Matemática A - 12º Ano

Resolução da Mini Ficha - Professor José Carlos Pereira

Probabilidades e Axiomática

Nuno Miguel Guerreiro
pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

---

1. Considera-se um dado octaédrico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 8 e a experiência aleatória:

- lança-se o dado duas vezes e caso os números das faces que ficam voltadas para cima sejam distintos, não se efectuam mais lançamentos;
- lança-se o dado duas vezes e caso os números das faces que ficam voltadas para cima sejam iguais, efectua-se mais um lançamento.

1.1. No caso do lançamento em que ficam voltas para cima faces com números distintos, temos $8 \times 7 = 56$ elementos, pois o número do primeiro dado tem de ser obrigatoriamente diferente do segundo.
Quanto ao lançamento em que ficam voltadas para cima faces com igual número, tem-se $8 \times 1 = 8$ possibilidades. Sendo efectuado um novo lançamento vem que o espaço de resultados contempla os casos, por exemplo $(1,1),1,\ (1,1),2$ pelo que para cada um dos pares existem oito possibilidades, logo $8 \times 8 = 64$ elementos.
Desta forma, o número total de elementos da experiência aleatória é $56 + 64 = 120$ elementos.

1.2. Após os lançamentos serem efectuados, a soma dos números das faces que ficam voltadas para cima é 11 pelo que existem as seguintes possibilidades:

- **Números distintos** $\rightarrow$ Sair o número 3 e o número 8; Sair o número 4 e o número 7; Sair o número 5 e o número 6;
- **Números iguais e um outro lançamento** $\rightarrow$ Sair o número 2 duas vezes e depois o número 7; Sair o número 3 duas vezes e depois o número 5; Sair o número 4 duas vezes e depois o número 3; Sair o número 5 duas vezes e depois o número 1.

Quando os números são distintos, a probabilidade de saírem os pares acima é: $\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times 2\right) \times 3 = \frac{3}{32}$.
Quandos os números são iguais e efectua-se um novo lançamento, a probabilidade de saírem as combinações acima é: $\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) \times 4 = \frac{1}{128}$
Desta forma, a probabilidade da soma dos números das faces que ficam voltadas para cima após os lançamentos ser 11 é $\frac{3}{32} + \frac{1}{128} = \frac{13}{128}$.

1.3. Após os lançamentos serem efectuados, a soma dos números das faces que ficam voltadas para cima é 8 pelo que existem as seguintes possibilidades:

- **Números distintos** $\rightarrow$ Sair o número 1 e o número 7; Sair o número 2 e o número 6; Sair o número 3 e o número 5;
- **Números iguais e um outro lançamento** $\rightarrow$ Sair o número 1 duas vezes e depois o número 6; Sair o número 2 duas vezes e depois o número 4; Sair o número 3 duas vezes e depois o número 2.

Quando os números são distintos, a probabilidade de saírem os pares acima é: $\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times 2\right) \times 3 = \frac{3}{32}$.
Quandos os números são iguais e efectua-se um novo lançamento, a probabilidade de saírem as combinações acima é: $\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) \times 3 = \frac{3}{512}$
Desta forma, a probabilidade da soma dos números das faces que ficam voltadas para cima após os lançamentos ser 11 é $\frac{3}{32} + \frac{3}{512} = \frac{51}{512}$.
Como a probabilidade de terem sido efectuados apenas dois lançamentos é $\frac{3}{32}$, vem que a probabilidade de terem sido efectuados apenas dois lançamentos sabendo que a soma dos números das faces que ficaram voltadas para cima foi 8 é $\frac{3/32}{51/512} = \frac{16}{17}$.

2. Existem cinco estações (E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5), sendo que a estação E_1 só emite sinais e a estação E_5 só recebe sinais. Para um sinal emitido pela estação E_1 chegar à estação E_5 é necessário percorrer as estações intermédias E_2, E_3 e E_5.
Sabe-se que a probabilidade das estações E_1, E_2 e E_3 receberem ordem para emitir um sinal e cumprir esta é de 90% e da estação E_4 receber ordem para emitir e cumprir é 75%.
Foi dada uma ordem à estação E_1 para emitir sinal e este não foi recebido pela estação E_5 pelo que se pretende calcular a probabilidade da estação E_1 não ter cumprido a ordem.

Definam-se os acontecimentos:
E_i: "A estação E_i recebeu o sinal emitido pela estação anterior", com $i = \{2, 3, 4, 5\}$.
$\overline{C}_j$: "A estação E_i não cumpriu a ordem para emitar o sinal", com $j = \{1, 2, 3, 4\}$.
Ora, pretende-se calcular $P(\overline{C_1}|\overline{E_5}) = \frac{P(\overline{C_1}\cap\overline{E_5})}{P(\overline{E_5})}$.
Vem facilmente que $P(\overline{C_1} \cap \overline{E_5}) = P(\overline{C_1}) = 1 - 0,9 = 0,1$.
Tem-se ainda que para o sinal não chegar à estação E_5, então qualquer uma das estações intermediárias pode falhar a emissão do sinal pelo que vem:
$P(\overline{E_5}) = P(\overline{C_1}) + P(E_2 \cap \overline{C_2}) + P((E_2 \cap E_3) \cap \overline{C_3}) + P((E_2 \cap E_3 \cap E_4) \cap \overline{C_4}) =$
$0,1 + 0,9 \times 0,1 + 0,9 \times 0,9 \times 0,1 + 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,25 = 0,45325$.

Conclui-se então que a probabilidade a calcular é dada por:

$$P(\overline{C_1}|\overline{E_5}) = \frac{P(\overline{C_1} \cap \overline{E_5})}{P(\overline{E_5})} = \frac{0,1}{0,45325} \approx 0,22\,(22\%)$$

3. Considere-se uma caixa onde estão p bolas azuis, p bolas pretas e a bolas encarnadas num total de $2p + a$ bolas.
Sabe-se que a probabilidade de se retirar uma bola encarnada na primeira extracção é $0,36$ e que a probabilidade da primeira bola retirada ser encarnada e da segunda ser preta é $\frac{3}{25}$.
Tem-se então que:

$$P(\text{sair bola encarnada na primeira extração}) = \frac{a}{a + 2p} = 0,36$$

De onde vem que:

$$a + 2p = \frac{25a}{9} \Leftrightarrow a = \frac{8p}{9}$$

Sabe-se ainda que:

$$P(\text{sair bola encarnada na primeira extração e bola preta na segunda}) = \frac{a}{a + 2p} \times \frac{p}{a + 2p - 1} = \frac{3}{25}$$

Logo tem-se que:

$$\frac{9}{25} \times \frac{p}{a + 2p - 1} = \frac{3}{25} \Leftrightarrow \frac{\frac{8a}{9}}{\frac{25a}{9} - 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{25a}{9} - 1 = \frac{24a}{9} \Leftrightarrow a = 9 \text{ e então } b = \frac{8 \times 9}{9} = 8$$

Conclui-se então que existem 8 bolas azuis, 8 bolas pretas e 9 bolas encarnadas.

4. Considerem-se se os seguintes acontecimentos:
M: "o aluno é do sexo feminino";
B: "o aluno tem telefone fixo em casa".

Do enunciado tem-se que $P(M) = 0,70$ e que $P(B|M) = 0,15$, logo $P(B|M) = \frac{P(B\cap M)}{P(M)} = 0,15$ de onde se retira que $P(B \cap M) = P(M) \times P(B|M) = 0,70 \times 0,15 = 0,105$.

4.1. Pretende-se calcular a probabilidade de um aluno da turma ser do sexo masculino ou ter telefone fixo em casa, isto é:

$$P(\overline{M} \cup B) = P(\overline{M}) + \underbrace{P(B) - P(B \cap \overline{M})}_{P(B)=P(B\cap\overline{M})+P(B\cap M)} = P(\overline{M}) + P(B \cap M) = (1 - 0,70) + 0,105 = 0,405$$

4.2. Escolhem-se ao acaso dois alunos de uma turma com n alunos. Sabe-se que a turma tem $\frac{3n}{10}$ alunos e $\frac{7n}{10}$ alunas, pelo que a probabilidade de ambos os alunos escolhidos serem do sexo masculino ser igual a $\frac{12}{145}$ é equivalente à expressão:

$$\frac{\frac{3n}{10}}{n} \times \frac{\frac{3n}{10} - 1}{n - 1} = \frac{12}{145} \Leftrightarrow \frac{\frac{3n}{10} - 1}{n - 1} = \frac{8}{29} \Leftrightarrow \frac{3n}{10} - \frac{8n}{29} = 1 - \frac{8}{29} \Leftrightarrow \frac{7n}{290} = \frac{21}{29} \Leftrightarrow n = 30$$

Conclui-se então que a turma tem 30 alunos.

5. Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Mostre-se que:

5.1. Mostre-se que para $P(\overline{A \cap B}) \neq 0$, a igualdade abaixo se verifica.

$$P(A|\overline{A \cap B}) = 1 - \frac{P(\overline{A})}{1 - P(A \cap B)}$$

Demonstremos então a igualdade:

$$\begin{aligned}
P(A|\overline{A \cap B}) &= \frac{P\left(A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\right)}{P(\overline{A \cap B})} && (1) \text{ e } (2) \\
&= P\frac{\left((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})\right)}{1 - P(A \cap B)} && \\
&= \frac{P\left((A \cap \overline{B}) \cup \emptyset\right)}{1 - P(A \cap B)} && (3) \\
&= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(A \cap B)} && (4) \\
&= \frac{-1 + P(A) + 1 - P(A \cap B)}{1 - P(A \cap B)} && \\
&= 1 - \frac{P(\overline{A})}{1 - P(A \cap B)} && (5)
\end{aligned}$$

(1) Teorema $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
(2) Leis de De Morgan $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$
(3) Teorema $P(B \cap \overline{B}) = \emptyset$
(4) Teorema $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
(5) Teorema $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

5.2. Se A e B são independentes e equiprováveis tem-se que

$$P(A) = P(B) \text{ e } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = (P(A))^2$$

Mostre-se que para $P(A \cup B) \neq 0$, e tendo em conta a hipótese acima, a igualdade abaixo se verifica.

$$P(A|A \cup B) = \frac{1}{2 - P(A)}$$

Demonstremos então a igualdade:

$$\begin{aligned}
P(A|A \cup B) &= \frac{P\left(A \cap (A \cup B)\right)}{P(A \cup B)} && (1) \\
&= P\frac{\left(A \cup (A \cap B)\right)}{P(A \cup B)} && \\
&= \frac{P(A) + P(A \cap B) - P(A \cap (A \cap B))}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} && (2) \\
&= \frac{P(A) + P(A \cap B) - P(A \cap B)}{2P(A) - (P(A))^2} && (3) \\
&= \frac{P(A)}{P(A)\left(2 - P(A)\right)} && \\
&= \frac{1}{2 - P(A)} &&
\end{aligned}$$

(1) Teorema $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
(2) Teorema $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(3) Hipótese $P(A \cap B) = (P(A))^2$

6. Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis e não certos ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Sendo A e B independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ e uma vez que a probabilidade de A ocorrer e B não ocorrer é $0,06$ e a probabilidade de A não ocorrer e B ocorrer é $0,56$ tem-se $P(A \cap \overline{B}) = 0,06$ e $P(\overline{A} \cap B) = 0,56$.
Tem-se então:

$$P(A \cap \overline{B}) = 0,06 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0,06 \Leftrightarrow P(A) - P(A) \times P(B) = 0,06 \Leftrightarrow$$

$$P(A)\left(1 - P(B)\right) = 0,06 \Leftrightarrow P(A) = \frac{0,06}{1 - P(B)}$$

E ainda:

$$P(\overline{A} \cap B) = 0,56 \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0,56 \Leftrightarrow P(B) - P(A) \times P(B) = 0,56 \Leftrightarrow$$

$$P(B) - \frac{0,06}{1 - P(B)} \times P(B) = 0,56 \Leftrightarrow -(P(B))^2 + 1,50P(B) - 0,56 = 0$$

Sendo $x = P(B)$ vem então:

$$-x^2 + 1,50x - 0,56 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1,50 \pm \sqrt{1,50^2 - 4 \times (-1) \times (-0,56)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = 0,8 \vee x = 0,7$$

Conclui-se então que $P(B) = 0,8$ ou $P(B) = 0,7$ correspondentes aos valores $P(A) = \frac{0,06}{1-0,8} = 0,3$ ou $P(A) = \frac{0,06}{1-0,7} = 0,2$ para a probabilidade de A, respectivamente.

Podes encontrar o enunciado **aqui**.