Proposta de Teste n.º 4

Matemática A – 10.º Ano – Março de 2016

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Considere um polinómio P, de grau 3, divisível por $x+2$ e por x^2-1. Seja a o coeficiente de termo de maior grau, com $a \in \mathbb{R}$.

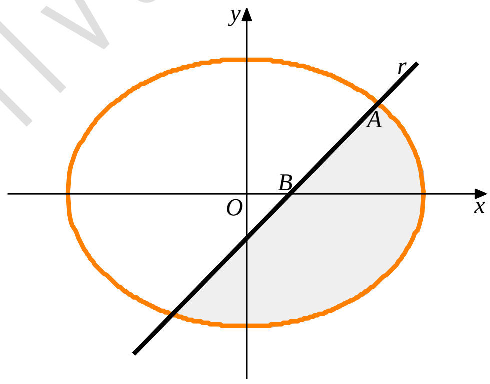
Sabendo que o resto da divisão inteira de P por $x-a$ é $4a^3-a^2-2a$, qual é o valor de a?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

2. Na figura estão representadas num referencial o.n. xOy uma elipse com focos sobre o eixo Ox e a recta r.

Sabe-se que:

- o eixo maior da elipse é 8
- a recta r intersecta a elipse no ponto A de coordenadas $\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$
- a recta r intersecta o eixo Ox no ponto B de abcissa 1



Qual das seguintes condições define a região sombreada da figura?

A $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} \leq 1 \ \wedge \ y \leq \frac{12x}{7}-\frac{12}{7}$

B $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4} \leq 1 \ \wedge \ y \leq \frac{12x}{7}-\frac{12}{7}$

C $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4} \leq 1 \ \wedge \ y \leq \frac{7x}{12}-1$

D $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} \leq 1 \ \wedge \ y \leq \frac{7x}{12}-1$

3. Considere dois vectores não nulos definidos por $\vec{u}(-2,a,b)$ e $\vec{v}(c,3,1)$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$, tais que $\|\vec{u}-\vec{v}\|=4$.

Seja P um ponto de coordenadas (a,b,c). O ponto P pertence à superfície esférica:

A centrada em $(3,1,-2)$ e raio 16

B centrada em $(3,1,-2)$ e raio 4

C centrada em $(-2,3,1)$ e raio 16

D centrada em $(-2,3,1)$ e raio 4

4. Sejam a um número real positivo e r e s duas rectas paralelas definidas por:

$$r:(x,y)=(2,1)+k\left(a,-a^2\right),\ k\in\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad x=(2-a)k \ \wedge\ y=-1+ak\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

Qual é o valor de a?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

5. Considere os pontos $A(a,a-2,a+1)$ e $B(a,-6,a+1)$, com $a\in\mathbb{R}$, tais que $d(A,B)=4$.

Qual das condições define o segmento de recta $[AB]$?

A $x=-8\ \wedge\ z=-7\ \wedge\ -6\le y\le -2$

B $x=2\ \wedge\ z=3\ \wedge\ -6\le y\le 0$

C $x=0\ \wedge\ z=1\ \wedge\ -6\le y\le -2$

D $x=0\ \wedge\ z=1\ \wedge\ -10\le y\le -6$

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

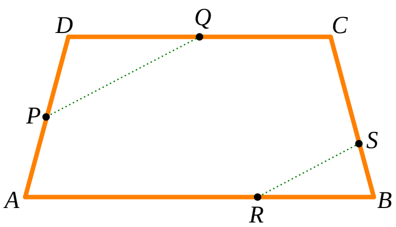
1. Considere o polinómio P definido por $P(x)=3x^3-16x^2+12x+12$

Determine o conjunto solução da inequação $P(x)>P(2)$.

2. Na figura está representado o trapézio isósceles $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- P e Q são os pontos médios dos lados $[AD]$ e $[CD]$, respectivamente
- o ponto R pertence ao lado $[AB]$ e $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{RB}\right\|$
- o ponto S pertence ao lado $[BC]$ e $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{BS}\right\|$

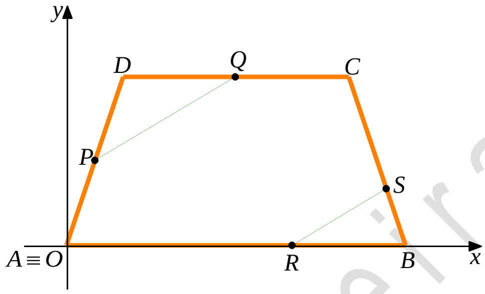


Sejam $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{b}=\overrightarrow{RS}$.

2.1. Mostre que os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares e que $\dfrac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}=\dfrac{3}{2}$.

2.2. Considere agora o trapézio $[ABCD]$ representado num referencial o.n. xOy.

Sabe-se que:



- o ponto A coincide com a origem do referencial
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- $\vec{a}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ e $\|\overrightarrow{CD}\|=4$

a) Mostre que as coordenadas dos pontos B, C e D são, respectivamente $(6,0)$, $(5,3)$ e $(1,3)$.

b) Considere o ponto T de pertencente à recta de equação $y-x+1=0$ e à circunferência de diâmetro $[BD]$.

Determine as coordenadas do ponto T, começando por escrever uma equação da circunferência de diâmetro $[BD]$. **Sugestão:** comece por escrever as coordenadas de T em função de x.

c) Escreva uma equação vectorial da mediatriz do segmento de recta $[PR]$.

d) Seja $\vec{w}(2,0)$. Determine um vector de norma $5\sqrt{2}$, colinear com $2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{w}$.

e) Defina, por meio de uma condição, a o triângulo $[PQD]$.

3. Considere num referencial o.n. xOy os pontos $A(2,-4)$, $B(7,4)$ e $C(-6,1)$.

3.1. Mostre que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo e isósceles e determine a sua área.

3.2. Seja M o ponto médio do segmento $[AB]$. Escreva a equação reduzida da recta paralela à recta BC que contém o ponto M.

3.3. Seja r a recta perpendicular à recta CB que contém o ponto A.

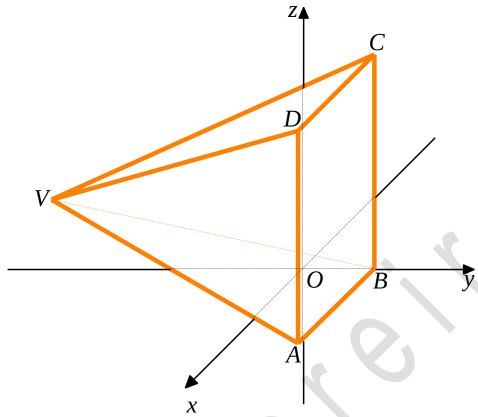
a) Escreva um sistema de equações paramétricas que defina a recta r.

b) Considere os pontos D, $E\left(-\frac{3}{2},5\right)$ e $F(-7,14)$.

Determine as coordenadas do ponto D de modo que $M-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{EB}+F$ e mostre que pertence à recta r.

4. Na figura está representada a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ de volume 120.

Sabe-se que:



- o ponto B pertence ao eixo Oy
- o ponto A pertence ao plano xOy
- a face $[ABCD]$ é paralela a xOz
- uma condição que define a recta AD é $x=6 \ \wedge \ y=2$

4.1. Mostre que as coordenadas do ponto V são $(3,-8,3)$.

4.2. Defina por uma condição em $\mathbb{R}^3$:

a) o plano paralelo a xOy que contém o ponto D.

b) a recta DC.

c) o segmento de recta que é a altura da pirâmide.

d) a base $[ABCD]$.

e) a semi-recta $\dot{A}B$

f) o plano perpendicular a Ox que contém o ponto simétrico de V em relação ao eixo Oz.

4.3. Mostre que uma equação do plano mediador do segmento de recta $[CV]$ é $3x-10y-3z=21$. Determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano mediador de $[CV]$ com a recta AD.

4.4. Identifica a secção definida na esfera de inequação $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 \leq 20$ pelo corte segundo o plano ABC. Determine a sua área.

4.5. O plano xOz intersecta as arestas $[AV]$, $[BV]$,$[CV]$ e $[DV]$ nos pontos E, F, G e H, respectivamente.

a) Defina por uma condição o quadrilátero $[EFGH]$.

b) Determine o volume do sólido $[ABCDEFGH]$.

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. C **2.** A **3.** B **4.** D **5.** C

Grupo II – Itens de resposta aberta

1. $\left]-\frac{2}{3},2\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

2.2. **b)** $T(1,0)$ ou $T(5,4)$

2.2. **c)** Por exemplo, $(x,y)=\left(0,-\frac{9}{2}\right)+k(3,7)$, $k\in\mathbb{R}$

2.2. **d)** $\left(-4\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$ ou $\left(4\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$

2.2. **e)** $y\leq 3x \wedge y\geq \frac{3}{5}x+\frac{6}{5} \wedge y\leq 3$

3.1. $A_{[ABC]}=\frac{89}{2}$

3.2. $y=\frac{3}{13}x-\frac{27}{26}$

3.3. **a)** $x=2+3k \wedge y=-4-13k$, $k\in\mathbb{R}$

3.3. **b)** $D(-4,22)$

4.2. **a)** $z=6$

4.2. **b)** $y=2 \wedge z=6$

4.2. **c)** $x=3 \wedge z=3 \wedge -8\leq y\leq 2$

4.2. **d)** $y=2 \wedge 0\leq x\leq 6 \wedge 0\leq z\leq 6$

4.2. **e)** $y=2 \wedge z=0 \wedge x\leq 6$

4.2. **f)** $x=-3$

4.3.

4.3. $\left(6,2,-\frac{23}{3}\right)$

4.4. Círculo contido no plano ABC, centrado no ponto de coordenadas $(2,2,1)$ e raio 2. $\text{Área}=4\pi$

4.5. **a)** $y=0 \wedge \frac{3}{5}\leq x\leq \frac{27}{5} \wedge \frac{3}{5}\leq z\leq \frac{27}{5}$

4.5. **b)** $V_{[ABCDEFGH]}=\frac{1464}{25}$