

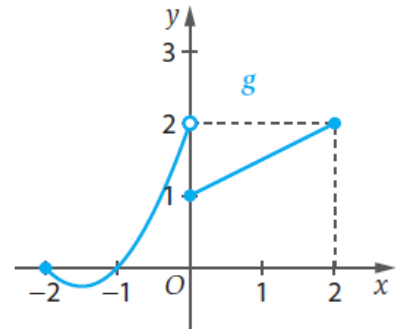
BANCO DE QUESTÕES – MATEMÁTICA A 12.º ANO

DOMÍNIO: Funções reais de variável real

1. Seja g a função, de domínio $[-2, 2]$, representada graficamente na figura ao lado, e seja (u_n) a sucessão definida por $-\frac{1}{n}$.

Qual é o valor de $\lim g(u_n)$?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2



2. Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left((\sqrt{x^2 - 1} + x) \times \sin(\pi x) \right)$.

Na tua resposta, utiliza o teorema das funções enquadradas.

3. Seja s a reta de equação $(x, y) = (1, 2) + k(-2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que a reta s é tangente ao gráfico de uma função, f , no ponto de abcissa 3.

3.1 Qual é o valor de $f'(3)$?

- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

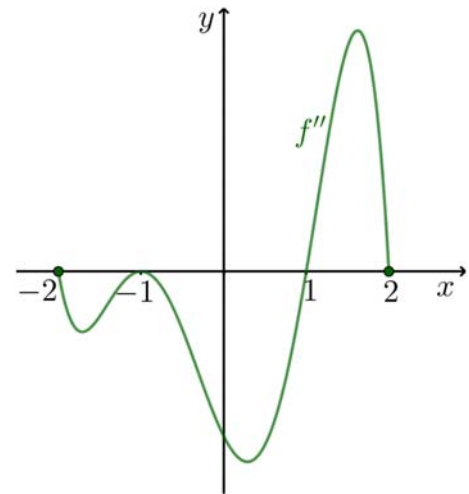
3.2 Qual é o valor de $f(3)$?

- (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. Na figura seguinte, está representada graficamente f'' , a segunda derivada de uma função f , de domínio $[-2, 2]$.

Os zeros da função f'' são -2 , -1 , 1 e 2 .

Seja f' a primeira derivada de f .



4.1 Qual das proposições seguintes é verdadeira?

- (A) A função f' é crescente no intervalo $]-2, -1[$.
- (B) A função f' é crescente no intervalo $]-1, 0[$.
- (C) A função f' é decrescente no intervalo $]0, 1[$.
- (D) A função f' é decrescente no intervalo $]1, 2[$.

4.2 Qual das proposições seguintes é verdadeira?

- (A) A concavidade do gráfico de f é voltada para cima no intervalo $]-2, -1[$.
- (B) A concavidade do gráfico de f é voltada para cima no intervalo $]-1, 0[$.
- (C) A concavidade do gráfico de f é voltada para baixo no intervalo $]0, 1[$.
- (D) A concavidade do gráfico de f é voltada para baixo no intervalo $]1, 2[$.

4.3 Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?

- (A) 1
- (B) 2
- (B) 3
- (B) 4

5. Determina uma expressão analítica da segunda derivada de cada uma das funções, reais de variável real, definidas por:

5.1 $f(x) = \sqrt{x-1}(x-1)$

5.2 $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

6. Seja g a função definida, em \mathbb{R}_0^- , por

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 9}$$

Estuda a função g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

7. Considera a função f definida, em $[0, +\infty[$, por $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - 2x + 1)$.

O gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão.

7.1 Mostra, utilizando o teorema de Bolzano-Cauchy, que a abcissa desse ponto de inflexão pertence ao intervalo $]0,4; 0,5[$.

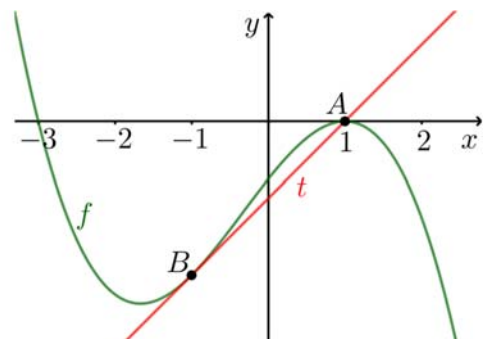
7.2 Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto de inflexão.

Na tua resposta:

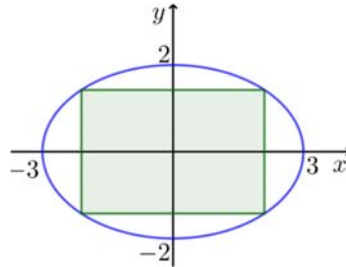
- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

8. Na figura ao lado, estão representadas graficamente a função f , polinomial, definida por $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x - 3$, e a reta t , tangente ao gráfico de f no ponto B . A reta t também intersesta o gráfico de f no ponto A , de abcissa 1.

Determina as coordenadas do ponto B .



9. Determina a área do retângulo de maior área inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, cujos lados são paralelos aos eixos da elipse.



DOMÍNIO: Trigonometria e funções trigonométricas

10. A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \sin(2x)$, no ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$ é:

- (A) $y = x - \frac{\pi}{2}$ (B) $y = -x + \frac{\pi}{2}$
 (C) $y = 2x - \pi$ (D) $y = -2x + \pi$

11. A função derivada de uma função f , de domínio \mathbb{R} , é definida por

$$f'(x) = \cos(2x)$$

- 11.1 Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

- (A) $f(x) = \sin x \cos x$ (B) $f(x) = \sin(2x)$
 (C) $f(x) = -\sin x \cos x$ (D) $f(x) = -\sin(2x)$

- 11.2 Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{f(x) + \frac{\sqrt{3}}{4}}{x + \frac{\pi}{6}}$?

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. Seja h a função definida, no seu domínio de existência, por $h(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

12.1 O domínio da função h é:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{2}{\pi + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq \frac{2}{\pi + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

12.2 Uma expressão analítica da função derivada de h é:

(A) $h'(x) = -\frac{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{x^2}$

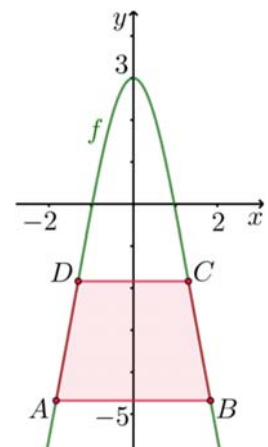
(B) $h'(x) = \frac{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{x^2}$

(C) $h'(x) = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

(D) $h'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

13. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy , parte do gráfico da função real de variável real f , definida por $f(x) = \cos(2x) - \sqrt{3}x^2 + 3$, e o trapézio $[ABCD]$, cujos vértices são os pontos de inflexão do gráfico de f , cujas abscissas pertencem ao intervalo $] -2, 2[$.

Determina a área do trapézio $[ABCD]$.



14. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 + x} & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{4x^2 - x}{-3x^2 + x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

14.1 Averigua se a função g é contínua em $x = 0$.

14.2 Averigua se a função g é diferenciável em $x = 0$. Em caso afirmativo, indica o valor de $g'(0)$.

14.3 Estuda a função g quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

14.4 Sabe-se que função g tem um máximo relativo no intervalo $[4, 5]$.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor desse máximo relativo.

Na tua resposta:

- determina uma expressão da função derivada da função g ;
- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- justifica que se trata de um máximo relativo;
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

DOMÍNIO: Funções exponenciais e funções logarítmicas

15. Seja k um número real tal que a sucessão (u_n) , definida por $u_n = \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$, tem limite igual a \sqrt{e} .

Qual é o valor de k ?

- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

16. Foram aplicados 1800 euros numa aplicação financeira com regime de juro composto à taxa semestral de 1%.

Qual das seguintes expressões dá o capital acumulado ao fim de n anos?

- (A) $1800\left(1 + \frac{1}{100}\right)^n$ (B) $1800\left(1 + \frac{2}{100}\right)^n$
 (C) $1800\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{2n}$ (D) $1800\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{2n}$

17. Seja a o número real tal que $3a = \log_7 9$.

Qual é o valor de 49^a ?

- (A) $\sqrt{18}$ (B) $\sqrt{729}$ (C) $\sqrt[3]{18}$ (D) $\sqrt[3]{81}$

18. Seja b um número real positivo.

Qual das seguintes expressões é equivalente a $\log_5 \frac{125}{\sqrt{b}} - \log_5 (5b)$?

- (A) $-\log_5 b$ (B) $\log_5 b$ (C) $2 - \frac{3}{2} \log_5 b$ (D) $2 + \frac{1}{2} \log_5 b$

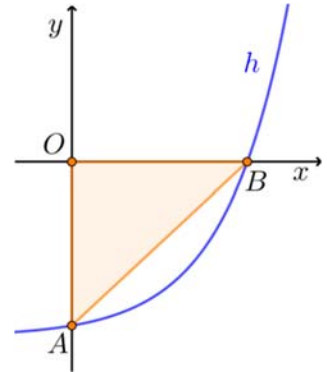
19. Qual dos seguintes limites é finito?

- (A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$ (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$ (C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\pi - e)^x$ (D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e + \pi)^{-x}$

20. Qual é o domínio da função real de variável real, f , definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{x+1}\right)$?

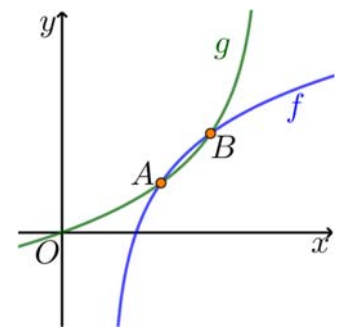
- (A) $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ (B) $]-1, 0[$
 (C) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ (D) $]0, 1[$

21. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy , parte do gráfico da função real de variável real h , definida por $h(x) = 2^{x-2} - 4$, e o triângulo $[ABO]$, em que A e B são os pontos de interseção do gráfico de h com os eixos coordenados.



Determina o perímetro do triângulo $[ABO]$.

22. Na figura ao lado, estão representadas graficamente, em referencial o.n. Oxy , as funções f e g , reais de variável real, definidas por $f(x) = \log_2(x-1)+1$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4-x)+2$. Os pontos A e B são os pontos de interseção dos gráficos de f e g .



22.1 Determina o domínio de existência de cada função.

22.2 Determina o zero da função f .

22.3 Estuda as funções f e g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

22.4 Determina a distância entre os pontos A e B .

23. Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x-1}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

23.1 Averigua se a função h é contínua em $x = 0$.

23.2 Estuda a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

27.3 Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a solução da equação $g(x) = 1$ no intervalo $]0,1[$, que se sabe ser única.

Na tua resposta:

- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

27.4 Sabe-se que o gráfico da função g tem uma única reta tangente com declive 2 no intervalo $]0,1[$.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto de tangência dessa reta.

Na tua resposta:

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

28. Uma chávena de café foi servida a um cliente de um restaurante à temperatura de 80°C . A temperatura ambiente da sala do restaurante onde o café foi servido era 20°C .

Sabe-se que a expressão que dá a temperatura do café em função do tempo, em minutos, decorrido desde que foi servido ($t = 0$) é da forma:

$$T(t) = T_A + ae^{bt}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

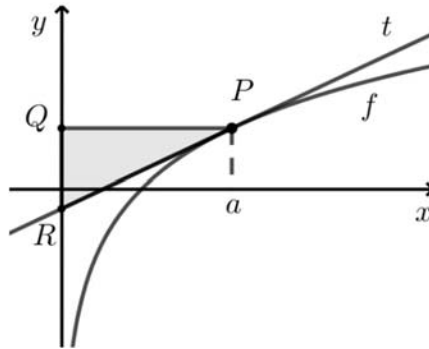
Sabe-se que, 10 minutos depois de o café ter sido servido, a sua temperatura passou a ser 45°C .

Determina os valores das constantes a e b .

Apresenta o valor de b com arredondado às milésimas.

29. Na figura seguinte, estão representados, em referencial o.n. Oxy :

- parte do gráfico da função f , real de variável real, definida por $f(x) = \ln x$;
- a reta t , tangente ao gráfico de f no ponto P , de abscissa a , com $a > 0$;
- o triângulo $[PQR]$, sendo a reta PQ paralela ao eixo Ox e o vértice R o ponto de interseção da reta t com o eixo das ordenadas.



Mostra que o valor da área do triângulo $[PQR]$ é igual a $\frac{a}{2}$, para qualquer $a > 0$.

SOLUÇÕES

Funções reais de variável real

1. (D)

2. 0

3.1 (B)

3.2 (B)

4.1 (C)

4.2 (C)

4.3 (A)

$$5.1 \quad f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x-1}}$$

$$5.2 \quad f''(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{(x+1)^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

6.2 O gráfico da função g tem apenas uma assíntota (oblíqua) de equação $y = x - 2$.

7.2 0,48

8. $(-1, -8)$

9. 12

Trigonometria e funções trigonométricas

10. (D)

11.1 (A)

11.2 (C)

12.1 (D)

12.2 (A)

$$13. \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \pi^3$$

14.1 g é contínua em $x = 0$.

14.2 g é diferenciável em $x = 0$; $g'(0) = 1$.

14.3 O gráfico de g tem duas assíntotas horizontais de equações $x = -\frac{4}{3}$ e $x = 0$.

14.4 0,04

Funções exponenciais e funções logarítmicas

15. (B)

16. (C)

17. (D)

18. (C)

19. (A)

20. (A)

$$21. \quad \frac{\sqrt{481} + 31}{4}$$

$$22.1 \quad D_f =]1, +\infty[; D_g =]-\infty, 4[$$

$$22.2 \quad \frac{3}{2}$$

22.3 O gráfico de f tem uma assíntota vertical de equação $x = 1$ e o gráfico de g tem uma assíntota vertical de equação $x = 4$.

$$22.4 \quad \sqrt{2}$$

23.1 A função h é contínua em $x = 0$.

23.2 O gráfico de h tem duas assíntotas horizontais de equações $x = 0$ e $x = 1$.

$$24. \quad 2e^{\frac{8}{5}} - 2.$$

25. (B)

26. (C)

27.3. 0,77

27.4 0,57

28. $a = 60$ e $b \approx -0,088$.