PROPOSTA DE TESTE GLOBAL N.º 1

TEMA: COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES

MATEMÁTICA A – 12.º ANO – NOVEMBRO DE 2014

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere todos os números de seis algarismos. Alguns desses números satisfazem as seguintes condições:

- os três primeiros algarismos são iguais e não há mais algarismos repetidos;
- a soma dos seis algarismos é par.

Quantos são os números que satisfazem estas condições?

A 1024 **B** 1728 **C** 2376 **D** 3328

2. Numa linha n do triângulo de Pascal o décimo sexto elemento é igual a ${}^{n-2}C_{n-12} + 2 \times {}^{n-2}C_{n-11} + {}^{n-2}C_8$, com $n \in \mathbb{N}$. Qual é a soma de todos os elementos da linha seguinte?

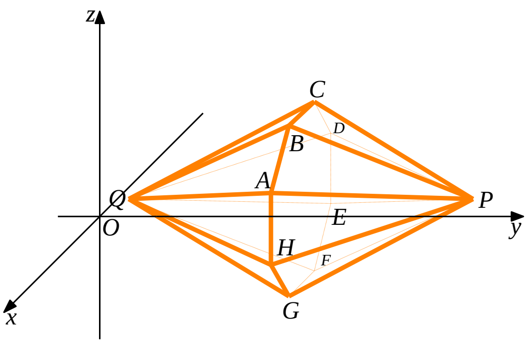
A 2^{16} **B** 2^{17} **C** 2^{25} **D** 2^{26}

3. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{x^3}{n} + \frac{n}{x}\right)^n$, com $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Um dos termos deste desenvolvimento é da forma ${}^nC_p x^2 n^4$, com $p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$. Qual é o valor de n?

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** 12

4. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o sólido $[ABCDEFGHPQ]$ constituído por duas pirâmides octogonais regulares tais que o polígono $[ABCDEFGH]$ é paralelo ao plano xOz.

Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, três vértices do sólido. Qual é a probabilidade de definirem um plano perpendicular ao plano xOz?



A $\frac{1}{15}$ **B** $\frac{2}{15}$

C $\frac{4}{15}$ **D** $\frac{14}{15}$

5. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis e incompatíveis tais que $P(A \cup B) = P(\bar{A})$ e $P(A|(A \cup B)) = 0,25$. Qual é o valor de $P(A)$?

A $0,2$ **B** $0,25$ **C** $0,3$ **D** $0,35$

6. Uma caixa I contém uma bola preta e duas brancas e uma caixa II contém duas bolas pretas. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso uma caixa e em seguida retirar, também ao acaso, uma bola dessa caixa.

Depois de escolhida a caixa e retirada a bola, verifica-se que a mesma é preta. Qual é a probabilidade de a bola ter sido retirada da caixa I?

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{3}{4}$ **D** 1

7. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	b	a	a^2	b

(a e b números reais positivos)

Sabe-se que $P(X = 2 | 2 \le X \le 3) = \frac{3}{4}$. Quais são os valores de a e de b?

A $a = \frac{1}{9}$ e $b = \frac{5}{9}$ **B** $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{5}{18}$ **C** $a = \frac{1}{9}$ e $b = \frac{5}{18}$ **D** $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{5}{9}$

8. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio c tais que $P(X > a) > P(X < b)$, com a, b e c números reais positivos. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

A $c = \frac{a+b}{2}$ **B** $c < \frac{a+b}{2}$ **C** $c = \frac{a-b}{2}$ **D** $c > \frac{a+b}{2}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Um saco contém cubos de sete cores distintas, pelo menos três cubos de cada cor, à excepção dos cubos encarnados que são apenas dois (os cubos da mesma cor são indistinguíveis).

1.1. Pretende-se fazer uma pilha de cubos com três cubos, isto é, pretende-se empilhar três cubos. Quantas pilhas diferentes se podem fazer?

1.2. Admita agora que alguns dos cubos do saco estão numerados. Sabe-se que:

- um em cada cinco cubos são pretos;
- metade estão numerados;
- 25% dos cubos pretos não estão numerados.

Escolhe-se ao acaso um cubo. Qual é a probabilidade de não ser preto ou de estar numerado? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.3. Suponha agora que 5% dos cubos são encarnados e que vinte são azuis.

a) Extraem-se do saco, simultaneamente e ao acaso, quatro cubos. Qual é a probabilidade de só serem retirados cubos encarnados e azuis, mas não haja mais encarnados que azuis? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição cubos do saco até os cubos encarnados estarem fora do saco. Qual é a probabilidade de serem necessárias pelo menos quatro extracções? Apresente na forma de dízima com quatro casas decimais.

2. Um grupo de amigos é constituído por rapazes e raparigas, sendo que o número de rapazes excede o número de raparigas em uma unidade. Seja n o número de rapazes, com $n \in \mathbb{N}$.

2.1. O grupo de amigos vai colocar-se numa só fila para uma foto, com os rapazes sentados em lugares consecutivos. Sabendo que o número de maneiras de o fazerem é 14400, determine o valor de n.

2.2. Considere $n = 6$. O grupo de amigos vai ao cinema, compram bilhetes para uma só fila da sala e distribuem-nos ao acaso por todos. Sabe-se que a Carolina, a Mariana, a Diana e Diogo, são primos e que no grupo não há mais primos.

a) Qual é a probabilidade de ficarem sentados alternados por sexos? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Qual é a probabilidade de pelo menos dois dos primos ficarem sentados em lugares consecutivos? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.3. Considere as mesmas condições que em 2.2. Vão ser escolhidos ao acaso sete amigos do grupo para formar uma lista para concorrer às eleições para a associação de estudantes da escola que frequentam. Nessa lista há um presidente, um vice-presidente, um tesoureiro e um relações públicas. Os restantes membros desempenharão tarefas indiferenciadas.

Qual é a probabilidade de os quatro primos serem escolhidos para os lugares de presidente, vice-presidente, tesoureiro e relações públicas?

Uma resposta a este problema é $\frac{4!}{{}^{11}A_4}$. Numa pequena composição explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação para o números de casos possíveis;
- uma explicação para o número de casos favoráveis.

3. Numa caixa estão oito bolas, uma numerada com o número 1, duas com o número 2 e cinco com o número 3.

3.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, sucessivamente e com reposição, seis bolas da caixa. Qual é a probabilidade de em exactamente duas dessas extracções saírem bolas numeradas com o número 3? Apresente o resultado na forma de percentagem arredondado às unidades.

3.2. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, seis bolas da caixa e em seguida formar, também ao acaso, um número de seis algarismos. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «são retiradas da caixa quatro bolas com o número 3 e as duas com o número 2»

B: «o número formado é uma capicua»

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, indique, justificando, o valor de $P\left(B|A\right)$. Apresente o resultado na forma de dízima.

3.3. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, bolas da caixa. Seja X a variável aleatória:

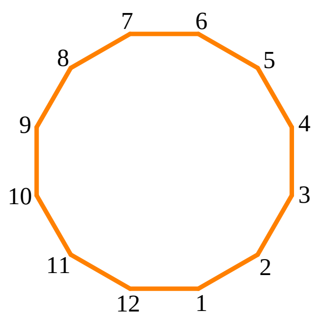
X: «número de extracções até sair a primeira bola numerada com o número 3»

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

4. Considere um polígono regular com n vértices, com $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Suponha que o polígono tem 170 diagonais. Quantos são os seus vértices?

4.2. Considere agora um dodecágono regular com os vértices numerados de 1 a 12, representado na figura.



a) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, simultaneamente e ao acaso, quatro vértices do dodecágono. Qual é a probabilidade de serem os quatro vértices de um quadrado? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Um dado dodecaédrico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 12 é lançado quatro vezes. Em cada lançamento regista-se o número da face voltada para cima e cada um desses números corresponde a um vértice do dodecágono. Qual é a probabilidade de no final dos quatro lançamentos obter-se um registo que corresponda aos quatro vértices de um quadrado? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

c) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, simultaneamente e ao acaso, três vértices do dodecágono e designemos por a, b e c os números dos três vértices escolhidos, com $a < b < c$. Sejam X e Y os acontecimentos:

X: «os três vértices escolhidos estão numerados consecutivamente»

Y: « $b = 2a$ ou $c = 2a$ ou $c = 2b$ »

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, indique, justificando, o valor de $P\left(Y|X\right)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$)

5.1. Mostre que $\left(P\left(A|\overline{B}\right)-1\right)\times P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\right)=P\left(B|\overline{A}\right)\times P\left(\overline{A}\right)-1$.

5.2. Numa escola fez-se um estudo sobre os recursos que os alunos do 12.º ano usam para se prepararem para o Exame Nacional de Matemática A. Concluiu-se que:

- 40% dos alunos usam recursos disponibilizados na internet;

- dos alunos que não utilizam recursos disponibilizados na internet, três quartos usam livros de preparação para o Exame Nacional de Matemática A;

- entre os alunos que não utilizam livros de preparação para o Exame Nacional de Matemática A, um em cada quatro usa recursos disponibilizados na internet.

Escolhe-se ao acaso um desses alunos.

a) Qual é a probabilidade de utilizar um livro de preparação para o Exame Nacional de Matemática A? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 5.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

b) Qual é a probabilidade de usar recursos disponibilizados na internet, sabendo que também usa um livro de preparação para o Exame Nacional de Matemática A? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

6. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis e não certos ($A \subset S$ e $B \subset S$) tais que:

- $P\left(\overline{A}\right)=0,4$
- $P\left(\overline{B}|A\right)=3P\left(B|A\right)$
- $P\left(A\cup B\right)=7\times P\left(B\cap \overline{A}\right)$

Determine $P\left(B\right)$ e verifique que os acontecimentos A e B são independentes.

7. Numa empresa que produz um determinado tipo de parafusos, sabe-se que a variável aleatória X: «comprimento dos parafusos em milímetros» segue uma distribuição normal de valor médio 50 milímetros e desvio padrão 1 milímetro. Todos os parafusos com comprimento inferior a 48 milímetros ou superior a 52 milímetros são defeituosos.

Todos os dias é recolhida uma amostra de n parafusos, $n \in \mathbb{N}$, para se efectuar um controlo de qualidade. Qual é o menor valor de n, de modo que a probabilidade de a amostra conter no máximo um parafuso defeituoso, seja inferior a 10%?

Utilize a calculadora para responder a esta questão.

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C **2.** D **3.** C **4.** B **5.** A **6.** A **7.** B **8.** D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.1. 342 **1.2.** $\frac{19}{20}$ **1.3. a)** $\frac{1}{37}$ **1.3. b)** $\approx 0,9962$

2.1. $n=5$ **2.2. a)** $\frac{1}{462}$ **2.2. b)** $\frac{26}{33}$

3.1. $\approx 12\%$ **3.2.** $0,2$ **3.3.**

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

4.1. Vinte vértices. **4.2. a)** $\frac{1}{165}$ **4.2. b)** $\frac{1}{288}$ **4.2. c)** $\frac{1}{5}$

5.2. **a)** 80% **5.2.** **a)** $\frac{7}{16}$

6. $P\left(B\right)=0,25$; A e B são independentes porque $P\left(B|A\right)=P\left(B\right)=0,25$.

7. $n=85$