Ficha de Trabalho – Exponenciais e Logaritmos

Matemática A – 12.º Ano

"A Matemática pura, é à sua maneira, a poesia das ideias lógicas."
Albert Einstein

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em B, tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{AC} = c$.

Sabe-se que $\ln c - \ln b = a$. A que é igual a expressão $\ln(bc + c^2) + \ln\left(\frac{c}{b} - 1\right)$?

A $a + \ln a$ **B** $b + \ln a$ **C** $a + 2\ln a$ **D** $b + 2\ln a$

2. Seja a um número real tal que $\log_a 4 = 8$.

Qual é o valor de $\log_{4a} \sqrt[4]{64}$?

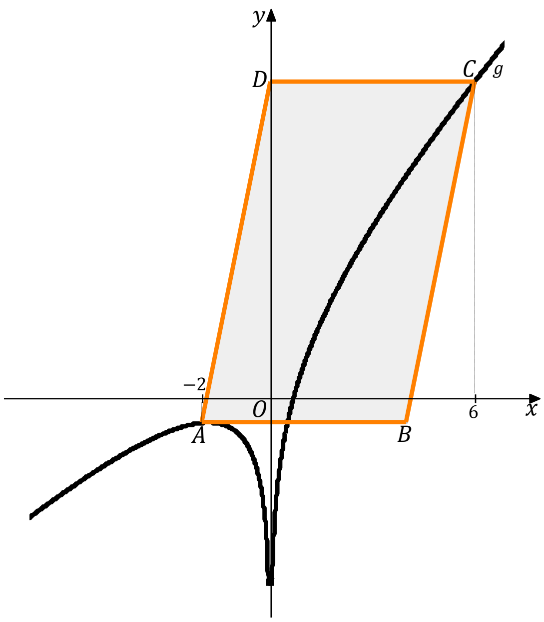
A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$

3. Sejam a, b e c três números reais tal que $\log_{ab} a + 2\log_{ab}(bc) - \log_{ab} c = 2$.

Qual é o valor de $\log_a(ac^2)$?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5

4. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $g(x) = x + \log_3(x^2)$ e um paralelogramo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de g e tem abcissa -2;
- o ponto C pertence ao gráfico de g e tem abcissa 6.

Qual é a área do paralelogramo $[ABCD]$?

A 36 **B** 48

C 60 **D** 72

5. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$	$2^{-\frac{k}{2}}$

(k designa um número real)

Qual é o valor médio da variável aleatória X?

A 2 **B** $2{,}25$ **C** $2{,}5$ **D** $2{,}75$

6. Para certos valores reias de a a função g, definida por $g(x) = (\log(a-3) + \log a)^x$ é uma função exponencial estritamente crescente. Então pode-se afirmar que:

A $a \in]5, +\infty[$ **B** $a \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

C $a \in]3, +\infty[$ **D** $a \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$

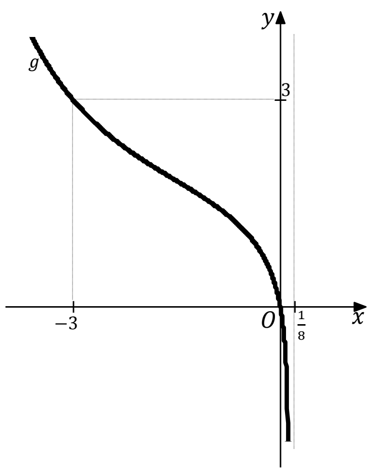
7. Sejam x e y dois números reais positivos tais que $4^{\log_{16} y - 2\log_4 x} = 3$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $y = 3x^2$ **B** $y = 9x^2$ **C** $y = 3x^4$ **D** $y = 9x^4$

8. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g definida por $g(x) = e^{-x+a} + \log_5(1-bx)$, com a e b contantes reais.

Sabe-se que:

- o ponto de coordenadas $(-3,3)$ pertence ao gráfico de g;
- A recta de equação $x = \frac{1}{8}$ é assimptota vertical do gráfico de g.



Quais são os valores de a e de b?

A $a = 3$ e $b = 8$ **B** $a = -3$ e $b = 8$

C $a = -3$ e $b = -8$ **D** $a = 3$ e $b = -8$

9. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 16^{ax^2+ax}$, com $a < 0$. Qual é o contradomínio de f?

A $\left]0, \frac{1}{2^a}\right]$ **B** $\left[\frac{1}{2^a}, +\infty\right[$ **C** $\left]0, \frac{1}{4^a}\right]$ **D** $\left[\frac{1}{4^a}, +\infty\right[$

10. Considere as seguintes afirmações:

I. $c = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow c = \ln a - \ln b$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$

II. Se $f(x) = \ln(x^n)$ então $f\left(\sqrt[n]{ab}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$

III. $\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\sqrt{x}\right) = 3\log_{a^2} x$, com $x \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

Quais são as afirmações verdadeiras?

A I e III **B** Apenas a II **C** Apenas a III **D** II e III

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

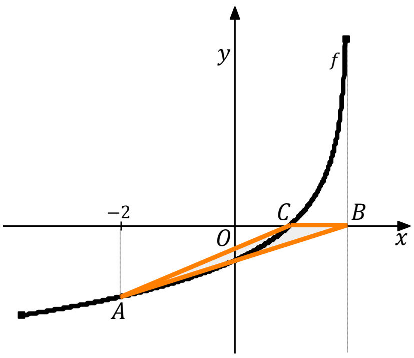
1. Considere a função f, de domínio $]-\infty, 2[$, definida por $f(x) = 1 - \log_3(6 - 3x)$

1.1. Determine o conjunto solução da inequação $f(x) - f(1 - 2x) \geq 1 + \log_3 x$.

1.2. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa -2;
- o ponto B pertence ao eixo Ox e à assimptota do gráfico de f;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e ao gráfico de f.



Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\log_3 2$.

1.3. Mostre que a função f é injectiva.

1.4. Caracterize a função f^{-1}, função inversa de f.

1.5. Determine o conjunto solução da equação $f^{-1}(x) + 3^{x+1} = 0$.

2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \log_b(ab + 2) + e^{ax+b}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

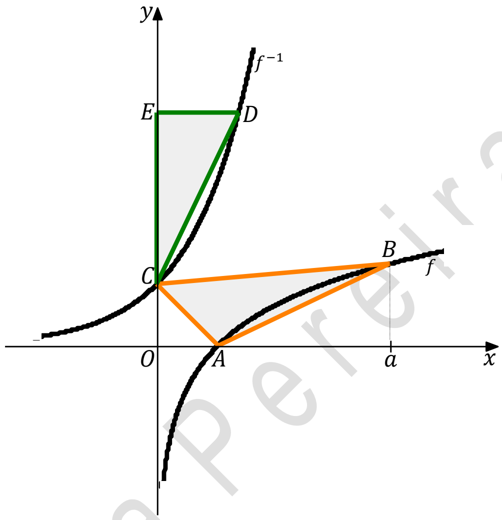
2.1. Sabendo que $e^{2+\ln(a+b)} = 5e^2$ e que $\log_a(b + 7) = 2$, mostre que $g(x) = 3 + e^{3x+2}$.

2.2. Determine o conjunto solução da inequação $\frac{e^{2x^2}}{3e^{x^2}+1} < \frac{e^{x^2}}{g(x)}$.

2.3. Mostre que g tem função inversa e caracterize-a.

3. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$, parte do gráfico da função f^{-1}, função inversa de f, o triângulo $[ABC]$ e o triângulo $[CDE]$.

Sabe-se que:



- A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox;
- C é o ponto de intersecção do gráfico de f^{-1} com o eixo Oy;
- o ponto B pertence ao gráfico de f e tem abcissa a;
- o ponto D pertence ao gráfico de f^{-1} e tem ordenada a;
- o ponto E pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada que o ponto D;
- a é um número real maior que 2.

3.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do triângulo $[CDE]$ se e só se $\ln a = \frac{a-1}{a-2}$.

3.2. Recorrendo à calculadora gráfica determine as coordenadas do ponto B de modo que a área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do triângulo $[CDE]$

Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar as coordenadas do ponto B, arredondadas às centésimas.

4. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = a^x + a^{-x}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$.

4.1. Considere o triângulo $[ABC]$ de área $\frac{225}{8}$ tal que o ponto A pertence ao gráfico de h e tem abcissa 2, o ponto B é o simétrico de A em relação ao eixo Oy e o ponto C pertence ao gráfico de h e ao eixo Oy.

Mostre que $a = \frac{1}{4} \quad \vee \quad a = 4$.

4.2. Determine o conjunto solução da inequação $2h(x-1) \geq 5$.

4.3. Mostre que $\log_4\big(2 + h(x)\big) = \log_2(4^x + 1) - x, \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Devido a várias restrições os responsáveis de uma reserva de caça controlam a população de coelhos de modo que ela cresça a uma taxa de 4% a cada quatro meses. Admita que a população de coelhos na reserva num certo instante inicial é de C_0 indivíduos e seja C a função que dá o número de coelhos da reserva, t anos a partir de um certo instante inicial.

5.1. Determine $C\left(\frac{4}{3}\right)$ em função de C_0.

5.2. Defina a expressão analítica da função C, apresentando-a na forma $C_0 \times a^{bt}$, sendo a e b constantes reais positivas.

5.3. Nas alíneas seguintes considere $a = 1{,}04$ e $b = 3$.

a) Qual é o aumento, em percentagem, do número de coelhos a cada 27 meses? Apresente o resultado arredondado às unidades.

b) Determine x de modo que $C(t + x) = 3C(t)$. Interprete o resultado no contexto da situação descrita. Apresente o resultado em anos e meses, meses arredondados às unidades.

c) Mostre que $t = \frac{\ln C - \ln C_0}{3\ln(1{,}04)}$.

6. O número de utentes, em milhares, de um Centro de Saúde é dado em função do tempo, t, medido em anos, por:

$$N(t) = \frac{3}{1+ae^{bt}}\text{, com } a, b \in \mathbb{R}$$

O instante $t = 0$, corresponde ao início de 2010.

6.1. Sabendo que no final de 2010 o número de utentes do Centro de Saúde era de 801 e que passados dois anos esse número já era de 1642, determine os valores de a e de b. Apresente o valor de a arredondado às unidades e o valor de b arredondado às décimas. Caso faça arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve no mínimo três casas decimais.

Nas alíneas seguintes, considere $a = 5$ e $b = -0{,}6$.

6.2. Determine $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$ e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

6.3. No decorrer de que ano o número de utentes no Centro de Saúde atingiu os 200?

6.4. Um outro Centro de Saúde foi inaugurado no início de 2010. O número de utentes deste centro, em milhares, é dado, em função do tempo, t, medido em anos, por $S(t) = \frac{2{,}5e^{0{,}3t}}{1+e^{0{,}3t}}$. Ao fim de quanto tempo o número de utentes nos dois centros é igual? Apresente o resultado em anos e meses, meses arredondados às unidades. Caso faça arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve no mínimo três casas decimais.

7. A massa, m, em miligramas, do isótopo radioactivo Zinco-65 ($Z65$) relaciona-se com tempo, t, medido em anos, através da fórmula:

$$t(m) = -0{,}965\ln(m) + a$$

Sendo a uma contantes real.

7.1. Num certo instante inicial foi colocado em repouso uma amostra de 5 miligramas de $Z65$. Qual é o valor de a? Apresente o resultado arredondado às centésimas.

7.2. Mostra que $t\left(\frac{m}{3}\right) - t(m)$ é constante e interpreta o resultado no contexto do problema. Apresente o resultado em anos e meses, meses arredondados às unidades.

7.3. Determine o valor de x tal que $t(xm) = t(m) + 0{,}6692$. Interprete o resultado no contexto do problema. Apresente o resultado arredondados às decimas.

7.4. Escreva m em função de t. Apresente o resultado na forma Ae^{Bt}. Apresente o valor de B arredondados às milésimas.

7.5. Mostre que $\frac{m(t+2)}{m(t)}$ é constante e interprete o resultado no contexto do problema.

Solucionário

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. C **2.** C **3.** B **4.** C **5.** B **6.** A **7.** D **8.** B **9.** A **10.** D

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.1. $\left]0,\frac{1}{3}\right] \cup [1,2[$ **1.4.** $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\,;\, f^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{3^x}$ **1.5.** $\{-1\}$

2.2. $]-2,-1[$ **2.3.** $D_{g^{-1}} =]3,+\infty[\,;\, g^{-1}(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\ln(x-3)$

3.2. $B(a,\ln a)$, com $a \approx 4{,}24$ e $\ln a \approx 1{,}45$

4.2. $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

5.1. $C\left(\frac{4}{3}\right) = C_0 \times (1{,}04)^4$ **5.2.** $C(t) = C_0 \times (1{,}04)^{3t}$ **5.3.** **a)** Aproximadamente 30%.

5.3. **b)** $x \approx 9{,}337$. O número de coelhos na reserva triplica a cada nove anos e quatro meses, aproximadamente ($0{,}337 \times 12 \approx 4$).

6.1. $a \approx 5$ e $b \approx -0{,}6$

6.2. $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 3$. Com o passar do tempo, o número de utentes do Centro de Saúde tende para 3000.

6.3. No decorrer do ano de 2008. **6.4.** Passados, aproximadamente, três anos e seis meses.

7.1. $a \approx 1{,}55$ **7.2.** A massa de $Z65$ reduz-se $\frac{2}{3}$ ($\approx 66{,}7\%$) a cada ano e um mês, aproximadamente.

7.2. $t\left(\frac{m}{3}\right) - t(m) \approx 1{,}06$. A massa de $Z65$ reduz-se $\frac{2}{3}$ ($\approx 66{,}7\%$) a cada ano e um mês, aproximadamente ($0{,}06 \times 12 \approx 1$).

7.3. $x \approx 0{,}5$. A massa de $Z65$ reduz-se 50% a cada 244 dias, aproximadamente ($0{,}6692 \times 365 \approx 244$). Ou, a semi-vida do $Z65$ é, aproximadamente, de 244 dias.

7.4. $m(t) = \underbrace{e^{\frac{a}{0,965}}}_{A} \times e^{-1,036t}$

7.5. $\frac{m(t+2)}{m(t)} \approx 0,126$. A massa de $Z65$ reduz-se, aproximadamente, $87,4\%$ a cada dois anos ($100\% - 12,6\% = 87,4\%$).