# Mini-Ficha de Trabalho – Limites – Proposta de Resolução

## Matemática A – 12.º Ano

*"Em relação à Matemática não houve, até hoje, quem lastimasse o tempo empregue no seu estudo."*
*Benjamim Franklin*

**1.** Seja $(u_n)$ uma sucessão arbitrária de elementos pertencentes ao domínio de $g$ tal que $u_n \to -\infty$. Tem-se:

$$\lim g(u_n) = \lim \frac{\ln\left((u_n)^4\right)}{-e^{2+u_n}-2} = \frac{\lim \ln\left((u_n)^4\right)}{\lim\left(-e^{2+u_n}-2\right)} = \frac{\ln\left(\lim (u_n)^4\right)}{\lim\left(-e^{2+u_n}\right)-\lim 2} = \frac{\ln\left((\lim u_n)^4\right)}{\left(-e^{\lim(2+u_n)}\right)-2} = \frac{\ln(-\infty)^4}{-e^{2+\lim(u_n)}-2} =$$

$$= \frac{\ln(+\infty)}{-e^{2-\infty}-2} = \frac{+\infty}{0-2} = \frac{+\infty}{-2} = -\infty$$

Logo, pela definição de limite segundo Heine, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(u_n) = -\infty$.

**2.**

**2.1.** Tem-se que $\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^n = \lim\left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{5}{n}\right)}\right)^n = \lim\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n} = \frac{\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e^5} = e^{3-5} = e^{-2}$.

Assim, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to e^{-2}} f(x) \underset{e^{-2}>0}{=} \lim_{x\to e^{-2}}(1+\ln x) = 1+\ln\left(e^{-2}\right) = 1+(-2) = -1$$

**2.2.**

- $(w_n)$ é uma progressão geométrica. Se $r$ for a razão da progressão, então:

$$w_5 = r^3 \times w_2 \Leftrightarrow \frac{w_5}{w_2} = r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{243}{9} \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow r = 3$$

Logo, $w_n = w_2 \times r^{n-2} = 9\times 3^{n-2} = \cancel{9}\times\frac{3^n}{\cancel{3^2}} = 3^n$. Assim, $v_n = \frac{w_n}{n^7} = \frac{3^n}{n^7}$ e portanto:

$$\lim\left(-\frac{1}{v_n}\right) = \lim\left(-\frac{1}{\frac{3^n}{n^7}}\right) = -\frac{1}{\lim\frac{3^n}{n^7}} = -\frac{1}{+\infty} = 0^-$$

Pela definição de limite segundo Heine, tem-se:

$$\lim f\left(-\frac{1}{v_n}\right)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{-2}{3}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}=-\frac{2}{3}\times 1=-\frac{2}{3}$$

Se $x\to 0^-$ então $-2x\to 0^+$ (limite notável)

▪ Por outro lado, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+\ln x)=1+\ln(0^+)=1+(-\infty)=-\infty$

$\therefore$ Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**2.3.** Tem-se:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(3x-2)-1}{x^4-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{1}+\ln(3x-2)-\cancel{1}}{x^4-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(3x-2)}{(x-1)}\times\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{x-1}\times\frac{1}{(1+1)(1^2+1)}\underset{i)}{=}\frac{1}{4}\times\lim_{y\to 0}\frac{\ln(3(y+1)-2)}{y}=$$

$$=3\times\frac{1}{4}\times\lim_{y\to 0}\frac{\ln(3y+1)}{3y}=\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$$

Se $y\to 0$ então $3y\to 0$ (limite notável)

**i) Mudança de variável:** Se $x\to 1$ então $x-1\to 0$ Seja $y=x-1\Leftrightarrow x=y+1$, $y\to 0$.

**3.** Tem-se que:

$$\lim x_n=\lim\left(2-\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}=\lim\left(\frac{2n+4-n-1}{n+2}\right)^{2n}=\lim\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n}=\lim\left(\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\right)^2=\left(\lim\left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^n\right)^2=$$

$$=\left(\lim\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\right)^2=\left(\frac{\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\right)^2=\left(\frac{e^3}{e^2}\right)^2=\left(e^{3-2}\right)^2=e^2$$

Assim, pela definição de limite segundo Heine, $\lim f\left(x_n\right)=\lim\limits_{x\to e^2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{\ln\left(e^2\right)}=\dfrac{1}{2}$.

Resposta: **C**

**4.** Tem-se que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n-3\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=-3$. Portanto a sucessão $\left(u_n\right)$ é uma progressão geométrica de razão $-3$. Logo, $u_n=u_1+\left(n-1\right)\times\left(-3\right)=1-3\left(n-1\right)=1-3n+3=-3n+4$. Assim,

$$\lim\frac{u_n}{n^2+2n}=\lim\frac{-3n+4}{n^2+2n}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{-3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}=\lim\frac{-3}{n}=\frac{-3}{+\infty}=0^-$$

Pela definição de limite segundo Heine conclui-se que $\lim g\left(\dfrac{u_n}{n^2+2n}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} g\left(x\right)$ e portanto $\lim\limits_{x\to 0^-} g\left(x\right)=+\infty$.

Dos gráficos apresentados o único cuja função tende para $+\infty$ quando $x$ tende para zero, por valores inferiores a zero, é o gráfico da opção **D**.

Resposta: **D**

**5.**

**5.1.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^5-16x^3+x^2-16}{x^3-4x^2}\underset{i)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^5-16x^3+x^2-16}{x^2\left(x-4\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\cancel{\left(x-4\right)}\left(x^4+4x^3+x+4\right)}{x^2\cancel{\left(x-4\right)}}=$

$$=\frac{4^4+4\times 4^3+4+4}{4^2}=\frac{65}{2}$$

**i)** Utilizando a regra de Ruffini podemos decompor o polinómio $x^5-16x^3+x^2-16$:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | −16 | 1 | 0 | −16 |
| 4 | | 4 | 16 | 0 | 4 | 16 |
| | 1 | 4 | 0 | 1 | 4 | 0 |

Logo, $x^5-16x^3+x^2-16=\left(x-4\right)\left(x^4+4x^3+x+4\right)$

**5.2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\overset{\left(\infty-\infty\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}-x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{-x}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=$$

$$= \underset{i)\ x\to-\infty}{\lim} \frac{-x+1}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{-1+\frac{1}{-\infty}}{-\left(\sqrt{1-\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}}+1\right)} =$$

$$= \frac{-1-0}{-\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

**i)** $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$. Como $x \to -\infty$ pode assumir-se que $x$ é negativo, logo $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

**5.3.** $$\lim_{x\to1} \frac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1} \frac{\left(x-\sqrt{4x-3}\right)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-\left(\sqrt{4x-3}\right)^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x^2-4x+3}{\left(x^2-1\right)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)} \underset{i)}{=} \lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)} = \frac{1-3}{(1+1)\left(1+\sqrt{4\times1-3}\right)} =$$

$$= \frac{-2}{2\times2} = -\frac{1}{2}$$

**i)** Tem-se que $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \vee \quad x=3$. Logo, $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

**6.** Tem-se que:

$$\lim\left(\frac{2n^3-\ln\left(n^2\right)}{n^3}-x_n\right) = \lim\left(\frac{2\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}-\frac{2\ln(n)}{n^3}-x_n\right) = \lim\left(2-\frac{2\ln(n)}{n}\times\frac{2}{n^2}-x_n\right) = 2-0\times\frac{1}{+\infty}-\lim(x_n) =$$

$$= 2-0\times0-\lim(x_n) = 2-\lim(x_n)$$

Como $x_n \to 3$ e $x_n > 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vem $\lim(x_n) = 3^+$ e portanto $2-\lim(x_n) = -1^-$

Assim, pela definição de limite segundo Heine, $\lim f\left(\frac{2n^3-\ln\left(n^2\right)}{n^3}-x_n\right) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.

Resposta: **A**

**7.**

**7.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{e^{3x}}-1}{2e^{-5x+1}-2e}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{2e^{-5x}\times e-2e}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{3x}{2}}-1}{2e\left(e^{-5x}-1\right)}=\dfrac{1}{2e}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{3x}{2}}-1}{e^{-5x}-1}=\dfrac{1}{2e}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^{\frac{3x}{2}}-1}{x}}{\frac{e^{-5x}-1}{x}}=$

$$=\frac{1}{2e}\times\frac{\frac{3}{2}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{3x}{2}}-1}{\frac{3x}{2}}}{-5\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-5x}-1}{-5x}}=\frac{1}{2e}\times\frac{\frac{3}{2}\times 1}{-5\times 1}=\frac{1}{2e}\times\frac{3}{-10}=-\frac{3}{20e}$$

Se $x\to 0$ então $-5x\to 0$ e $\frac{3x}{2}\to 0$ (limites notáveis)

**7.2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^7\times(1{,}01)^{3x+4}\right)\underset{i)}{\overset{(\infty\times 0)}{=}}\lim\limits_{y\to+\infty}\left((-y)^7\times(1{,}01)^{-3y+4}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(-y^7\times(1{,}01)^{-3y}\times(10{,}1)^4\right)=$

$$=-(10{,}1)^4\times\lim_{y\to+\infty}\frac{y^7}{(10{,}1)^{3y}}=-(10{,}1)^4\times\lim_{y\to+\infty}\frac{y^7}{\left((10{,}1)^3\right)^y}=-(10{,}1)^4\times\lim_{y\to+\infty}\frac{y^7}{(1{,}0303)^y}=$$

$$\underset{ii)}{=}-(10{,}1)^4\times 0=0$$

**i) Mudança de variável:** Se $x\to-\infty$ então $-x\to+\infty$ Seja $y=-x\Leftrightarrow x=-y$, $y\to+\infty$.

**ii)** Se $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}=+\infty$ (limite notável), então $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=0$, com $a>1$ e $p\in\mathbb{R}$ e $(1{,}01)^3=1{,}0303>1$

**7.3.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3\times 3^{\frac{4}{x^2}}\right)\underset{i)}{\overset{(\infty\times 0)}{=}}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^3\times 3^{4y}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{y}\right)^3}\times\left(3^4\right)^y\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{81^y}{\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^3}=\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{81^y}{y^{\frac{3}{2}}}}_{\text{limite notável}}=+\infty$

**i) Mudança de variável:** Se $x\to 0^+$ então $\frac{1}{x^2}\to+\infty$ Seja $y=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y}\underset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{\frac{1}{y}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{y}}$, $y\to+\infty$ ($x>0$ pois $x\to 0^+$).

**7.4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^3+x+1\right)}{x^2+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^3\left(1+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)\right)}{x^2+x}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^3\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^3\right)}{x^2+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x(x+1)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{(+\infty)^2}+\frac{1}{(+\infty)^3}\right)}{(+\infty)^2+\infty}=$$

$$= 3\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}+\frac{\ln(1+0+0)}{+\infty}=3\times 0\times\frac{1}{+\infty}+\frac{\ln(1)}{+\infty}=3\times 0\times 0+\frac{0}{+\infty}=0+0=0$$

**7.5.** $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{\ln(7x-6)}\underset{i)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{\ln(7x-6)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(7x-6)}\times\lim_{x\to 1}(x^2+x+3)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(7x-6)}\times(1^2+1+3)=$$

$$\underset{ii)}{=}5\times\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(7(y+1)-6)}=5\times\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(7y+7-6)}=\frac{5}{7}\times\lim_{y\to 0}\frac{7y}{\ln(7y+1)}\underset{iii)}{=}\frac{5}{7}\times 1=\frac{5}{7}$$

**i)** Utilizando a regra de Ruffini podemos decompor o polinómio $x^3+2x-3$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 2 | −3 |
| 1 | | 1 | 1 | 3 |
| | 1 | 1 | 3 | 0 |

Logo, $x^3+2x-3=(x-1)(x^2+1+3)$

**ii) Mudança de variável:** Se $x\to 1$ então $x-1\to 0$ Seja $y=x-1\Leftrightarrow x=y+1$, $y\to 0$.

**iii)** Se $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ (limite notável), então $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=1$. Se $y\to 0$ então $7y\to 0$.

**7.6.** $$\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)}{3e^{2x+8}-3e^2}=\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)}{3e^{2x+6+2}-3e^2}=\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)}{3e^{2x+6}\times e^2-3e^2}=\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)}{3e^2\left(e^{2(x+3)}-1\right)}=$$

$$\underset{i)}{=}\frac{1}{3e^2}\times\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y-3+4)}{e^{2y}-1}=\frac{1}{3e^2}\times\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\ln(y+1)}{y}}{\frac{e^{2y}-1}{y}}=\frac{1}{3e^2}\times\frac{\overbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}}^{\text{limite notável}}}{2\times\lim_{y\to 0}\frac{e^{2y}-1}{2y}}=\frac{1}{3e^2}\times\frac{1}{2\times 1}=\frac{1}{6e^2}$$

Se $y\to 0$ então $2y\to 0$ (limite notável)

**i) Mudança de variável:** Se $x\to -3$ então $x+3\to 0$ Seja $y=x+3\Leftrightarrow x=y-3$, $y\to 0$.

**7.7.** $$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2-x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2+1-1-3\right)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-4+1\right)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln\left(x^2-4+1\right)}{x^2-4}\times\frac{x^2-4}{x^2-x-2}\right)=$$

$$\underset{i)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-4+1\right)}{x^2-4}\times\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-4+1\right)}{x^2-4}\times\frac{2+2}{2+1}\underset{ii)}{=}\frac{4}{3}\times\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=$$

$$=\frac{4}{3}\times 1=\frac{4}{3}$$

**i)** Tem-se que $x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=2\ \vee\ x=-1$. Logo, $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

**ii) Mudança de variável:** Se $x\to 2$ então $x^2-4\to 0$ Seja $y=x^2-4$, $y\to 0$.

**7.8.** $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+3)e^x-\ln 3}{e^{-x}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+3)e^x-e^x\ln 3+e^x\ln 3-\ln 3}{e^{-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^3\left(\ln(x+3)-\ln 3\right)+\ln 3\left(e^x-1\right)}{e^{-x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\ln\left(\frac{x+3}{3}\right)}{e^{-x}-1}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln 3\left(e^x-1\right)}{e^{-x}-1}=\lim_{x\to 0}e^x\times\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x}{3}+1\right)}{e^{-x}-1}+\ln 3\times\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{-x}-1}=$$

$$=e^0\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(\frac{x}{3}+1\right)}{x}}{\frac{e^{-x}-1}{x}}+\ln 3\times\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\frac{1}{e^x}-1}=1\times\frac{\frac{1}{3}\times\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x}{3}+1\right)}{\frac{x}{3}}}{-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}}+\ln 3\times\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\frac{1-e^x}{e^x}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{-1}+\ln 3\times\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\left(e^x-1\right)}e^x}{-\cancel{\left(e^x-1\right)}}=-\frac{1}{3}+\ln 3\times\frac{e^0}{-1}=-\frac{1}{3}-\ln 3$$

Se $x\to 0$ então $\frac{x}{3}\to 0$ e $-x\to 0$ (limites notáveis)