Proposta de Teste n.º 2

Matemática A – 10.º Ano – Dezembro de 2015

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Considere as proposições:

$$p\text{: } \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{54}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad q\text{: } \forall x\in\mathbb{R},\ x<1\Rightarrow x^2<1$$

Qual é, respectivamente, o valor lógico das proposições p e q?

A V, V **B** V, F **C** F, V **D** F, F

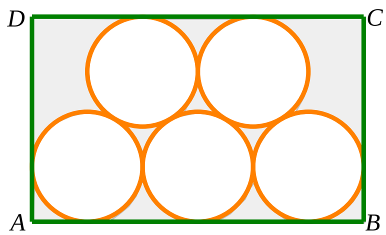
2. Sejam A, B e C os conjuntos definidos por:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2\geq 2x\right\},\qquad B=\left\{x\in\mathbb{R}: |x|>2\right\}\qquad \text{e} \qquad C=\left\{x\in\mathbb{Z}^+: x^2(x-1)-\frac{x^3}{2}=0\right\}$$

O conjunto $\left(A\cap\overline{B}\right)\setminus C$ pode ser definido por:

A $[-2,0[$ **B** $[-2,0[\cup\{2\}$ **C** $[-2,0]$ **D** $[-2,0]\cup\{2\}$

3. Na figura está representado o rectângulo $[ABCD]$ e cinco circunferências de área 4 no seu interior. Como a figura sugere, as circunferências têm o mesmo raio e algumas são tangentes entre si e tangentes aos lados do rectângulo.



Qual é o perímetro do rectângulo $[ABCD]$?

A $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}\left(4+\sqrt{3}\right)$ **B** $\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi}\left(4+\sqrt{3}\right)$ **C** $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}\left(8+\sqrt{3}\right)$ **D** $\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi}\left(8+\sqrt{3}\right)$

4. Sejam x e y dois números reais positivos distintos.

A expressão $\dfrac{\sqrt[3]{x\sqrt{y}}}{y\sqrt{x^3}} \times \left(xy^2\right)^{\frac{2}{3}}$ é equivalente a:

A $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 y}}{x}$ **B** $\dfrac{\sqrt{xy}}{x}$ **C** $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{y}$ **D** $\dfrac{\sqrt{xy}}{y}$

***Exercício Extra 1:** Sejam x e y dois números reais e n um número natural maior que 1. Determine n de modo que $\dfrac{\sqrt[n]{x\sqrt{y}}}{\sqrt{y}\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

5. Sejam A e B dois polinómios.

Sabe-se que:

- o grau do polinómio $A \times B$ é 7
- o grau do polinómio Q, quociente da divisão inteira de A por B, é 3

Qual é o grau do polinómio $\left(A \times B^3\right)^2$?

A 20 **B** 21 **C** 22 **D** 23

6. Seja P o polinómio cujo quociente e o resto da divisão inteira por $1 - 2x^2$ é $x - k$, com $k \in \mathbb{R}$.

Quais são os valores de k de modo que P seja divisível por $2x - k$?

A $k = 0 \vee k = 2$ **B** $k = -4 \vee k = 0 \vee k = 4$

C $k = -2 \vee k = 2$ **D** $k = -2 \vee k = 0 \vee k = 2$

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. Sejam p, q e r três proposições e considere a proposição $a : (p \wedge q) \vee \left((p \wedge \sim q) \wedge (p \Rightarrow \sim q \wedge p)\right)$.

1.1. Suponha que a proposição $(r \Rightarrow p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)$ é falsa.

Quais são os valores lógicos das proposições p, q, r e a?

1.2. Usando as propriedades das operações lógicas, mostre que as proposições a e p são equivalentes.

2. Considere as seguintes condições:

$a(x): x^2 - 10x + 24 = 0$ $\qquad$ $b(x):$ x é um múltiplo de 72 $\qquad$ e $\qquad$ $c(x):$ x é par

2.1. Classifique, justificando, as seguintes condições:

a) $a(x) \Rightarrow c(x)$, em $\mathbb{N}$.

b) $b(x) \Leftrightarrow c(x)$, em $\mathbb{N}$.

c) $(x^4 + 1 < 0) \wedge a(x)$, em $\mathbb{R}$.

2.2. Considere os conjuntos S, A e C definidos por:

$S = \left\{ x \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt[5]{2x} < 2 \right\}$, $\qquad$ $A = \left\{ x \in S : a(x) \right\}$ $\qquad$ e $\qquad$ $C = \left\{ x \in S : c(x) \right\}$

Defina em extensão o conjunto $C \setminus A$.

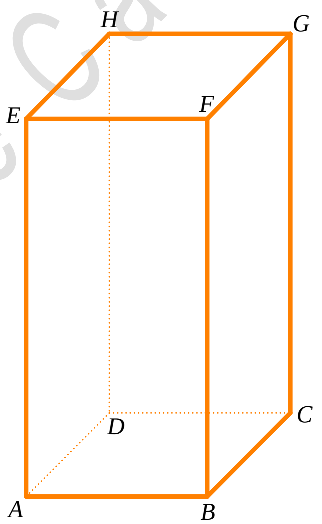
2.3. Considere a proposição $p : \forall x \in \mathbb{N}, \sim c(x) \Rightarrow \sim b(x)$.

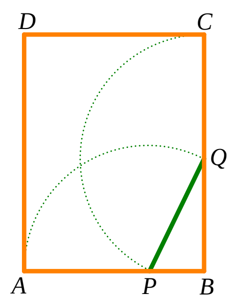
a) Sem utilizar o símbolo $\sim$, escreva a negação da proposição p.

b) Escreva em linguagem simbólica e em linguagem corrente a contra-recíproca da proposição p.

c) Utilizando a contra-recíproca, mostre que a proposição p é verdadeira.

3. Na figura está representado o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ e ao lado a face $[ABCD]$.





Sabe-se que:

- P pertence ao lado $[AB]$ tal que $\overline{BP}=1$ e Q pertence ao lado $[BC]$ tal que $\overline{BQ}=2$
- AQ é um arco de circunferência centrado em P e CP é um arco de circunferência centrado em Q
- A área da face $[BCGF]$ é igual a $15+6\sqrt{5}$

Qual a área total do prisma $[ABCDEFGH]$? Apresente o resultado na forma $a+b\sqrt{c}$, com $a,b,c\in\mathbb{R}^+$.

4. Seja $A=\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{12}}}{\sqrt[3]{4}}$

4.1. Mostre que $A=\sqrt[6]{3}$. A é solução da equação $x^{18}-x^{12}-x^6=15$?

4.2. Usando as propriedades do radicais e a definição de potência de expoente racional, mostre que $A^4+\dfrac{24}{A^2}=3^{\frac{8}{3}}$.

***Exercícios Extra 2:** Considere o número real A do exercício 4.

a) Determine o conjunto solução da equação $(Ax)^2+\sqrt[6]{6561}\,x^2=1$. Apresente as soluções com denominador racional.

b) Racionalize $\dfrac{A^2}{\sqrt[3]{6}-A^2}$.

c) Mostre que $\sqrt{7+4A^3}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$ é um número natural.

5. Considere o polinómio P, definido por $P(x)=-6x^4-11x^3+23x^2+32x-20$.

5.1. Usando a regra de Ruffini, determine o quociente e o resto da divisão inteira de P por $2x-3$.

5.2. Verifica que -2 é raiz de P e determine a sua multiplicidade.

5.3. Decomponha P num produto de polinómios irredutíveis.

5.4. Resolva a inequação $P(x)\geq 0$

***Exercício Extra 3:** Seja B um polinómio tais que o resto da divisão inteira de B por $x-1$ é 6 e o resto da divisão inteira de p por $x+3$ é -2.

a) Qual é o resto da divisão inteira de P por x^2+2x-3.

b) Considere que $B(x)=bx^3+(2b+a)x^2+(2a-b)x+a$, com $a,b\in\mathbb{R}$. Mostre que $a=b=1$.

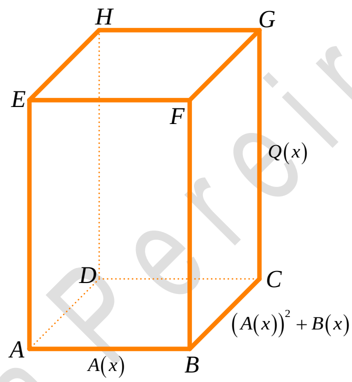
c) Utilizando a regra de Ruffini, determine o resto da divisão inteira de B por x^2-16

6. Considere os polinómios A, B e C definidos por:

$$A(x)=2x+1, \qquad B(x)=-x+2 \qquad \text{e} \qquad C(x)=x^4+4x^3-15x-18$$

Na figura está representado um paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:



- $\overline{AB}=A(x)$
- $\overline{BC}=(A(x))^2+B(x)$
- $\overline{CG}=Q(x)$, onde $Q(x)$ é o quociente da divisão inteira de C por x^2+3x+3

6.1. Seja P o polinómio que dá o volume do paralelepípedo em função de x, com $x>2$.

Determine a expressão analítica do polinómio P, apresentando-a na forma reduzida e ordenada.

6.2. Seja D um polinómio de grau 3 tais que $D(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -4$.

Determine o conjunto solução da inequação $C(x)\times D(x)<0$. **Sugestão:** o polinómio C é divisível por x^2+3x+3.

***Exercício Extra 4:** Considere o polinómio C do exercício 6. Determine o conjunto solução da inequação $C(x)\leq x^4+x-18$.

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. B **2.** C **3.** D **4.** B **E.E.1** $n=3$ **5.** C **6.** D

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. F, V, V, F

2.1. **a)** Universal **2.1.** **b)** Possível não universal **2.1.** **c)** Impossível **2.2.** $\{0,2,8,10,12,14\}$

2.3. **a)** $\exists x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar } \wedge \ x \text{ é múltiplo de } 72$

2.3. **b)** $\forall x \in \mathbb{N}, b(x) \Rightarrow c(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}, x \text{ é múltiplo de } 72 \Rightarrow x \text{ é par}$; Por exemplo: "Todo o número natural múltiplo de 72 é par."

3. $74+24\sqrt{5}$

4.1. Sim

E.E.2 **a)** $\left\{-\frac{\sqrt[6]{243}}{6}, \frac{\sqrt[6]{243}}{6}\right\}$ **b)** $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

5.1. Quociente: $-3x^3-10x^2-\frac{7x}{2}+\frac{43}{4}$; resto: $\frac{49}{4}$ **5.2.** Multiplicidade 2

5.3. $P(x)=-6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)(x+2)^2$ **5.4.** $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right]\cup\{-2\}$

E.E.3 **a)** $2x+4$ **b)** $17x+49$

6.1. $P(x)=8x^5+18x^4-29x^3-48x^2-51x-18$ **6.2.** $]-4,-3[\,\cup\,]2,+\infty[$

E.E.4 $]\infty,-2]\cup[0,2]$