Proposta de Teste n.º 3

Matemática A – 10.º Ano – Janeiro de 2016

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Considere as seguintes proposições:

p: Todo o polinómio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

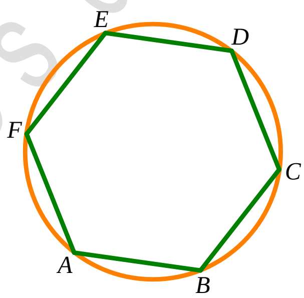
q: $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

r: Se um polinómio P tem exactamente três raízes reais de multiplicidades 1, 2 e 3, então, P é necessariamente um polinómio de grau 6.

Qual é, respectivamente, o valor lógico das proposições p, q e r?

A V, V, F **B** V, F, F **C** F, V, V **D** V, F, V

2. Na figura estão representados uma circunferência de área 16 e um hexágono regular $[ABCDEF]$, inscrito na circunferência.



Qual é a área do quadrilátero $[BCEF]$?

A $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$ **B** $\frac{12\sqrt{3}}{\pi}$ **C** $\frac{16\sqrt{3}}{\pi}$ **D** $\frac{24\sqrt{3}}{\pi}$

3. Seja P o polinómio definido por $P(x) = a^3x^{2n} - x^{n+3} + a^2x - 2a$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$.

Sabendo que o resto da divisão inteira P por $x+1$ é 1 e que n é par, qual é o valor de a?

A -1 **B** 1 **C** 2 **D** 3

4. Qual é o conjunto solução da inequação $x^3-3x^2<4x-12$?

A $]-2,2[\cup]3,+\infty[$

B $]-\infty,-4[\cup]3,4[$

C $]-4,3[\cup]4,+\infty[$

D $]-\infty,-2[\cup]2,3[$

5. Considere num referencial o.n. xOy os pontos A e B de coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ e a circunferência de equação $x^2+(y-2)^2=10$.

A mediatriz do segmento de recta $[AB]$ intersecta a circunferência em dois pontos, P e Q.

Qual é o valor de $d(P,Q)$?

A $4\sqrt{2}$ **B** $3\sqrt{2}$ **C** $2\sqrt{2}$ **D** $\sqrt{2}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Considere a expressão $E=\dfrac{\sqrt[3]{x\sqrt[4]{(xy)^2}}}{y\sqrt{xy}}\times\sqrt[3]{xy^2}$, com x e y números reais positivos.

1.1. Determine o valor de E se $y=\sqrt{x}$

1.2. Mostre que $E=\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{y}$.

1.3. Considere que $x=3$ e $y=9$. Simplifique a expressão $\dfrac{6\sqrt{E}+1}{\sqrt{3}+2}$, apresentando-a na forma de denominador racional.

Exercício Extra 1: Considere a expressão $E=\dfrac{\sqrt[3]{(x^2y)^2\sqrt{xy}}}{y\sqrt{xy}}$, com x e y números reais positivos. Mostre que se $y=8$ e x é um múltiplo de 4, então, E é um número inteiro.

2. Considere que $B(x)=bx^3+(2b+a)x^2+(2a-b)x+a$, com $a,b\in\mathbb{R}$ tais que o resto da divisão inteira de B por $x-1$ é 6 e o resto da divisão inteira de B por $x+3$ é -2.

2.1. Mostre que $a=b=1$.

2.2. Determine o conjunto solução da inequação $B(x)\geq 5x+1$.

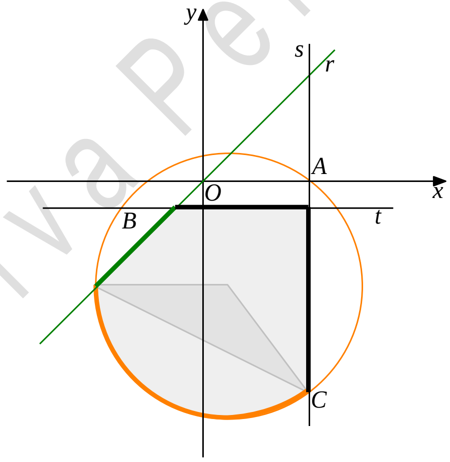
3. Considere o polinómio P tais que o quociente e o resto da divisão inteira por x^3-2x+1 é, respectivamente, $3x+1$ e $-20x^2-21x+23$.

3.1. Mostre que -2 é raiz de P e indique a sua multiplicidade.

3.2. Decomponha P num produto de polinómios irredutíveis.

3.3. Determine o conjunto solução da inequação $(x+2)(x-3)P(x)\leq 0$.

4. Na figura estão representadas num referencial o.n. xOy as rectas r, s e t e a circunferência definida pela equação $2x^2+2y^2-4x+16y-16=0$.



Sabe-se que:

- a recta r é a bissectriz dos quadrantes ímpares
- o ponto A pertence ao semi-eixo positivo Ox, à circunferência e à recta s
- o ponto B pertence à circunferência e à recta t, tem abcissa -3 e a sua ordenada é maior que a ordenada do centro da circunferência
- o ponto C pertence à circunferência e à recta s
- a recta t é paralela ao eixo Ox e a recta s é paralela ao eixo Oy

4.1. Mostre que as coordenadas do centro da circunferência são $(1,-4)$ e que o seu raio é 5.

4.2. Determine as coordenadas do ponto A e mostre que as coordenadas dos pontos B e C são, respectivamente, $(-3,-1)$ e $(4,-8)$.

4.3. Determine uma equação da mediatriz do segmento de $[BC]$, apresentando-a na forma $y=mx+b$, com $m,b\in\mathbb{R}$.

4.4. Seja P um ponto do plano cuja abcissa excede em duas unidades o dobro da ordenada.

Determine as coordenadas do ponto P de modo que $d(P,C)=9$.

4.5. Defina por meio de uma condição a região sombreada da figura, incluindo a fronteira.

Exercício Extra 2: Considere num referencial o.n. xOy os pontos $A(6,-1)$, $B(3,2)$ e $C(-1,4)$. Escreva uma equação da circunferência que contenha os pontos A, B e C.

5. Considere a elipse definida pela equação $(kx)^2 + 49y^2 = 196$, com $k \in \mathbb{R}$.

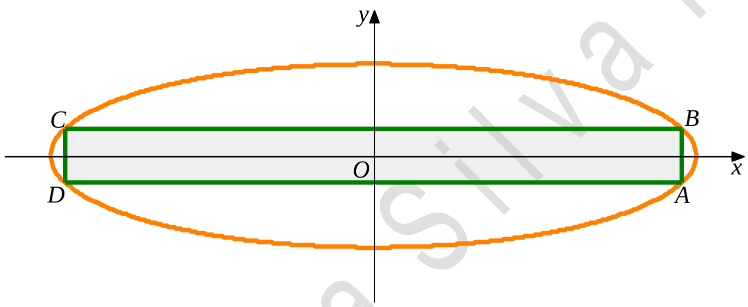
Sabe-se que o ponto de coordenadas $\left(5, \frac{4\sqrt{6}}{7}\right)$ pertence à elipse.

5.1. Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse e $P(x, y)$ um ponto do plano pertencente à elipse.

a) Mostre que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 14$ e escreva a equação da elipse na forma reduzida.

b) Determine as coordenadas dos focos e o eixo menor.

5.2. Na figura está representada em referencial o.n. xOy a elipse e o rectângulo $[ABCD]$, inscrito na elipse.



Os segmentos de recta $[AB]$ e $[CD]$ são paralelo ao eixo Oy e cada um contém um dos focos da elipse.

Qual é a área do rectângulo $[ABCD]$?

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. B **2.** C **3.** C **4.** D **5.** A

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. 1 **1.3.** $-4+3\sqrt{3}$

2.2. $[-4,0]\cup[1,+\infty[$

3.1. -2 é raiz de multiplicidade 2. **3.2.** $P(x)=3(x+2)^2\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-3)$

3.3. $\left[-2,\frac{2}{3}\right]\cup\{3\}$

4.2. $A(4,0)$ **4.3.** $y=x-5$ **4.4.** $P(4,1)$ ou $P\left(-\frac{16}{5},-\frac{13}{5}\right)$

4.5. $(x-1)^2+(y+4)^2\leq 25 \wedge y\leq x \wedge y\leq -1 \wedge x\leq 4$

E.E.2 $(x+5)^2+(y+9)^2=185$

5.1. **a)** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$ **5.1.** **b)** $F_1\left(3\sqrt{5},0\right)$ e $F_2\left(-3\sqrt{5},0\right)$; $2b=4$ **5.2.** $A_{[ABCD]}=\frac{48\sqrt{5}}{7}$