Novo Espaço – Matemática A 12.º ano

Proposta de Teste [janeiro - 2018]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Considera todos os números de nove algarismos diferentes que se podem representar com os algarismos de 1 a 9.

1.1. Quantos desses números são ímpares e os algarismos pares ocupam posições consecutivas?

(A) 345600 **(B)** 600 **(C)** 2880 **(D)** 14400

1.2. Cada um dos nove algarismos, de 1 a 9, foi representado numa bola. As noves bolas foram introduzidas num saco.
De seguida, ao acaso, foram retiradas do saco, de uma só vez, duas bolas.
Considera os acontecimentos:

X: "O produto dos números das bolas retiradas é um número par"

Y: "Os números das bolas retiradas são primos"

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(Y|X)$?

(A) $\frac{3}{26}$ **(B)** $\frac{5}{36}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{40}$

2. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=x+\log_3 x$.

O valor arredondado às décimas da taxa de variação média no intervalo $[3,5]$ é igual a:

(A) 0,8 **(B)** 1,2 **(C)** 2,5 **(D)** 1,5

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sqrt{e^{-2x}+x^2}$.

3.1. O gráfico de f tem uma assíntota quando $x\to+\infty$. Determina a equação dessa assíntota.

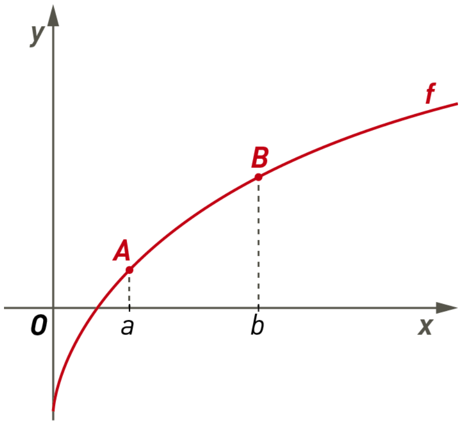
3.2. Justifica, **sem recorrer à calculadora**, que a função f', derivada de f, tem um zero no intervalo $]0,1[$.

Recorre à calculadora gráfica e determina o valor desse zero, arredondado às centésimas.

4. Na figura está representada a função *f*, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por:

$f(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$

Os pontos *A* e *B*, de abcissas respetivamente, *a* e *b*, pertencem ao gráfico de *f* e a ordenada de cada um deles é igual a metade da respetiva abcissa.



Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina o valor da diferença $b-a$. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Na tua resolução deves apresentar:

- a equação que traduz a relação entre as ordenadas e as abcissas dos pontos *A* e *B*;
- o gráfico ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinala os pontos *A* e *B* e os valores das abcissas arredondados às milésimas;
- o valor da diferença $b-a$, arredondado às décimas.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	1.1	1.2	2.	3.1.	3.2.	4.	
Pontos	10	10	10	15	20	15	80

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

5. Sabe-se que $\lim\left(\frac{n-1}{n+2k}\right)^n=\sqrt{e}$, $k\in\mathbb{R}$.

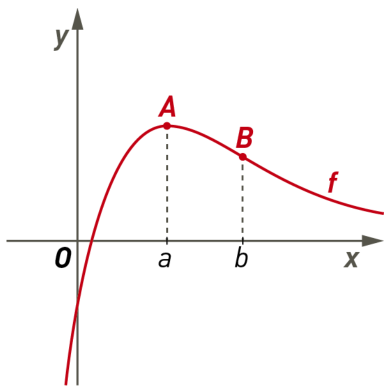
Qual é o valor de k ?

(A) $\sqrt{2}$ **(B)** $-\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $-\frac{1}{2}$

6. Na figura, em referencial ortonormado *xOy*, está representada a função *f* , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\frac{5x-1}{e^x}$.

Sabe-se que:

- o ponto *A* pertence ao gráfico de *f* , tem abcissa a e a ordenada é máximo absoluto da função;
- o ponto *B* tem abcissa b e é ponto de inflexão do gráfico de *f*.



6.1. Determina, caso existam, as equações das assíntotas ao gráfico de *f* .

6.2. A medida do lado de um quadrado é $b-a$. Determina a medida de cada uma das diagonais desse quadrado.

7. Sabe-se que $\log_2(4a)=\frac{2}{3}$.

Qual é o valor de $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Seja k um número real.

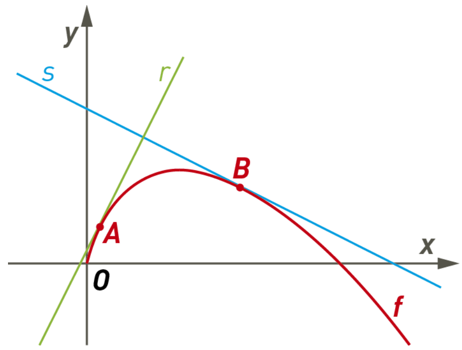
Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{kx}-2+e^x}{x}=\frac{5}{2}$. O valor de k é:

(A) 2 **(B)** $\frac{7}{2}$ **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 3

9. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x)=x\ln\left(\frac{3}{x}\right)$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f;
- as retas r e s são perpendiculares e tangentes ao gráfico de f, respetivamente, nos pontos A e B;
- a abcissa do ponto A é $\frac{3}{e^3}$.



Determina as coordenadas do ponto B.

10. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=xe^{-x}$.

Sejam f' e f'', respetivamente, a função derivada de f e a função segunda derivada de f.

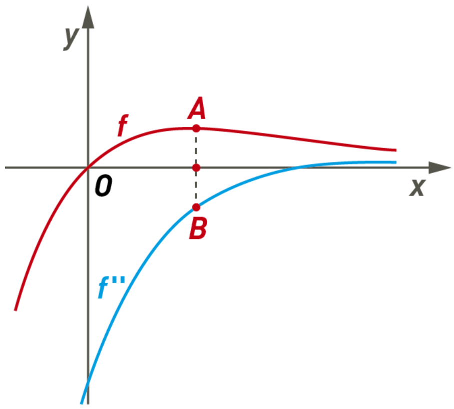
10.1. Seja P o ponto do gráfico de f, de coordenadas não nulas, em que a ordenada é o dobro da abcissa.

Mostra que o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é igual a $2+\ln 4$.

10.2. Na figura, em referencial cartesiano xOy, estão representadas as funções f e f''.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f;
- o ponto B pertence ao gráfico de f'';
- os pontos A e B são simétricos em relação a Ox (eixo das abcissas).



Determina as coordenadas dos pontos A e B.

11. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e diferenciável.

Sabe-se que:

- f é estritamente decrescente;
- 2 é zero de f.

Considera a função g de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)} - f(x)$

Determina, na forma de intervalo de números reais, o conjunto-solução da inequação $g'(x) < 0$, sendo g' a função derivada de g.

FIM (Caderno 2)

Cotações										
	Caderno 1 (com calculadora)									
Questões	**1.1**	**1.2**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**				
Pontos	10	10	10	15	20	15	**Total**			**80**
	Caderno 2 (sem calculadora)									
Questões	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	
Pontos	10	10	20	10	10	20	15	15	10	**Total**	**120**
Total										**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;*
r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base*; *g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r – raio)*

PROGRESSÕES

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 \, x_1 + \ldots + p_n \, x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \, (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \, (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$