Recursos para Matemática

Proposta de Teste n.º 1

Matemática A – 10.º Ano – Outubro de 2015

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Sejam p e q duas proposições.

Qual das seguintes proposições é equivalente à negação da proposição $(q \Rightarrow p) \wedge \sim p$?

A $p \wedge q$ **B** $\sim p \Rightarrow q$

C $p \Rightarrow q$ **D** $\sim p \vee \sim q$

2. Sejam p, q e r três proposições. Qual das seguintes proposições é uma tautologia?

A $\sim((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$ **B** $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

C $(p \vee q) \wedge p \Rightarrow p$ **D** $\sim((p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$

3. Considere as seguintes condições:

$$a(x): x^3 + x^2 - 6x = 0 \quad \text{e} \quad b(x): 2x - 1 \leq 3(x-1)$$

Em qual dos seguintes conjuntos é universal a condição $a(x) \Rightarrow b(x)$?

A $\mathbb{Q}^-$ **B** $\{-3, 0\}$ **C** $\mathbb{N}_0$ **D** $\mathbb{R}^+$

4. Considere as seguintes proposições:

$$p: \exists x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 + |-2| = (x-3)^2 \quad \text{e} \quad q: \forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z} \vee x \in \mathbb{Q}$$

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

A $(p \Leftrightarrow q) \vee \sim p$ **B** $(p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow \sim q$

C $p \Rightarrow p \wedge \sim q$ **D** $(p \wedge q) \vee \sim p$

5. Seja U o conjunto definido por $U=\left\{x\in\mathbb{R}:\sqrt[3]{x}\le 2\right\}$. Considere os conjuntos A e B definidos por:

$$A=\left\{x\in U:\frac{2x-1}{3}\le x-\frac{-1-x}{4}\right\} \quad \text{e} \quad B=\left\{x\in\mathbb{R}:|x|-3<0\right\}$$

O conjunto $A\setminus B$ pode ser definido por:

A $[3,8]$ **B** $[3,+\infty[$ **C** $]-3,-1[$ **D** $[-1,3[$

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. Considere as seguintes proposições:

p: A Alice concorreu a um Mestrado em Educação na Universidade de Lisboa (UL)

q: A Alice concorreu a um Mestrado em Educação na Universidade de Coimbra (UC)

r: A Alice concorreu a um Mestrado em Educação na Universidade do Porto (UP)

1.1. Traduza em linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) A Alice concorreu aos Mestrados em Educação na UL e na UC se e somente se também concorreu ao Mestrado em Educação na UP.

b) A Alice concorreu ao Mestrado em Educação na UL se também concorreu ao Mestrado em Educação na UC, a não ser que tenha concorrido ao Mestrado em Educação na UP.

1.2. Considere a proposição $\sim r\wedge(p\vee q)$.

a) Traduza-a em linguagem corrente.

b) Traduza em linguagem corrente a sua negação.

1.3. Sabendo que a proposição $p\Leftrightarrow q$ é falsa e a proposição $(p\Rightarrow q)\wedge(\sim r\vee p)$ é verdadeira, quais foram os mestrado(s) a que a Alice concorreu?

2. Sejam p, q e r três proposições. Mostre que são tautologias as proposições:

2.1. $(p\wedge q\Rightarrow p\wedge r)\Rightarrow(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$, usando uma tabela de verdade.

2.2. $\sim(\sim(p\Rightarrow q)\vee q)\Rightarrow\sim q$, usando as propriedades das operações lógicas.

3. Sejam p, q e r três proposições. Considere as proposições a e b tais que:

$$a:(\sim p \Rightarrow q)\wedge(p\vee q\Rightarrow q) \quad \text{e} \quad b:\sim\big((p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\big)\wedge(\sim p\vee r)$$

3.1. Mostre, usando as propriedades das operações lógicas, que:

a) a proposição a é equivalente à proposição q.

b) a proposição b é equivalente à proposição $\sim(p\vee\sim q\vee r)$.

3.2. Admita que a proposição $\big((p\Rightarrow\sim r)\vee(\sim q\wedge r)\big)\wedge(r\Rightarrow r)$ é falsa.

Quais são os valores lógicos das proposições a e b?

4. Seja n um número natural.

Mostre que:

4.1. n^3+3n^2+1 é um número ímpar.

4.2. $A\subset B$, onde:

$$A=\{n\in\mathbb{N}: n \text{ não é divisível por } 18\} \quad \text{e} \quad B=\{n\in\mathbb{N}: n \text{ não é divisível por } 216\}$$

Sugestão: utilize a contra-recíproca para mostra que $n\in A\Rightarrow n\in B$.

5. Considere as condições $a(x)$ e $b(x)$ definidas por:

$$a(x): x^2<-6x \quad \text{e} \quad b(x): x>1\Rightarrow x(x-2)<(x-2)^2$$

5.1. Sem usar o símbolo $\sim$, escreva em linguagem simbólica a negação da proposição $\exists\, x\in\mathbb{R}: b(x)$.

5.2. Mostre que conjunto solução da condição $b(x)$ é $]-\infty,2[$ e indique o maior intervalo de números reais onde a condição $b(x)$ é impossível.

5.3. Mostre, utilizando a contra-recíproca, que a proposição $\forall\, x\in\mathbb{R},\, a(x)\Rightarrow b(x)$ é verdadeira.

5.4. Classifique a condição $\sim a(x)\Leftrightarrow b(x)$ em $\mathbb{Z}^-$.

6. Sejam U o conjunto de todos os número inteiros não negativos inferiores a 13 e A, B e C três subconjuntos de U.

Sabe-se que:

- $A=\{x\in U: x \text{ é divisor de } 12\}$
- $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\{7,8,9\}$
- $C\setminus A=\varnothing$ e $B\cap C=\varnothing$
- $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,10,11,12\}$ e $A\cap B=\{x\in U:(x-4)(x-12)=0\}$

6.1. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

a) $\forall x,\ x\in C\Rightarrow x\in A$

b) $\exists x\in A\cap B: x\in C$

6.2. Classifique a condição $a(n):(n-8)^3=n-8$ em $U\setminus(A\cup B\cup C)$.

6.3. Em qual das seguintes opções pode estar representado em extensão, o conjunto $A\setminus C$?

A $\{4,5,6,12\}$ **B** $\{1,2,4,6,12\}$

C $\{2,4,6\}$ **D** $\{0,1,2,3,4,6,12\}$

Numa pequena composição indique a opção correcta e explique as razões que o levam a rejeitar as restantes opções. Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

6.4. Considere que $A\setminus C=\{2,4,6,12\}$. Determine, em extensão, o conjunto $(\bar{A}\cap B)\cup C$.

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. B **2.** C **3.** D **4.** C **5.** A

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. **a)** $p \wedge q \Leftrightarrow r$ **1.1.** **b)** $\sim r \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

1.2. **a)** A Alice não concorreu ao Mestrado em Educação na UP mas concorreu ao Mestrado em Educação na UL ou ao Mestrado em Educação na UC.

1.2. **b)** Se a Alice não concorreu ao Mestrado em Educação na UP, então, não concorreu ao Mestrado em Educação na UL nem ao Mestrado em Educação na UC.

1.3. A Alice só concorreu ao Mestrado em Educação na Universidade de Coimbra.

2.1.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$\underbrace{(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)}_{a}$	$q \Rightarrow r$	$\underbrace{p \Rightarrow (q \Rightarrow r)}_{b}$	$a \Rightarrow b$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V	V

Portanto, a proposição $((p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ é uma tautologia, pois é sempre verdadeira para quaisquer que sejam a proposições, p, q e r.

3.2. A proposição a é verdadeira e a proposição b é falsa

5.1. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \ \wedge \ x(x-2) \geq (x-2)^2$

5.2. O maior intervalo de números reais onde a proposição $b(x)$ é impossível é $[2, +\infty[$.

5.4. Possível não universal

6.1. **a)** Verdadeira **6.1.** **b)** Falsa **6.2.** Universal **6.3.** B

6.4. $\{0, 1, 3, 5, 10, 11\}$