Proposta de Teste Global n.º 2 – Proposta de Resolução

Temas: Exponenciais e Logaritmos, Limites, Continuidade, Teorema de Bolzano e Assimptotas

Matemática A – 12.º Ano – Fevereiro de 2015

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Tem-se que:

$$\log_a b \times \log_c a = 2 \Leftrightarrow \log_a b \times \frac{\overbrace{\log_a a}^{1}}{\log_a c} = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_a b}{\log_a c} = 2 \Leftrightarrow \log_a b = 2\log_a c \Leftrightarrow \log_a b = \log_a\left(c^2\right) \Leftrightarrow b = c^2$$

Assim, $\log_c\left(\frac{b^3}{c^7\sqrt{b}}\right) \underset{b=c^2}{=} \log_c\left(\frac{\left(c^2\right)^3}{c^7\sqrt{c^2}}\right) \underset{c>0}{=} \log_c\left(\frac{c^6}{c^7\times c}\right) = \log_c\left(\frac{c^6}{c^8}\right) = \log_c\left(c^{6-8}\right) = \log_c\left(c^{-2}\right) = -2$

Resposta: A

2. Tem-se:

$$g(x) = \log\left(2\sqrt{25^{x^2}}\right) + \log\left(625\times 2^{x^2+3}\right) = \log\left(2\left(\sqrt{25}\right)^{x^2}\right) + \log\left(625\times 2^{x^2}\times 2^3\right) =$$

$$= \log\left(2\times 5^{x^2}\right) + \log\left(625\times 8\times 2^{x^2}\right) = \log 2 + \log\left(5^{x^2}\right) + \log(5000) + \log\left(2^{x^2}\right) =$$

$$= \log\left(5^{x^2}\times 2^{x^2}\right) + \log(2\times 5000) = \log\left((5\times 2)^{x^2}\right) + \log(10000) =$$

$$= \log\left(10^{x^2}\right) + \log\left(10^4\right) = x^2 + 4$$

Resposta: B

3. Tem-se que, $\lim \frac{n^3 - \ln(3n)}{n^3} = \lim\left(\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} - \frac{\ln(3n)}{n^3}\right) = 1 - \lim\left(\frac{\ln(3n)}{3n}\times\frac{3}{n^2}\right) \underset{i)}{=} 1 - 0^+ \times \frac{3}{+\infty} = 1 - 0^+ = 1^-$.

Assim, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim(f\times g)(u_n) = \lim_{x\to 1^-}(f\times g)(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)\times\lim_{x\to 1^-} g(x) \underset{ii)}{=} 2\times 2 = 4$$

i) $\lim \frac{\ln(3n)}{3n} = 0^+$, se $n \to +\infty$ então $3n \to +\infty$ (limite notável). $\frac{\ln(3n)}{3n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2\ln x}{x-1} \underset{y=x-1}{=} 2\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\ln(y+1)}{y} = 2\times 1 = 2$

Resposta: D

4. Tem-se:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\left(x^3+x\right)e^{-\frac{3}{x}}\right) \overset{(0\times\infty)}{\underset{i)}{=}} \lim_{y\to+\infty}\left(\left(\left(-\frac{1}{y}\right)^3-\frac{1}{y}\right)e^{3y}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\left(-\frac{1}{y^3}-\frac{1}{y}\right)e^{3y}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\left(-\frac{1}{y^2}-1\right)\times\frac{e^{3y}}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{1}{y^2}-1\right)\times\lim_{y\to+\infty}\frac{\left(e^3\right)^y}{y} = \left(-\frac{1}{+\infty}-1\right)\times(+\infty) = (0-1)\times(+\infty) = -\infty \quad \left(e^3>1\right)$$

i) Mudança de variável: se $x \to 0^-$ então $-\frac{1}{x} \to +\infty$. Seja $y = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{y}$, $y \to +\infty$.

Resposta: A

5. Tem-se que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe se $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-6x+5}{x^2-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{i)}{=}} \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1-5}{1+1} = -2$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{e^{b^2x-b^2}-1}{\sqrt{x}-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{e^{b^2(x-1)}-1}{\sqrt{x}-x}\times\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+x}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{e^{b^2(x-1)}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-x^2}\times\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}+x\right) =$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{b^2(x-1)}-1}{x-x^2}\times\left(\sqrt{1}+1\right) = 2\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{b^2(x-1)}-1}{-x(x-1)} = 2\times\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{-x}\times\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{b^2(x-1)}-1}{b^2(x-1)}\times b^2 =$$

$$= 2\times\frac{1}{-1}\times 1\times b^2 = -2b^2$$

Se $x \to 1^+$ então $b^2(x-1) \to 0^+$ (limite notável)

Assim, $-2b^2 = -2 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{1}$. Como $b \in \mathbb{R}^+$, tem-se $b = 1$.

Resposta: B

6. A única afirmação que não é necessariamente verdadeira é a da opção C. Apesar de $h(2)=h\left(\frac{2}{1}\right)=(-2)^1=-2$ e $h(4)=-8$, ou seja, têm o mesmo sinal, nada nos garante que a função h não tenha um zero nesse intervalo. Por exemplo, $h(3)$ pode ser positivo e portanto, sendo h contínua em $[2,3]\subset\mathbb{R}$ e em $[3,4]\subset\mathbb{R}$, pelo teorema de Bolzano, h teria pelo menos um zero em $]2,3[$ e outro em $]3,4[$.

▪ Tem-se que $g(x)=h(x)+h\left(\frac{x}{2}\right)$ é continua em $[1,4]$;

$$g(1)=h(1)+h\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(\frac{2}{2}\right)+h\left(\frac{2}{4}\right)=(-2)^2+(-2)^4=4+16=20$$

$$g(4)=h(4)+h\left(\frac{4}{2}\right)=h(4)+h\left(\frac{2}{1}\right)=-8+(-2)^1=-8-2=-10$$

Logo, pelo teorema de Bolzano, $\exists c\in\,]1,4[\,:g(c)=0\Leftrightarrow h(c)=-h\left(\frac{c}{2}\right)$, ou seja, a equação $h(x)=-h\left(\frac{x}{2}\right)$, tem pelo menos um zero em $[1,4]$. A afirmação A é verdadeira.

▪ Tem-se que $g(x)=h(x)+h\left(\frac{x}{2}\right)$ é continua em $[1,4]$;

$$g(1)=h(1)+h\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(\frac{2}{2}\right)+h\left(\frac{2}{4}\right)=(-2)^2+(-2)^4=4+16=20$$

$$g(4)=h(4)+h\left(\frac{4}{2}\right)=h(4)+h\left(\frac{2}{1}\right)=-8+(-2)^1=-8-2=-10$$

▪ Para n par, $(-2)^n\to+\infty$ e para n ímpar, $(-2)^n\to+\infty$. Como h é contínua em $\mathbb{R}$, o teorema de Bolzano garante que a função assume qualquer valor real. Logo, o seu contradomínio é $\mathbb{R}$. A Afirmação B é verdadeira.

▪ Tem-se que se $n=2p$, com $p\in\mathbb{N}$, $h\left(\frac{2}{2p}\right)=(-2)^{2p}>0$ e se $n=2p-1$, com $p\in\mathbb{N}$, $h\left(\frac{2}{2p-1}\right)=(-2)^{2p-1}<0$. Como h é contínua em $\mathbb{R}$ então é contínua em qualquer intervalo do tipo $\left[\frac{2}{2p},\frac{2}{2p-1}\right]\subset\mathbb{R}$. Logo, o teorema de Bolzano garante que a função tem pelo menos um zero em cada intervalo do tipo $\left]\frac{2}{2p},\frac{2}{2p-1}\right[$, ou seja, h tem infinitos zeros. A Afirmação D é verdadeira.

Resposta: C

7.

▪ Tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-4+2x\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-(-2x+4)\right)=0$

Logo, a recta de equação $y=-2x+4$ é assimptota oblíqua do gráfico de g, quando $x\to+\infty$. Assim:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-2 \text{ e } \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+2x\right)=4$$

▪ O declive da recta r é dado por $\operatorname{tg}\alpha$. Tem-se:

$$2\underbrace{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}_{\operatorname{sen}\alpha}=\underbrace{\cos(-\alpha)}_{\cos\alpha}\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha\Leftrightarrow\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=1\Leftrightarrow\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$$

Logo, a recta de equação $y=\frac{x}{2}-1$ é assimptota oblíqua do gráfico de f, quando $x\to+\infty$. Assim:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2} \text{ e } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=-1$$

Logo, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{2}-\frac{f(x)g(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\times\left(\frac{x}{2}-f(x)\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{g(x)}{x}\times\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)\right)=$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=-(-2)\times(-1)=-2$$

Resposta: B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Como o ponto de coordenadas $(2,36)$ pertence ao gráfico de g, tem-se $g(2)=36$. Assim:

$$g(2)=36\Leftrightarrow\left(3^k-3^{-k+3}\right)^2=36\underset{i)}{\Leftrightarrow}3^k-3^{-k+3}=\sqrt{36}\Leftrightarrow 3^k-3^{-k}\times3^3=6\Leftrightarrow$$

$$\underset{\times 3^k}{\Leftrightarrow}\left(3^k\right)^2-27\times\underbrace{3^{-k}\times3^k}_{=3^{-k+k}=3^0=1}-6\times3^k=0\Leftrightarrow\left(3^k\right)^2-6\times3^k-27=0$$

Fazendo $y=3^k$, vem $y^2-6y-27=0\Leftrightarrow y=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times(-27)}}{2\times1}\Leftrightarrow y=-3 \quad\vee\quad y=9\Leftrightarrow$

$$\underset{y=3^k}{\Leftrightarrow}\underbrace{3^k=-3}_{Eq.\ Impossível}\quad\vee\quad 3^k=9\Leftrightarrow 3^k=3^2\Leftrightarrow k=2$$

Logo, $k=2$.

i) Como a função g é uma função exponencial, a sua base, 3^k-3^{-k+3}, é positiva e diferente de 1, isto é, $3^k-3^{-k+3}\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.