Proposta de Teste Global n.º 2

Temas: Exponenciais e Logaritmos, Limites, Continuidade, Teorema de Bolzano e Assimptotas

Matemática A – 12.º Ano – Fevereiro de 2015

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a b \times \log_c a = 2$.

Qual é o valor de $\log_c\left(\dfrac{b^3}{c^7\sqrt{b}}\right)$?

A -2 **B** -1 **C** 1 **D** 2

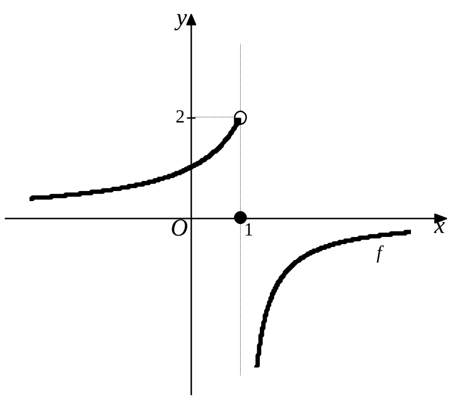
2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \log\left(2\sqrt{25^{x^2}}\right) + \log\left(625 \times 2^{x^2+3}\right)$.

Qual das seguintes expressões também pode definir a função g?

A $g(x) = 2x^2 + 3$ **B** $g(x) = x^2 + 4$ **C** $g(x) = 2x^2 + 4$ **D** $g(x) = x^2 + 3$

3. Sejam f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico está parcialmente representado na figura e função g a função de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ definida por $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x-1}$.

Sabe-se que:



- $f(1) = 0$
- a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de f
- a recta de equação $y = 0$ é assimptota do gráfico de f, quando $x \to \pm\infty$

Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \dfrac{n^3 - \ln(3n)}{n^3}$.

Qual é o valor de $\lim(f \times g)(u_n)$?

A $-\infty$ **B** 0 **C** 2 **D** 4

4. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0^-}\left(\left(x^3+x\right)e^{-\frac{3}{x}}\right)$?

A $-\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** $+\infty$

5. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{se} \quad x<1 \\ \dfrac{e^{b^2x-b^2}-1}{\sqrt{x}-x} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}, \text{ com } b \in \mathbb{R}^+$$

Sabendo que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe, qual é o valor de b?

A -1 **B** 1 **C** 2 **D** 4

6. Seja h uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ tais que $h(4)=-8$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ se tem $h\left(\dfrac{2}{n}\right)=(-2)^n$.

Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

A A equação $h(x)=-h\left(\dfrac{x}{2}\right)$ é possível em $[1,4]$.

B O contradomínio da função h é $\mathbb{R}$.

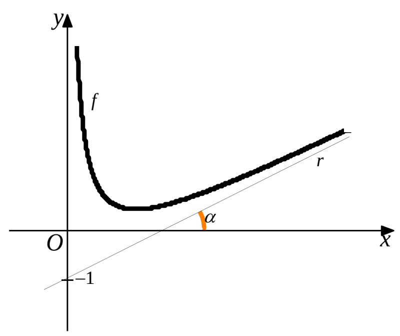
C A função h não tem zeros no intervalo $[2,4]$.

D A função h tem infinitos zeros.

7. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(g(x)-4+2x\right)=0$. Na figura está representado parte do gráfico da função f.

Sabe-se que:

- a recta r, de inclinação α, é assimptota do gráfico de f
- $2\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)$
- a recta r intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,-1)$



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{2}-\dfrac{f(x)g(x)}{x}\right)$?

A -4 **B** -2 **C** 2 **D** 4

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Para um certo valor real k a expressão $g(x)=\left(3^k-3^{-k+3}\right)^x$ define uma função exponencial cujo ponto de coordenadas $(2,36)$ pertence ao seu gráfico.

Qual é o valor de k?

2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=\log_3\left(36x^3\right)-\log_9\left(4x^2\right)$.

2.1. Mostre que $h(x)=2+\log_3\left(2x^2\right),\ \forall x\in\mathbb{R}^+$.

2.2. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $h(x)-\log_3(2x+1)\le\log_3(7x+4)$.

2.3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{2x^2-8} & \text{se} \quad x<2\\[2ex] -\dfrac{1}{\ln 3} & \text{se} \quad x=2\\[2ex] \dfrac{h(x)-\log_3(72)}{2-x} & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

a) Estude a continuidade da função f em $x=2$. No caso de não ser contínua em $x=2$, indique se é contínua à sua direita ou à sua esquerda.

b) Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indique as suas equações.

3. O número de bactérias numa cultura, em centenas, varia, em função do tempo, em horas, de acordo com a função:

$$B(t)=\begin{cases}k\times 1{,}1^{bt} & \text{se} \quad 0\le t\le 10\\[2ex] \dfrac{k\times 1{,}1^{bt}}{0{,}5+0{,}5\times 1{,}1^{bt-20}} & \text{se} \quad t>10\end{cases}$$

, com k e b, constantes reais positivas.

3.1. Sabendo que a função B é contínua, mostre que $b=2$.

3.2. Nas primeiras dez horas, qual é o aumento, em percentagem, da população de bactérias a cada duas horas? Apresente o resultado arredondado às décimas.

3.3. Determine o instante depois das primeiras dez horas em que o número de bactérias na cultura é igual a dez vezes o número de bactérias inicial. Apresente o resultado em horas e minutos, minutos arredondados às unidades. Caso proceda a arredondamentos, conserve no mínimo quatro casas decimais.

3.4. Com o passar do tempo, o número de bactérias na cultura tende para 2691. Qual é o valor de k? Apresente o resultado arredondado às unidades.

4. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases} x\left(\ln(2x+a)-\ln(2x+b)\right)-4 & \text{se} \quad x\geq 0 \\ \dfrac{(ax)^3+8ax}{\ln\left(1-a^2x\right)} & \text{se} \quad x<0 \end{cases}, \text{ com } a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Sabe-se que g é contínua em $\mathbb{R}$ e que o seu gráfico admite uma assimptota de equação $y=-5$, quando $x\to+\infty$. Quais são os valores que a e b podem tomar?

5. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=e^{x+2}-3x$.

5.1. Estude a função h quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indique as suas equações.

5.2. Determine:

a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{h(x)-1+3x}{\ln(7x+15)}$

b) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{h(x)-h(c)}{x^2-cx}$, com $c\neq 0$. Apresente o resultado em função de c.

5.3. Seja r a recta de equação $y-2x=10$.

a) Sem recorrer à calculadora, nem mesmo para eventuais cálculos numéricos, mostre que o gráfico de h e a recta r intersectam-se pelo menos uma vez no intervalo $[-2,0]$.

Sugestão: tenha em conta que $2<e<3$.

b) A recta r intersecta o gráfico da função h em dois pontos: P e Q.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[OPQ]$.

Na sua resposta deve:

- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- assinalar os pontos P e Q indicar as suas coordenadas, arredondadas às centésimas;
- determinar a área do triângulo $[OPQ]$, indicando o seu valor arredondado às unidades.

6. Sejam f, g e h três funções de domínio $\mathbb{R}$ e a e b dois números reais tais que:

- f e g são contínuas em $\mathbb{R}$
- $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x \Leftrightarrow x = a \quad \vee \quad x = b$
- 2 e 3 pertencem ao intervalo $]a,b[$
- $h(x) = \left(f(x) - a - 1\right) g(x)$

Mostre que a função h tem pelo menos um zero.

7. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a recta de equação $y = 6x - 2$ é assimptota oblíqua do seu gráfico, quando $x \to \pm\infty$.

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \dfrac{xg(-x)}{g(x)}$.

Mostre que a recta de equação $y = -x - \dfrac{2}{3}$ é assimptota do gráfico de f.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. A **2.** B **3.** D **4.** A **5.** B **6.** C **7.** B

Grupo II – Itens de resposta aberta

1. $k=2$

2.2. $x \in \left]0,4\right]$

2.3. **a)** f não é contínua em $x=2$, pois não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, mas é contínua à direita do ponto 2, pois $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = -\frac{1}{\ln 3}$.

2.3. **b)** A.V.: $x=-2$; A.O: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, quando $x\to -\infty$; A.H.: $y=0$, quando $x\to +\infty$.

3.2. Aproximadamente $46{,}4\%$ **3.3.** Passadas 15 horas e 35 minutos, aproximadamente. **3.4.** $k\approx 2$

4. $a=2$ e $b=4$

5.1. Como h é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não tem assimptotas verticais; A.O.: $y=3x$, quando $x\to -\infty$.

5.2. **a)** $\frac{1}{7}$ **5.2.** **b)** $\frac{e^{c+2}-3}{c}$

5.3. **b)** $P(c,d)$, com $c\approx 0{,}54$ e $d\approx 11{,}09$; $Q(a,b)$, com $a\approx -1{,}74$ e $b\approx 6{,}52$; $A_{[OPQ]} = 5(|a|+c)\approx 11$