(B) = P(B) - P(B) \times P(\bar{A}|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow$$

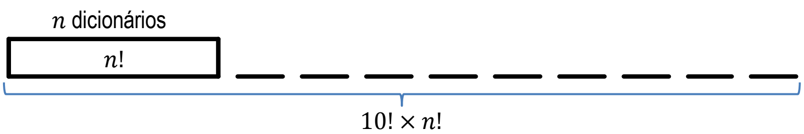
$$\Leftrightarrow P(B) = -0{,}4P(B) + 0{,}7 \times (1 - P(B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1{,}4P(B) = 0{,}7 - 0{,}7P(B) \Leftrightarrow 2{,}1P(B) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Logo $P(A) = 2P(B) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

3. Pela regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que os acontecimentos elementares sejam equiprováveis.

Primeira resposta: O número de casos possíveis é $(n+9)!$ (número de maneiras de $n+9$ livros permutarem entre si). Para o número de casos favoráveis vamos começar por agrupar os n dicionários num bloco. Este bloco e os restantes nove livros permutam entre si de $10!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras os n dicionários que formam o bloco permutam entre si de $n!$ maneiras distintas. Assim, o número de casos favoráveis é $10! \times n!$ e a probabilidade pedida pode ser dada por $\frac{10! \times n!}{(n+9)!}$. Repare na figura seguinte:



Segunda resposta: Para esta resposta vamos apenas considerar a escolha das posições para os n dicionários. Assim, o número de casos possíveis é ${}^{n+9}C_n$ (número de maneiras de escolher n posições de entre as $n+9$ disponíveis). O número de casos favoráveis é 10 (ficando os n dicionários juntos, num bloco, o bloco pode ocupar da posição 1 à posição n, da 2 à $n+1$, da 3 à $n+2$, da 4 à $n+3$, da 5 à $n+4$, da 6 à $n+5$, da 7 à $n+6$, da 8 à $n+7$, da 9 à $n+8$ ou da 10 à $n+9$) Assim, probabilidade pedida pode ser dada por $\frac{10}{{}^{n+9}C_n}$.

Observe que $\frac{10}{{}^{n+9}C_n} = \frac{10}{\frac{(n+9)!}{n!\times(n+9-n)!}} = \frac{10}{\frac{(n+9)!}{n!\times 9!}} = \frac{10\times 9!\times n!}{(n+9)!} = \frac{10!\times n!}{(n+9)!}$.

4.

- $\frac{m(t+5)}{m(t)} = 0{,}7$ significa que a cada cinco anos a massa desta substância radioactiva reduz-se 30%. $(1-0{,}7=0{,}3)$

- Pretende-se determinar $m(0) = e^{a(2\times 0-b)} = e^{-ab}$. Tem-se:

$$\begin{cases} m(3)=3 \\ \frac{m(t+5)}{m(t)} = 0{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a(2\times 3-b)} = 3 \\ \frac{e^{a(2(t+5)-b)}}{e^{a(2t-b)}} = 0{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a(6-b)} = 3 \\ e^{a(2t+10-b)-a(2t-b)} = 0{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(6-b) = \ln 3 \\ e^{\cancel{2at}+10a\cancel{-ab}\cancel{-2at}\cancel{+ab}} = 0{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ e^{10a} = 0{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 10a = \ln(0{,}7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(0{,}7)}{10}(6-b) = \ln 3 \\ a = \frac{\ln(0{,}7)}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-b = \frac{10\ln 3}{\ln(0{,}7)} \\ a = \frac{\ln(0{,}7)}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-\frac{10\ln 3}{\ln(0{,}7)} = b \\ a = \frac{\ln(0{,}7)}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \approx 36{,}8015 \\ a \approx -0{,}0357 \end{cases}$$

Portanto $m(0) = e^{0{,}0357\times 36{,}8015} \approx 3{,}72$. A quantidade de substância que foi colocada em repouso foi $3{,}72$ gramas.

5.

5.1.

- Tem-se que $f(1) = \frac{3\times 1+\ln(2\times 1)}{1} = 3+\ln 2$. Assim:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3x+\ln(2x)}{x}-(3+\ln 2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\cancel{3x}+\ln(2x)\cancel{-3x}-x\ln 2}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x)-x\ln 2}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x)-x\ln 2}{x-1} \underset{i)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \frac{1}{1}\times\lim_{y\to 0}\frac{\ln(2(y+1))-(y+1)\ln 2}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(2y+2)-\ln 2-y\ln 2}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2y+2}{2}\right)}{y} - \lim_{y\to 0}\frac{y\ln 2}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y} - \ln 2 = 1-\ln 2 = \ln e - \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

i) Mudança de variável: Se $x\to 1$ então $x-1\to 0$. Seja $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$, $y\to 0$.

▪ Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1. Assim, $m_t = f'(1) = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$ e uma equação da recta t é do tipo $y = x\ln\left(\frac{e}{2}\right) + b$. O ponto de coordenadas $\left(1, f(1)\right) = (1, 3 + \ln 2)$ pertence à recta t, logo:

$$3 + \ln 2 = 1 \times \ln\left(\frac{e}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = \ln(e^3) + \ln 2 - \ln\left(\frac{e}{2}\right) \Leftrightarrow b = \ln(2e^3) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{2e^3}{\frac{e}{2}}\right) \Leftrightarrow \ln(4e^2)$$

Portanto t: $y = x\ln\left(\frac{e}{2}\right) + \ln(4e^2) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e}{2}\right)^x + \ln(4e^2) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^x}{2^x} \times 4e^2\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^x \times 2^2 \times e^2}{2^x}\right) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^{x+2}}{2^{x-2}}\right)$$

5.2.

▪ Tem-se:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(2x - \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}}\right) = 2\times 0 - \frac{0^2+0+1}{0\times\sqrt{0^2+1}} = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{3x+\ln(2x)}{x} = \frac{3\times 0+\ln(0^-)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ porque $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Conclui-se também que a recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical do gráfico de f. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais.

▪ Assimptotas não verticais.

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x - \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x} - \frac{x^2+x+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 2 - \frac{1+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}}{\sqrt{+\infty+1}} = 2 - \frac{1-0+0}{+\infty} = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 - 0 = 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty}\left(\cancel{2x} - \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}} - \cancel{2x}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2+x+1}{x\underbrace{\sqrt{x^2}}_{-x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2+x+1}{-x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{+\infty}}} = \frac{1-0+0}{\sqrt{1+0}} = 1$$

Nota: $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & \text{se} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x<0\end{cases}$. Como $x\longrightarrow -\infty$ pode assumir-se que x é negativo, logo $\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

Logo, a recta de equação $y=2x+1$ é assimptota oblíqua do gráfico de f, quando $x\longrightarrow -\infty$.

Quando $x\longrightarrow +\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x+\ln(2x)}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(2x)}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x^2}+\frac{\ln(2x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\times\frac{\ln(2x)}{2x}\right)=$$

$$=\frac{3}{+\infty}+\frac{2}{+\infty}\times 0=0+0\times 0=0$$

Se $x\to+\infty$ então $2x\to+\infty$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(2x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{\ln(2x)}{x}\right)=3+\lim_{x\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln(2x)}{2x}\right)=3+2\times 0=3$$

Se $x\to+\infty$ então $2x\to+\infty$

Logo, a recta de equação $y=3$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x\longrightarrow +\infty$.

5.3. Para $x\in\mathbb{R}^+$, tem-se:

▪ $f'(x)=\dfrac{\left(3+\frac{2}{2x}\right)\times x-(3x+\ln(2x))\times 1}{x^2}=\dfrac{3x+\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}-3x-\ln(2x)}{x^2}=\dfrac{1-\ln(2x)}{x^2}$

▪ $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln(2x)}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln(2x)=0 \ \wedge\ x^2\neq 0\Leftrightarrow\ln(2x)=1\ \wedge\ x\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=e^1\ \wedge\ x\neq 0\Leftrightarrow x=\frac{e}{2}\ \wedge\ x\neq 0$, como $x\in\,]-\infty,0[$, tem-se $x=-1$.

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f', vem:

x	0		$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$1-\ln(2x)$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
$f(x)$	n.d.	↗	min.	↘

A função f é crescente em $\left]0,\frac{e}{2}\right]$, é crescente em $\left[\frac{e}{2},+\infty\right[$ e tem máximo em $x=\frac{e}{2}$ que é:

$$f\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{3\times\frac{e}{2}+\ln\left(2\times\frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}}=\frac{\frac{3e}{2}+\ln e}{\frac{e}{2}}=\frac{\frac{3e}{2}+1}{\frac{e}{2}}=\frac{\frac{3e+2}{2}}{\frac{e}{2}}=\frac{3e+2}{e}=3+\frac{2}{e}$$

6. O declive da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto de abcissa c é a derivada da função em $x = c$. Vamos então mostrar que existe pelo menos um $c \in]0,3[$ tal que $f'(c) = g'(c) \Leftrightarrow f'(c) - g'(c) = 0$. Ao mostrarmos que para esse ponto c as derivadas são iguais estamos a mostrar que as rectas tangentes aos gráfico de f e g têm o mesmo declive e portanto são paralelas.

▪ Considere-se a função h de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = f'(x) - g'(x)$. Como f'' e g'' têm domínio $\mathbb{R}$, então $f''(x)$ e $g''(x)$ são finitas para todo o $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f' e g' são deriváveis em $\mathbb{R}$ (isto é, têm derivada finita em $\mathbb{R}$) e portanto são contínuas em $\mathbb{R}$.

Logo, h é contínua em $\mathbb{R}$, pois é diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$ o que implica que h é contínua em $[0,3] \subset \mathbb{R}$.

▪ Tem-se que $f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, logo f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e como $f'(1) = 0$, 1 é o seu único zero. Assim, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[$ e $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$.

▪ Tem-se que $g''(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, logo f' é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e como $f'(2) = 0$, 2 é o seu único zero. Assim, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$ e $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[$.

▪ $h(0) = \underbrace{f'(0)}_{<0} - \underbrace{g'(0)}_{>0} < 0$ e $h(3) = \underbrace{f'(3)}_{>0} - \underbrace{g'(3)}_{<0} > 0$.

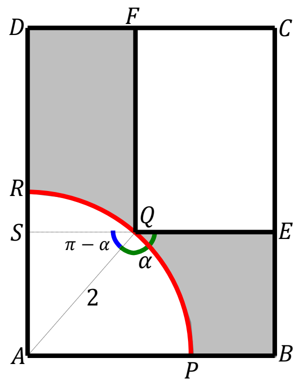
Assim, como h é contínua em $[0,3]$ e $h(0)$ e $h(3)$ têm sinais contrários (e portanto $h(0) \times h(3) < 0$), então pelo corolário do teorema de Bolzano:

$$\exists c \in]0,3[: h(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = g'(c)$$

Ou seja, existe pelo menos um $c \in]0,3[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de f e g no ponto de abcissa c são paralelas.

7.

7.1. Considere-se a figura ao lado.



A amplitude do ângulo SQA é $\pi - \alpha$. Assim:

▪ $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AS}}{2} \Leftrightarrow \overline{AS} = 2\operatorname{sen}(\pi - \alpha) \underset{i)}{\Leftrightarrow} \overline{AS} = 2\operatorname{sen}\alpha$

▪ $\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{QS}}{2} \Leftrightarrow \overline{QS} = 2\cos(\pi - \alpha) \underset{i)}{\Leftrightarrow} \overline{AS} = -2\cos\alpha$

Logo:

$$A_{\text{sombreada}} = A_{[ABCD]} - A_{\text{sector}RAP} - A_{[ECFQ]} =$$

$$= 4 \times 3 - \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \times 2^2 - \overline{QE} \times \overline{EC} =$$

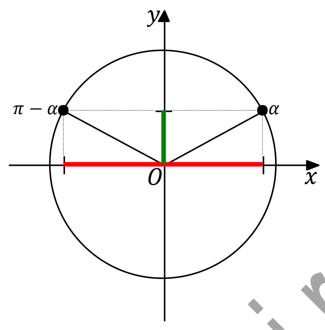
$$= 12 - \frac{\pi}{4} \times 4 - (3 - \overline{QS}) \times (4 - \overline{AS}) =$$

$$= 12 - \pi - (3 + 2\cos\alpha) \times (4 - 2\operatorname{sen}\alpha) =$$

$$= 12 - \pi - 12 + 6\operatorname{sen}\alpha - 8\cos\alpha - 2 \times \overbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)} =$$

$$= \underbrace{6\operatorname{sen}\alpha - 8\cos\alpha - 2\operatorname{sen}(2\alpha) - \pi}_{h(\alpha)}$$

i) Figura auxiliar:



$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

7.2.

▪ A amplitude do ângulo RAQ é $\pi - \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \cancel{\pi} - \frac{\pi}{2} - \cancel{\pi} + \alpha = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Portanto a área do sector RAQ é dada por $\frac{\alpha - \frac{\pi}{2}}{2} \times 2^2 = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \times 2 = 2\alpha - \pi$.

▪ Pretende-se determinar $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tal que $h(\alpha) > 2 \times (2\alpha - \pi) \Leftrightarrow h(\alpha) > 4\alpha - 2\pi$. Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = h(\alpha)$ e $y_2 = 4\alpha - 2\pi$ na janela de visualização $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [0, 8]$.

Assim, $h(\alpha) > 4\alpha - 2\pi \Leftrightarrow \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, a\right[$, com $a \approx 2{,}86$.