Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Sucessões

1. Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+5+8+11+...+3n-1}{2n^2-n+1}$?

2. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\left(\dfrac{e}{2}\right)^{-x}$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1)+g(2)+g(3)+...+g(n)\right)$, $n\in\mathbb{N}$?

3. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, definida por $h(x)=\dfrac{\ln x}{x-x^2}$ e a progressão aritmética (u_n) tal que $u_2=\dfrac{14}{3}$ e $u_5=\dfrac{20}{3}$.

Seja r a razão da progressão aritmética (u_n). Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty}h\left(r^n+1\right)$?

4. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência da seguinte forma $\begin{cases} u_1=-1 \\ u_2=-2 \\ u_{n+2}\times u_n=u_{n+1}, \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

Qual das seguintes afirmações não é verdadeira?

A $u_{n+6}-u_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

B (u_n) é limitada.

C (u_n) é convergente.

D (u_n) não é monótona.

5. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_{30}+u_{40}=40$.

Qual é a soma de todos os termos consecutivos de (u_n) entre os termos de ordem 10 e 60, incluindo-os?

A 1000

B 1020

C 1200

D 2040

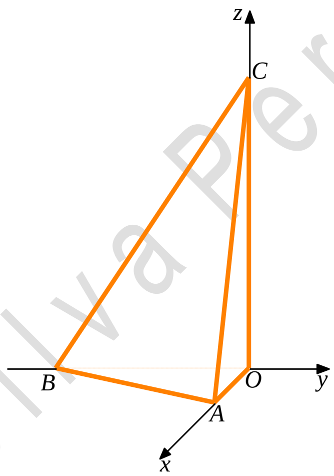
6. De uma progressão geométrica (v_n) sabe-se que $v_3 = p$, $v_4 = p - 6$ e $v_5 = p - 9$, com $p \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes expressões é o termo geral de (v_n)?

A $3 \times 2^{n-1}$ **B** 24×2^{-n} **C** $12 \times 12^{n-3}$ **D** 96×2^{-n}

GEOMETRIA ANALÍTICA

7. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[AOBC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semi-eixo positivo Ox;
- o ponto B pertence ao semi-eixo negativo Oy;
- o ponto C pertence ao semi-eixo positivo Oz;
- $\overline{OB} = 2\overline{OA}$ e $\overline{OC} = 3\overline{OA}$.

7.1. Escreva uma equação do plano paralelo ao plano ABC que contém o ponto D de coordenadas $(0,1,-2)$.

Sugestão: designe por k a abcissa do ponto A.

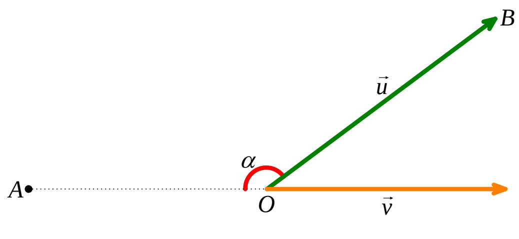
7.2. Seja α a amplitude do ângulo BAC.

Qual é o valor de $\operatorname{tg}^2(\pi - \alpha) + 10\operatorname{sen}(-2\alpha)$?

8. Na figura estão representados os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tal que $\|\vec{u}\| = 6$ e $\|\vec{v}\| = 5$.

Sabe-se que:

- α é a amplitude do ângulo obtuso AOB.
- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

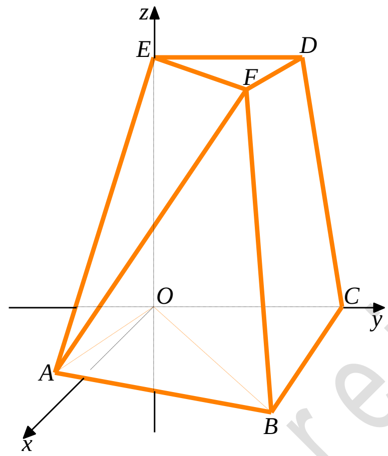


Qual é o valor de $\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{u})$?

A -84 **B** 0 **C** 12 **D** 14

9. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o sólido $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:



- uma equação do plano ABF é $6x+2y+z=34$
- uma equação do plano BCF é $8x+32y+5z=192$
- uma equação vectorial da recta AF é:

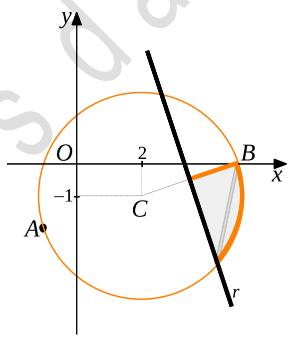
$$(x,y,z)=(6-3k,5k-1,8k),\quad k\in\mathbb{R}$$

- o ponto A pertence ao plano xOy e o ponto C ao eixo Oy

9.1. Escreva as equações cartesianas da recta BF.

9.2. Escreva uma equação do plano ACF.

10. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, uma circunferência centrada no ponto $C(2,-1)$ que contém os pontos $A(-1,-2)$ e B e a recta r, mediatriz do segmento de recta $[CB]$. O ponto B também pertence ao eixo Ox.



10.1. Mostre que as coordenadas do ponto B são $(5,0)$ e verifique que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

10.2. Escreva a equação reduzida da recta r e indique a sua inclinação. (Apresente o resultado em graus, arredondado às decimas)

10.3. Sejam P um ponto pertencente à recta r e D o ponto de coordenadas $(-2,4)$. Determine as coordenadas de P de modo que as rectas DP e BC sejam paralelas.

10.4. Escreva uma condição que defina a região sombreada da figura, incluindo a fronteira, e mostre que a sua área é igual a $5\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

11. Num saco estão alguns dados cúbicos numerados de 1 a 6 e indistinguíveis ao tacto.

Sabe-se que:

- o número de dados viciados é o dobro do número de dados equilibrados;
- lançando qualquer um dos dados viciados, a probabilidade de sair face numerada com um número par é 15%.

11.1. Escolhe-se, ao acaso, um dos dados do saco. Depois de lançado, verifica-se que saiu um número ímpar. Qual é a probabilidade de ser um dado equilibrado?

11.2. Lançando qualquer um dos dados viciados, sabe-se ainda que:

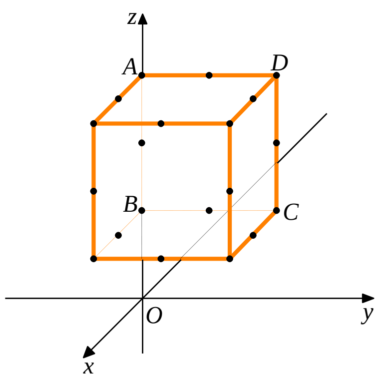
- qualquer uma das faces numeradas com um número par tem igual probabilidade de sair;
- a probabilidade de sair uma face numerada com um número primo, sabendo que está numerada com um número ímpar é $\frac{1}{5}$;
- saindo uma face numerada com um número primo, a probabilidade de estar numerada com um múltiplo de 3 é $0{,}55$.

Lança-se um dado viciado. Considere a variável aleatória X: «número da face voltada para cima».

Defina por meio de uma tabela a distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente as probabilidades na forma de dízima.

12. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ um cubo no qual se assinalaram vinte pontos, os vértices e pontos médios das suas arestas. Quatro dos vértices do cubo estão identificados com as letras A, B, C e D.

Sabe-se que a aresta $[AB]$ está contida no eixo Oz e a face $[ABCD]$ contida no plano yOz.



Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, dois dos pontos assinalados.

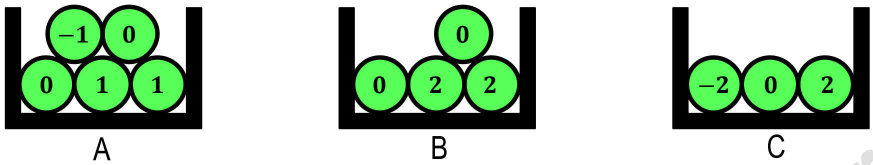
Qual é a probabilidade de definirem uma recta perpendicular ao eixo Oy?

A $\frac{8}{95}$ **B** $\frac{12}{95}$ **C** $\frac{16}{95}$ **D** $\frac{31}{95}$

13. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A)+0{,}75P(B)=1$ e que $P(A|B)=0{,}5$.

Qual é o valor de $P\left((A \cup B)\middle|\overline{A}\right)$?

14. Considere três caixas, A, B e C que contêm bolas numeradas com a composição indicada na figura.



14.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa A e duas bolas da caixa C e calcular o produto dos números das quatro bolas extraídas. Repete-se esta experiência quinze mil vezes e somam-se todos os produtos obtidos. De que valor é de esperar que essa soma esteja próxima?

Sugestão: Comece por construir a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X: «produto dos números inscritos nas quatro bolas retiradas».

14.2. Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso três bolas da caixa A e duas bolas da caixa B e colocá-las na caixa C. Em seguida retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro bolas da caixa C. Considere os acontecimentos:

X : «os números das três bolas retiradas da caixa A têm o mesmo valor absoluto»

Y : «os números das duas bolas retiradas da caixa B são iguais»

Z : «o produto dos números das quatro bolas retiradas da caixa C é positivo»

Qual é o valor de $P\left(Z\middle|\left(X \cap \overline{Y}\right)\right)$? Uma resposta a esta questão é $\dfrac{1+{}^{4}C_2}{{}^{8}C_2}$. Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada explique esta resposta, começando por interpretar o significado de $P\left(Z\middle|\left(X \cap \overline{Y}\right)\right)$ no contexto da situação descrita. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis.
- uma explicação do número de casos favoráveis.

15. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis, não certos e independentes ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que, a probabilidade de A ocorrer e B não ocorrer é $0{,}06$ e a probabilidade de A não ocorrer e B ocorrer é $0{,}56$.

Determine $P(A)$ e $P(B)$.

16. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$)

16.1. Mostre que $\left(P\left(A|\overline{B}\right)-1\right)\times P\left(\overline{B}\right)-P(A)=P\left(B|\overline{A}\right)\times P\left(\overline{A}\right)-1$.

16.2. Numa escola fez-se um estudo sobre os recursos que os alunos do 12.º ano usam para se prepararem para o Exame Nacional de Matemática A. Concluiu-se que:

- 40% dos alunos usam recursos disponibilizados na internet;
- dos alunos que não utilizam recursos disponibilizados na internet, três quartos usam livros de preparação para o Exame Nacional de Matemática A;
- entre os alunos que não utilizam livros de preparação para o Exame Nacional de Matemática A, um em cada quatro usa recursos disponibilizados na internet.

Escolhe-se ao acaso um desses alunos.

a) Qual é a probabilidade de utilizar um livro de preparação para o Exame Nacional de Matemática A? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 5.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

b) Qual é a probabilidade de usar recursos disponibilizados na internet, sabendo que também usa um livro de preparação para o Exame Nacional de Matemática A? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

17. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis e não certos ($A \subset S$ e $B \subset S$) tais que:

- $P\left(\overline{A}\right)=0,4$
- $P\left(\overline{B}|A\right)=3P\left(B|A\right)$
- $P\left(A\cup B\right)=7\times P\left(B\cap \overline{A}\right)$

Determine $P(B)$ e verifique que os acontecimentos A e B são independentes.

18. Considere uma caixa com vinte compartimentos numerados de 1 a 20. Pretende-se guardar nessa caixa doze bolas, uma por compartimento: cinco pretas, indistinguíveis; quatro brancas numeradas de 1 a 4; três azuis, numeradas de 1 a 3. De quantas maneiras distintas se pode fazê-lo?

A ${}^{20}C_5 \times {}^{15}A_4 \times 3!$ **B** ${}^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 7!$ **C** ${}^{20}C_5 \times 7!$ **D** ${}^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 4! \times 3!$

19. Seja X uma variável aleatória tal que $P\left(X=\frac{180}{x^2}\right)=\frac{x}{k}$, com $x\in\{1,2,3,4,5,6\}$ e $k\in\mathbb{R}$

19.1. Quais são os valores que a variável aleatória X pode tomar?

19.2. Mostre que $k=21$ e determine o valor médio da variável aleatória X.

19.3. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

19.4. Determine o valor de $P(X=20 \mid 11<X<50)$

CÁLCULO DIFERENCIAL

20. Sejam a, b, c três números reais positivos tais que $\log_a(b^2)=c$.

A expressão $\log_a b+\log_b(a^2)-\log_{\sqrt[3]{a}}(b^3)$ igual a:

A $\frac{(2-2c)(2+2c)}{c}$ **B** $\frac{(2-2c)^2}{c}$ **C** $\frac{(2-c)(2+c)}{c}$ **D** $\frac{(2-c)^2}{c}$

21. Seja h uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ tais que $h(4)=-8$ e para cada $n\in\mathbb{N}$ se tem $h\left(\frac{2}{n}\right)=(-2)^n$.

Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

A A equação $h(x)=-h\left(\frac{x}{2}\right)$ é possível em $[1,4]$.

B O contradomínio da função h é $\mathbb{R}$.

C A função h não tem zeros no intervalo $[2,4]$.

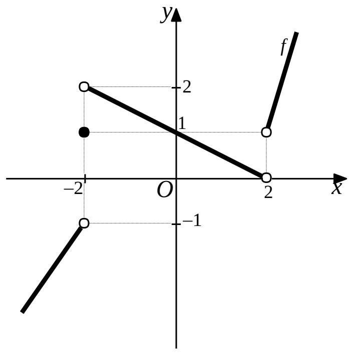
D A função h tem infinitos zeros.

22. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $f(x)=\ln(x^2+x)$ e a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é perpendicular à recta de equação $y=-\frac{x}{2}+1$ e contém o ponto de coordenadas $(2,3)$.

Qual é o valor de $(f\circ g)'(1)$?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

23. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.



Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{15}}$. Qual é o valor de $\lim f(-u_n - 2)$?

A -1 **B** 0 **C** 1 **D** 2

24. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(2ax)}{x^2} & \text{se} \quad x<0 \\ \dfrac{\ln(x+a)-\ln a}{4x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}, \text{ com } a\in\mathbb{R}^+$$

Sabe-se que a função g tem limite no ponto de abcissa 0. Qual é o valor de a?

A $\frac{1}{8}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** 2 **D** 8

25. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+\ln(2x)}{x} & \text{se} \quad x>0 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \\ 2x-\dfrac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}} & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$$

25.1. Determine, por definição, $f'(1)$ e mostre que uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é $y=\ln\left(\dfrac{e^{x+2}}{2^{x-2}}\right)$.

25.2. Verifique se existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e estude a função *f* quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indique as suas equações.

25.3. Estude, para $x \in \mathbb{R}^+$, a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos, determinando-os caso existam.

26. Considere a função g, de domínio $[0, +\infty[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{e^{-2x+2} - 1} & \text{se} \quad x < 1 \\ \dfrac{x^2 \ln x - 2}{x} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

26.1. Verifique se a função g é contínua em $x = 1$ e conclua sobre a existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

26.2. Para $x \in [1, +\infty[$, estude o gráfico da função g quando ao sentido das concavidades e mostre que tem um único ponto de inflexão de coordenadas $\left(2, \ln\left(\dfrac{4}{e}\right)\right)$.

26.3. Seja r uma recta de inclinação α, com $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $7\,\text{sen}(\alpha + \pi) = -2\,\text{sen}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Para $x \in [1, +\infty[$, considere o ponto P, pertencente ao gráfico de g, tal que a recta tangente ao gráfico de g no ponto P é perpendicular à recta r.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine as coordenadas de P.

Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- indicar as coordenadas do ponto P, arredondadas às décimas.

27. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x - \ln\left(x^2 + 2\right)$.

27.1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $3x - \ln(3 - x) - f(x) \geq \ln(2x + 2)$.

27.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

28. Um filme estreou numas das salas do cinema CINEMAX. A percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme, t dias após a estreia do mesmo, é dada por:

$$M(t)=\left(4t^2+48t+144\right)e^{-0,2t-1,2}\ ,\ t\in[0,20]$$

Admita que $M(0)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme no dia da estreia, 4 de Junho de 2015, $M(1)$ é a percentagem espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme no dia 5 de Junho de 2015 e assim sucessivamente.

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva os dois itens seguintes.

28.1. Em que dia a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme é máxima. Indique o valor dessa percentagem arredondado às décimas.

28.2. Num outro cinema, o CINEPLUS, o mesmo filme estreou no mesmo dia numa das suas salas. No entanto percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme, t dias após a estreia do mesmo, é dada por:

$$P(t)=5(t+6)^2\,e^{-0,347t-0,68814}\ ,\ t\in[0,20]$$

Da mesma forma, admita que $P(0)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme no dia da estreia, 4 de Junho de 2015, $P(1)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme no dia 5 de Junho de 2015 e assim sucessivamente.

Durante quantos dias a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme não foi inferior à percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme? Apresente os resultados finais arredondados às unidades e caso proceda a arredondamentos intermédios, utilize, no mínimo, cinco casas decimais.

Sugestão: decomponha o polinómio $4t^2+48t+144$.

29. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x)=-xe^{4-x^2}$.

29.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

29.2. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0,4\}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\ln(-x) & \text{se} \quad x<0 \\ \dfrac{4-x}{x-\sqrt{4x}} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

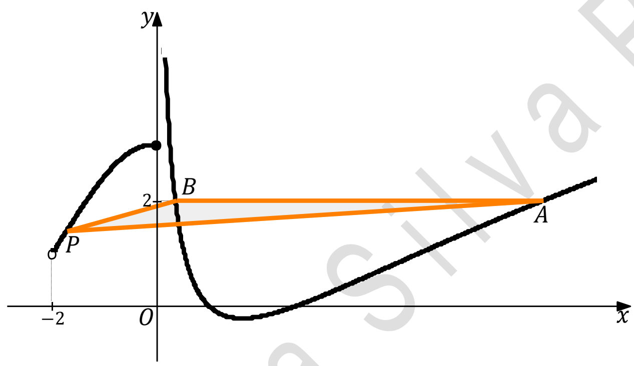
30. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}-1 & \text{se} \quad x\leq 0\\ \ln^2 x-\ln x & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

30.1. Estude a função f quanto continuidade no ponto de abcissa 0.

30.2. Estude, para $x\in\mathbb{R}^+$, a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

30.3. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo $[APB]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f, têm ordenada 2 e abcissa positiva
- o ponto P desloca-se sobre o gráfico da função f, no segundo quadrante. Para cada posição do ponto P a sua abcissa, x, pertence ao intervalo $]-2,0]$

Determine as abcissas dos pontos P de modo que a área do triângulo $[APB]$ seja igual a 2.

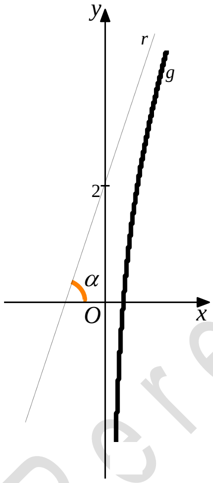
Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, o valor exacto das abcissas dos pontos A e B
- escrever uma condição que permite resolver o problema
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- indicar as abcissas dos pontos P que são solução do problema, apresentando-as arredondadas às centésimas.

31. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}^+$ e uma recta r, assimptota do gráfico de g.

Sabe-se que:

- α é a inclinação da recta r, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\operatorname{tg}(-\alpha+\pi)=-3$
- a recta r intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,2)$



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{g(x)}-x\right)$?

A -6 **B** $-\frac{2}{3}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** 6

32. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, do tipo $f(x)=ax^2+ax$ cujo gráfico tem a concavidade voltada para cima. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=e^{-x}\times f(x)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $[0,3]$.

B O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $[0,2]$.

C O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0]$ e em $[3,+\infty[$.

D O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$.

33. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a recta de equação $y=6x-2$ é assimptota oblíqua do seu gráfico, quando $x\to\pm\infty$. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x)=\frac{xg(-x)}{g(x)}$.

Mostre que a recta de equação $y=-x-\frac{2}{3}$ é assimptota do gráfico de f.

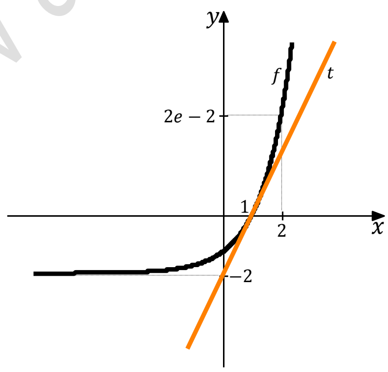
34. Sejam f, g e h três funções de domínio $\mathbb{R}$ e a e b dois números reais tais que:

- f e g são contínuas em $\mathbb{R}$
- $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x \Leftrightarrow x = a \quad \vee \quad x = b$
- 2 e 3 pertencem ao intervalo $]a, b[$
- $h(x) = (f(x) - a - 1)g(x)$

Mostre que a função h tem pelo menos um zero.

35. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, contínua em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:



- a função f tem um único zero em $x = 1$ e o ponto de coordenadas $(2, 2e - 2)$ pertence ao seu gráfico
- a recta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 e contém o ponto de coordenadas $(0, 2)$
- a recta de equação $y = -2$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$

Sejam g e h as funções de domínio $\mathbb{R}$ definidas por $g(x) = (f(x) + 1)e^{x-1}$ e $h(x) = \begin{cases} 3g(x) & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2\ln x}{x-1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$.

Qual das seguintes a afirmações não é necessariamente verdadeira?

A A recta de equação $y = 3x - 2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

B A equação $g(x) = e$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 2]$.

C A equação $h(x) = 2{,}5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 2]$.

D A recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de h, quando $x \to -\infty$.

Numa pequena composição indique a opção correcta e explique as razões que o levam a rejeitar as restantes opções. Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

36. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a recta de equação $2y-6x=1$ é assimptota do gráfico de g.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to0^+}\left(3g\left(\frac{1}{x}\right)-x\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\right)$?

37. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que a sua derivada, f', também é contínua em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3+x)-f(3)}{x^2-3x}=0$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=2$.

Sejam g, a função de domínio $[-3,4]$, definida por $g(x)=f'(x)-f'(2)$ e h, a função de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $h(x)=f(x)+\dfrac{x^3+1}{e^{-x}}-x$.

Considere as seguintes afirmações:

A A função f não tem extremos relativos.

B A função g tem pelo menos um zero.

C O gráfico da função h tem uma assimptota de equação $y=-2x+2$, quando $x\to-\infty$.

Elabore uma composição na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

38. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tal que $g(x)=mx+b$, com $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ e $b\in\mathbb{R}$. Sabe-se que o gráfico de g é assimptota do gráfico de f, quando $x\to+\infty$.

Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\dfrac{x^2}{f(-x)-g\left(\frac{x}{m}\right)}$.

Mostre que o gráfico de h admite uma assimptota quando $x\to+\infty$ e escreva uma equação que a defina.

39. Considere a função g, de domínio $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, definida por:

$$g(x) = 2\operatorname{sen}^2(\pi + x) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\operatorname{tg} x \cos(2\pi - x)$$

39.1. Mostre que $g(x) = (\operatorname{sen} x - 1)^2$

39.2. Determine as soluções da equação $4g(x) = 1$ pertencente ao intervalo $\left] -\frac{3\pi}{2}, \pi \right]$.

39.3. Estude no intervalo $[0, 2\pi]$ a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

39.4. Seja $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ tais que $\operatorname{tg}\theta = \frac{5}{12}$ e $g(\theta) = 1 - 5m^2$, com $m \in \mathbb{R}$. Determine o(s) valor(es) de m.

40. Seja g, a função de domínio $[-2\pi, +\infty[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos(2x) & \text{se} \quad -2\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{x^3 + 3x}{e - e^{ax+1}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}, \text{ com } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

40.1. Determine a de modo que a função g seja contínua em todo o seu domínio.

40.2. Determine, no intervalo $[-2\pi, 0]$, os zeros da função g.

40.3. Seja $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$. Sabendo que $\operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$, determine $g(\theta - \pi)$.

41. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = \cos(ax) - 1 + (a+b)\operatorname{sen}(ax)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x)}{x} = 2a$. Quais podem ser os valores de a e de b?

A $a = 0$ e $b = 2$

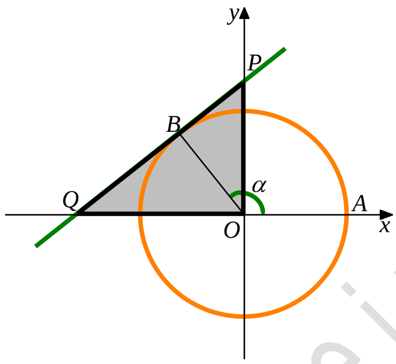
B $a = 1$ e $b = 3$

C $a = 3$ e $b = 1$

D $a = 2$ e $b = 0$

42. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e o triângulo $[OPQ]$.

Sabe-se que:



- o ponto A pertence à circunferência e ao semi-eixo positivo Ox;
- o ponto P pertence ao eixo Oy;
- o ponto Q pertence ao eixo Ox;
- a recta QP é tangente ao círculo no ponto B.

Seja α a amplitude do ângulo AOB, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

42.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada em função α de por $g(\alpha) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$.

42.2. Determine o valor de α para o qual a área o triângulo $[OPQ]$ é mínima.

Interprete geometricamente o resultado obtido e determine o valor mínimo da área do triângulo $[OPQ]$.

43. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{sen}(2x) - 2\operatorname{sen} x$.

43.1. Determine, por definição, $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

43.2. Seja P um ponto de abcissa $x \in [0, \pi]$, que se desloca sobre o gráfico de h. Para cada posição do ponto P, considere o triângulo $[OPQ]$ tais que O é a origem do referencial e Q pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa que P.

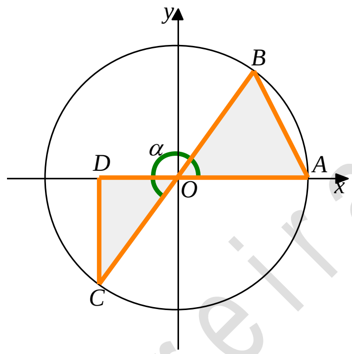
Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa do ponto P de modo que a área do triângulo seja máxima.

Na sua resposta deve:

- escrever a área do triângulo $[OPQ]$ em função da abcissa de P.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar a abcissa do ponto P, arredondada às décimas, que é a solução do problema.

43.3. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, o polígono $[ABOCD]$ e a circunferência de equação $x^2+y^2=4$.

Sabe-se que:



- O ponto A pertence ao eixo Ox e à circunferência.
- O ponto C desloca-se no terceiro quadrante (eixos não incluídos) sobre a circunferência. O ponto B acompanha o seu movimento de modo que $[BC]$ é sempre um diâmetro da circunferência.
- O ponto D pertence ao eixo Ox e acompanha o movimento do ponto C de modo que $[CD]$ é sempre paralelo a Oy.

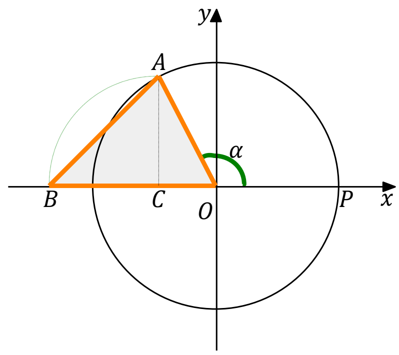
Seja α a amplitude do ângulo AOC, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Determine o valor de α de modo que a área do polígono $[ABOCD]$ seja máxima e indique o valor da área máxima.

Sugestão: Comece por mostrar que a área do polígono $[ABOCD]$ é dada por $h(\alpha)$.

44. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy um círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:



- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, no segundo quadrante (eixo Ox não incluído). O ponto C acompanha o movimento de A, de modo que $[AC]$ é sempre paralelo a Oy
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o arco de circunferência AB está centrado em C
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo POA, com $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Seja g a função que dá a área do triângulo $[OAB]$ em função de α.

44.1. Mostre que $g(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$. Determine $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

44.2. Mostre que $g'(\alpha)=\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)-\cos(2\alpha)}{2}$ e determine o valor de α para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é máxima.

NÚMEROS COMPLEXOS

45. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

45.1. Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $z^2-4iz-3=0$

b) $z^3-4z^2=2z-20$, sabendo que -2 é uma solução da equação.

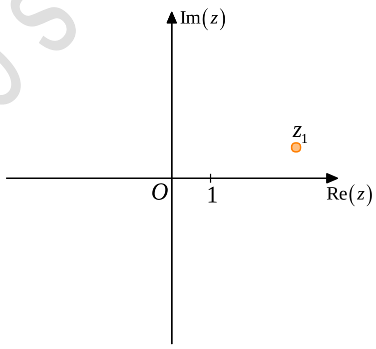
45.2. Considere o polinómio $P(z)=z^4-az^3-bz^2+8bz-6a$, com $a,b\in\mathbb{R}$

Sabe-se que $2i$ é uma raiz do polinómio.

a) Mostre que $a=2$ e $b=-1$.

b) Determine a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes do polinómio.

46. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z_1, cuja imagem geométrica esta representado no plano complexo da figura, e $z_2=2-3i$.



46.1. Considere o número complexo $w=(z_1-z_2)i^{235}$.

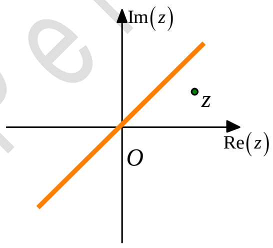
a) Em que quadrante se situa a imagem geométrica de w?

b) Considere que $z_1=6+i$. Escreva w na forma trigonométrica.

46.2. Considere agora que $z_1 = 3\operatorname{cis}\theta$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Determine θ de modo que a imagem geométrica de $\dfrac{(z_1)^3}{\operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}}$ pertença à bissectriz do terceiro quadrante.

46.3. Resolva em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a equação $z^4\left(-\frac{5}{2} + \frac{i}{2}\right) = \overline{z} \times z_2$.

47. Na figura estão representados, no plano complexo, a imagem geométrica do número complexo z, tal que $|z| = 1$ e recta definida pela condição $\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) = 0$.



A que quadrante pertence a imagem geométrica do número complexo $iz^2 - 2i$?

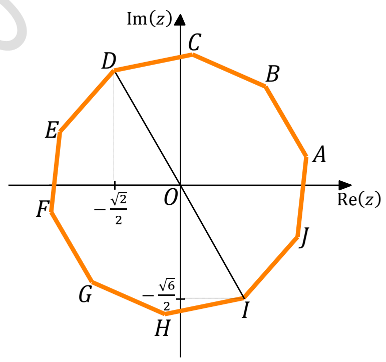
A 1.º quadrante

B 2.º quadrante

C 3.º quadrante

D 4.º quadrante

48. No plano complexo da figura está representado um decágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem. Os vértices do decágono são as raízes de índice n de um número complexo z. O vértice D tem abcissa $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e o vértice I tem ordenada $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.



Qual é o número complexo cuja imagem é o ponto G?

A $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{27\pi}{20}$

B $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{15}$

C $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{15}$

D $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{27\pi}{20}$

49. Mostre que $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{z} \times w) + |w|^2$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

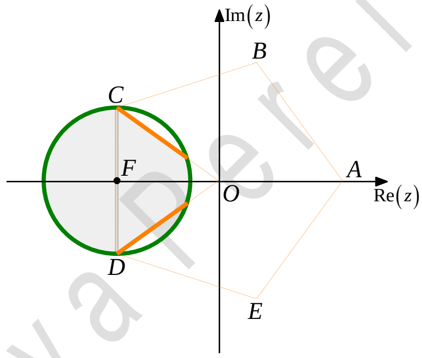
50. Em $\mathbb{C}$, conjunto do números complexos, considere $w=\dfrac{1-2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{9}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{9}\right)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}$.

Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto solução da condição $z^2=w\bar{z} \quad \wedge \quad z\neq 0$. Apresente as soluções na forma trigonométrica.

51. Na figura estão representados, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$, inscrito numa circunferência centrada na origem, e uma circunferência centrada no ponto F.

Sabe-se que:

- o segmento de recta $[CD]$ é paralelo ao eixo imaginário.
- os pontos C e D pertencem à circunferência.
- o ponto A pertence ao eixo real e $\overline{OA}=2$



51.1. Seja C a imagem geométrica do número complexo z_3. Escreva na forma algébrica o número complexo:

$$\frac{(z_3)^5\times\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{12}}{-\sqrt{6}+\sqrt{2}i}-\frac{2-6i}{1-i}$$

51.2. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a região sombreada da figura, incluindo a fronteira.

F I M