PROPOSTA DE TESTE N.º 1

MATEMÁTICA A – 10.º ANO – OUTUBRO DE 2015

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

José Carlos da Silva Pereira

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Tem-se:

$$\sim\left((q\Rightarrow p)\wedge\sim p\right)\Leftrightarrow\sim\left((\sim q\vee p)\wedge\sim p\right)\Leftrightarrow\sim\left((\sim q\wedge\sim p)\vee(p\wedge\sim p)\right)\Leftrightarrow\sim\left((\sim q\wedge\sim p)\vee F\right)\Leftrightarrow\sim(\sim q\wedge\sim p)\Leftrightarrow q\vee p\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sim(\sim p)\vee q\Leftrightarrow(\sim p\Rightarrow q)$$

Resposta: B

2. Tem-se:

A $\sim\left((p\vee q)\wedge r\right)\Leftrightarrow\sim(p\vee q)\vee\sim r\Leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)\vee\sim r$.

Logo, a proposição $\sim\left((p\vee q)\wedge r\right)$ não é equivalente à proposição $\sim p\vee\sim q\vee\sim r$ pelo que a proposição da opção **A** não é uma tautologia.

B Usando uma tabela de verdade:

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$	$p\Rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

Logo, como as colunas correspondentes às proposições $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$ e $p\Rightarrow r$ não são iguais, as proposições $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$ e $p\Rightarrow r$ não são equivalentes. Portanto a proposição da opção **B** não é uma tautologia.

C Tem-se, $\left((p\vee q)\wedge p\Rightarrow p\right)\Leftrightarrow\sim\left((p\vee q)\wedge p\right)\vee p\Leftrightarrow\left(\sim(p\vee q)\vee\sim p\right)\vee p\Leftrightarrow\sim(p\vee q)\vee(\sim p\vee p)\Leftrightarrow\sim(p\vee q)\vee V\Leftrightarrow V$

Logo, a proposição da opção **C** é uma tautologia.

D Tem-se: $\sim\left((p\Rightarrow q)\wedge(\sim p\Rightarrow q)\right)\Leftrightarrow\sim\left((\sim p\vee q)\wedge(p\vee q)\right)\Leftrightarrow\sim\left(q\vee(\sim p\wedge p)\right)\Leftrightarrow\sim(q\vee F)\Leftrightarrow\sim q$.

Logo, a proposição $\sim\left((p\Rightarrow q)\wedge(\sim p\Rightarrow q)\right)$ não é equivalente à proposição q, pelo que a proposição da opção **D** não é uma tautologia.

Resposta: C

3. Tem-se que:

- $x^3+x^2-6x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+x-6\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-6)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-3 \ \vee \ x=2$

- $2x-1\leq 3(x-1) \Leftrightarrow 2x-1\leq 3x-3 \Leftrightarrow 2x-3x\leq -3+1 \Leftrightarrow -x\leq -2 \Leftrightarrow x\geq 2$

Portanto, as proposição $a(-3)$, $a(0)$ e $a(2)$ são verdadeiras e a proposição $a(k)$ é falsa para todo o $k\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,2\}$; a proposição $b(k)$ é verdadeira para todo o $k\in[2,+\infty[$ e é falsa para todo o $k\in]-\infty,2[$.

Assim:

A A condição $a(x)\Rightarrow b(x)$ não é universal em $\mathbb{Q}^-$, pois $-3\in\mathbb{Q}^-$ e para $x=-3$ a proposição $\underset{V}{a(-3)}\Rightarrow \underset{F}{b(-3)}$ é falsa.

B A condição $a(x)\Rightarrow b(x)$ não é universal $\{-3,0\}$, pois $-3\in\{-3,0\}$ e para $x=-3$ a proposição $\underset{V}{a(-3)}\Rightarrow \underset{F}{b(-3)}$ é falsa.

Além disso, para $x=0$ a proposição $\underset{V}{a(0)}\Rightarrow \underset{F}{b(0)}$ é falsa. Logo, $\exists x\in\mathbb{R}^+ : a(x)\Rightarrow b(x)$ é falsa e portanto a condição $a(x)\Rightarrow b(x)$ é impossível em $\{-3,0\}$.

C A condição $a(x)\Rightarrow b(x)$ não é universal $\mathbb{N}_0$, pois $0\in\mathbb{N}_0$ e para $x=0$ a proposição $\underset{V}{a(0)}\Rightarrow \underset{F}{b(0)}$ é falsa.

D A condição $a(x)\Rightarrow b(x)$ é universal $\mathbb{R}^+$, pois:

- se $x=k$, com $k\in]0,2[$, a proposição $\underset{F}{a(k)}\Rightarrow \underset{F}{b(k)}$ é verdadeira.

- se $x=2$, a proposição $\underset{V}{a(2)}\Rightarrow \underset{V}{b(2)}$ é verdadeira.

- se $x=k$, com $k\in]2,+\infty[$, a proposição $\underset{F}{a(k)}\Rightarrow \underset{V}{b(2)}$ é verdadeira.

Logo, a proposição $\forall x\in\mathbb{R}^+, a(x)\Rightarrow b(x)$ é verdadeira e portanto a condição $a(x)\Rightarrow b(x)$ é universal em $\mathbb{R}^+$.

Outra maneira: tem-se que $\left(a(x)\Rightarrow b(x)\right)\Leftrightarrow \sim a(x)\vee b(x)$. O conjunto solução da condição $\sim a(x)$ é $\mathbb{R}\setminus\{-3,0,2\}$ e o conjunto solução da condição $b(x)$ é $[2,+\infty[$. Logo, o conjunto solução da condição $\sim a(x)\vee b(x)$ é $\mathbb{R}\setminus\{-3,0,2\}\cup[2,+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$. Como $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$, a condição $\sim a(x)\vee b(x)\Leftrightarrow\left(a(x)\Rightarrow b(x)\right)$ é universal em $\mathbb{R}^+$.

Resposta: D

4. Tem-se:

- $x^2+|-2|=(x-3)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+2=\cancel{x^2}-6x+9 \Leftrightarrow 6x=7 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{6}$. Como $\dfrac{7}{6}\in\mathbb{Q}^+$, a proposição p é verdadeira.

- $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, mas $\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$ e $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. Logo, a proposição q é falsa.

José Carlos da Silva Pereira

Portanto, a proposição verdadeira é a da opção **C**: se q é falsa, então, $\sim q$ é verdadeira; como p é verdadeira, vem que $p \wedge \sim q$ é verdadeira e consequentemente, $p \Rightarrow p \wedge \sim q$ é verdadeira, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se a proposição antecedente for verdadeira e a proposição consequente for falsa.

Resposta: C

5. Tem-se que $\sqrt[3]{x} \leq 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \leq 2^3 \Leftrightarrow x \leq 8$. Logo, $U = \left]-\infty, 8\right]$. Então:

- $\frac{2x-1}{3} \leq x - \frac{-1-x}{4} \Leftrightarrow 8x - 4 \leq 12x + 3 + 3x \Leftrightarrow 8x - 12x - 3x \leq 7 \Leftrightarrow -7x \leq 7 \Leftrightarrow x \geq -1$. Assim, os elementos de A são todos os números de U (se $x \in U$, então, $x \leq 8$) tais que $x \geq -1$, vem que $A = \left[-1, 8\right]$.

- $|x| - 3 < 0 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Logo, $B = \left]-3, 3\right[$.

$A \setminus B$ é o conjunto de todos os elementos de A que não são de B, isto é, ao conjunto A, retiram-se todos os elementos comuns de B. Portanto, ao intervalo $\left[-1, 8\right]$, retira-se a parte que é comum a B, o intervalo $\left[-1, 3\right[$. Portanto, $A \setminus B = \left[-1, 8\right] \setminus \left]-3, 3\right[= \left[3, 8\right]$.

Resposta: A

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1.

a) A expressão "se e somente se" indica que estamos na presença de uma equivalência entre as proposições "A Alice concorreu aos Mestrados em Educação na UL e na UC", que pode ser traduzida simbolicamente por $p \wedge q$ e a proposição "A Alice concorreu a um Mestrado em Educação na UP". Logo, a proposição pode ser traduzida simbolicamente por $p \wedge q \Rightarrow r$.

b) Esta proposição é do tipo "X a não ser que Y", onde X: "A Alice concorreu ao Mestrado em Educação na UL se também concorreu ao Mestrado em Educação na UC" e Y: "A Alice tenha concorrido ao Mestrado em Educação na UP" que é o mesmo que "**se** $\sim Y$ **então** X". A proposição X pode ser reescrita da seguinte forma:

X: "**Se** a Alice concorreu ao Mestrado em Educação na UC, **então**, também concorreu ao Mestrado em Educação na UL"

Assim, tem-se que $\sim Y \Leftrightarrow \sim r$ e $X \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$. Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica: $\sim r \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

Outra resolução: A proposição pode ser interpretada da seguinte forma:

"**Se** a Alice não concorreu ao Mestrado em Educação na UP **e** concorreu ao Mestrado em Educação na UC, **então**, concorreu ao Mestrado em Educação na UL"

Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica: $(\sim r \wedge q) \Rightarrow p$.

As duas formas são equivalentes: $(\sim r \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow r \vee (\sim q \vee p) \Leftrightarrow (r \vee \sim q) \vee p \Leftrightarrow (\sim (r \vee \sim q) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim r \wedge q) \Rightarrow p$

1.2.

a) A Alice não concorreu ao Mestrado em Educação na UP mas concorreu ao Mestrado em Educação na UL ou ao Mestrado em Educação na UC.

José Carlos da Silva Pereira

b) Tem-se que, $\sim\left(\sim r\wedge\left(p\vee q\right)\right)\Leftrightarrow\sim\left(\sim r\right)\vee\sim\left(p\vee q\right)\Leftrightarrow r\vee\left(\sim p\wedge\sim q\right)\Leftrightarrow\sim r\Rightarrow\left(\sim p\wedge\sim q\right)$.

Logo, em linguagem corrente a negação da proposição $\sim r\wedge\left(p\vee q\right)$ pode ser traduzida por:

Se a Alice não concorreu ao Mestrado em Educação na UP, então, não concorreu ao Mestrado em Educação na UL nem ao Mestrado em Educação na UC.

1.3. Tem-se que a proposição $p\Leftrightarrow q$ é falsa, pelo que as proposições p e q têm valores lógicos distintos. A proposição $\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\left(\sim r\vee p\right)$ é verdadeira, pelo que as proposições $p\Rightarrow q$ e $\sim r\vee p$ são verdadeiras, pois a conjunção entre duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Assim:

- se a proposição $p\Rightarrow q$ é verdadeira e p e q têm valores lógicos distintos, então, a proposição p é falsa e a proposição q é verdadeira.

- como a proposição $\sim r\vee p$ é verdadeira e a proposição p é falsa, a proposição $\sim r$ é verdadeira, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas. Logo, a proposição r é falsa.

$\therefore$ A Alice só concorreu ao Mestrado em Educação na Universidade de Coimbra.

2.

2.1. Fazendo uma tabela de verdade:

p	q	r	$p\wedge q$	$q\wedge r$	$\underbrace{\left(p\wedge q\right)\Rightarrow\left(p\wedge r\right)}_{a}$	$q\Rightarrow r$	$\underbrace{p\Rightarrow\left(q\Rightarrow r\right)}_{b}$	$a\Rightarrow b$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V	V

Portanto, a proposição $\left(\left(p\wedge q\right)\Rightarrow\left(p\wedge r\right)\right)\Rightarrow\left(p\Rightarrow\left(q\Rightarrow r\right)\right)$ é uma tautologia, pois é sempre verdadeira para quaisquer que sejam a proposições, p, q e r.

2.2. Tem-se:

$$\left(\sim\left(\sim\left(p\Rightarrow q\right)\vee q\right)\Rightarrow\sim q\right)\Leftrightarrow\left(\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\sim q\Rightarrow\sim q\right)\Leftrightarrow\left(\left(\sim p\vee q\right)\wedge\sim q\Rightarrow\sim q\right)\Leftrightarrow\left(\left(\sim p\wedge\sim q\right)\vee\left(q\wedge\sim q\right)\Rightarrow\sim q\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\sim p\wedge\sim q\right)\vee F\Rightarrow\sim q\right)\Leftrightarrow\left(\sim\left(p\vee q\right)\Rightarrow\sim q\right)\Leftrightarrow\sim\left(\sim\left(p\vee q\right)\right)\vee\sim q\Leftrightarrow\left(p\vee q\right)\vee\sim q$$

$$\Leftrightarrow p\vee\left(q\vee\sim q\right)\Leftrightarrow p\vee V\Leftrightarrow V$$

Logo, a proposição $\sim\left(\sim\left(p\Rightarrow q\right)\vee q\right)\Rightarrow\sim q$ é uma tautologia.

José Carlos da Silva Pereira

3.

3.1.

a) Tem-se:

$$(\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee q \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim (p \vee q) \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge ((\sim p \vee q) \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge ((\sim p \vee q) \wedge V)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow q \vee (p \wedge \sim p) \Leftrightarrow q \vee F \Leftrightarrow q$$

b) Tem-se:

$$\sim ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \wedge (\sim p \vee r) \Leftrightarrow \sim ((\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)) \wedge (\sim p \vee r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim (r \vee (\sim p \wedge \sim q)) \wedge (\sim p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\sim r \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q)) \wedge (\sim p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \sim r \wedge (p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim r \wedge (\sim p \vee r))$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge ((\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge r))$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge ((\sim r \wedge \sim p) \vee F)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim r \wedge \sim p)$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \sim p) \wedge \sim r$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)) \wedge \sim r$$

$$\Leftrightarrow (F \vee (q \wedge \sim p)) \wedge \sim r$$

$$\Leftrightarrow q \wedge \sim p \wedge \sim r$$

$$\Leftrightarrow \sim (p \vee \sim q \vee r)$$

3.2. Tem-se que, $((p \Rightarrow \sim r) \vee (\sim q \wedge r)) \wedge (r \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow \sim r) \vee (\sim q \wedge r)) \wedge V \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim r) \vee (\sim q \wedge r)$. A proposição dada é falsa, pelo que as proposições $p \Rightarrow \sim r$ e $\sim q \wedge r$ são falsa, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas. Assim:

▪ se a proposição $p \Rightarrow \sim r$ é falsa, então, a proposição p é verdadeira e a proposição $\sim r$ é falsa, pelo que a proposição r é verdadeira.

▪ como a proposição $\sim q \wedge r$ é falsa e a proposição r é verdadeira, a proposição $\sim q$ é falsa, pois a conjunção entre duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeira. Logo, a proposição q é verdadeira.

José Carlos da Silva Pereira

Portanto, como a proposição a é equivalente à proposição q, a proposição a é verdadeira. Como a proposição b é equivalente à proposição $\sim\left(p \vee \sim q \vee r\right)$, a proposição b é falsa, pois, como as proposições p e r são verdadeiras, a proposição $p \vee \sim q \vee r$ é verdadeira pelo que a proposição a $\sim\left(p \vee \sim q \vee r\right)$ é falsa.

4.

4.1. Seja n um número natural. Tem-se que $n^3+3n^2+1=n^2\left(n+3\right)+1$. Assim:

▪ se n é par, então, n^2 é par e $n+3$ é ímpar, pelo que $n^2\left(n+3\right)$ é par, pois o produto de um número par por um número ímpar é um número par. Portanto, $n^3+3n^2+1=n^2\left(n+3\right)+1$ é ímpar.

▪ se n é ímpar, então, n^2 é ímpar e $n+3$ é par, pelo que $n^2\left(n+3\right)$ é par. Portanto, $n^3+3n^2+1=n^2\left(n+3\right)+1$ é ímpar.

Logo, para todo o n natural, n^3+3n^2+1 é ímpar.

4.2. $A \subset B$ se a proposição $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow n \in B$ é verdadeira. Vamos usar a contra-recíproca para provar que é verdadeira.

Tem-se que, $\left(\forall\, n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow n \in B\right) \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, n \notin B \Rightarrow n \notin A$

Seja n um número natural tal que $n \notin B$. Se $n \notin B$, então, n é um múltiplo de 216. Então, n pode ser escrito na forma $n=216k$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, $n=216k=\left(18\times 12\right)k=18\times\left(12k\right)$.

Tem-se que $12k$ é um número natural, pois k é um número natural. Portanto, $18\times\left(12k\right)$ é um múltiplo de 18 e consequentemente, n é um múltiplo de 18.

Logo, por contra-recíproca, está provado a proposição $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow n \in B$ é verdadeira e portanto, $A \subset B$.

5.

5.1. Tem-se que, $b\left(x\right):\left(x>1 \Rightarrow x\left(x-2\right)<\left(x-2\right)^2\right) \Leftrightarrow \sim\left(x>1\right)\ \vee\ x\left(x-2\right)<\left(x-2\right)^2$. Assim:

$$\sim\left(\exists\, x \in \mathbb{R}: b\left(x\right)\right) \Leftrightarrow \sim\left(\exists\, x \in \mathbb{R}: \sim\left(x>1\right)\ \vee\ x\left(x-2\right)<\left(x-2\right)^2\right) \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, \sim\left(\sim\left(x>1\right)\ \vee\ x\left(x-2\right)<\left(x-2\right)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, x>1\ \wedge\ \sim\left(x\left(x-2\right)<\left(x-2\right)^2\right) \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, x>1\ \wedge\ x\left(x-2\right) \geq \left(x-2\right)^2$$

5.2. Tem-se que: $b\left(x\right): \sim\left(x>1\right)\ \vee\ x\left(x-2\right)<\left(x-2\right)^2$. Assim:

$$\sim\left(x>1\right)\ \vee\ x\left(x-2\right)<\left(x-2\right)^2 \Leftrightarrow x \leq 1\ \vee\ \cancel{x^2}-2x<\cancel{x^2}-4x+4 \Leftrightarrow x \leq 1\ \vee\ 2x<4 \Leftrightarrow x \leq 1\ \vee\ x<2 \Leftrightarrow x<2$$

Logo, o conjunto-solução da condição $b\left(x\right)$ é $\left]-\infty,2\right[$. Portanto, $\left]-\infty,2\right[$ é o maior intervalo de números reais onde a condição $b\left(x\right)$ é universal. Consequentemente, $\left[2,+\infty\right[$ é o maior intervalo de números reais onde a condição $b\left(x\right)$ é impossível.

5.3. A contra-recíproca da proposição $\forall\, x \in \mathbb{R}, a\left(x\right) \Rightarrow b\left(x\right)$ é:

$$\left(\forall\, x \in \mathbb{R}, \sim b\left(x\right) \Rightarrow \sim a\left(x\right)\right) \Leftrightarrow \left(\forall\, x \in \mathbb{R}, \sim\left(x<2\right) \Rightarrow \sim\left(x^2<-6x\right)\right) \Leftrightarrow \left(\forall\, x \in \mathbb{R}, x \geq 2 \Rightarrow x^2+6x \geq 0\right)$$

José Carlos da Silva Pereira

Seja x um número real tal que $x \geq 2$. Logo, $x^2 \geq 2^2$ e $6x \geq 2 \times 6$, pelo que $x^2 + 6x \geq 2^2 + 6 \times 2 \Leftrightarrow x^2 + 6x \geq 16$.

Como $16 > 0$, vem que $x^2 + 6x \geq 0$.

Portanto, está provado que a proposição $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \geq 2 \Rightarrow x^2 + 6x \geq 0$ é verdadeira e consequentemente a sua contra-recíproca, a proposição $\forall\, x \in \mathbb{R}, a(x) \Rightarrow b(x)$ também é verdadeira.

5.4. Tem-se que $\sim a(x): x^2 + 6x \geq 0$ e $b(x): x < 2$.

Comecemos por notar que a proposição $b(x)$ é universal e $\mathbb{Z}^-$, pois $\mathbb{Z}^- \subset]-\infty, 2[$, isto é, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^-$, a proposição $b(k)$ é verdadeira. Por outro lado, se $x = -1$, a proposição $\sim a(-1)$, fica $(-1)^2 + 6 \times (-1) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \geq 0$, que é uma proposição falsa e se $x = -7$, a proposição $\sim a(-7)$, fica $(-7)^2 + 6 \times (-7) \geq 0 \Leftrightarrow 49 - 42 \geq 0 \Leftrightarrow 7 \geq 0$, que é uma proposição verdadeira. Assim:

- se $x = -1$, a proposição $\underbrace{\sim a(-1)}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{b(-1)}_{V}$ é falsa.

- se $x = -7$, a proposição $\underbrace{\sim a(-7)}_{V} \Leftrightarrow \underbrace{b(-7)}_{V}$ é verdadeira.

Logo, a condição $\sim a(x) \Leftrightarrow b(x)$ é possível não universal em $\mathbb{Z}^-$.

6.

6.1.

a) $C \setminus A$ é o conjunto de todos os elementos de C que não são de A, isto é, ao conjunto C, retiram-se todos os elementos comuns de A. Mas, por hipótese sabe-se que $C \setminus A = \varnothing$. Portanto, quer isto dizer que todos os elementos de C são também elementos de A. Assim, conclui-se que $C \subseteq A$., isto é, se $x \in C$, então, $x \in A$. Logo, a proposição $\forall\, x, x \in C \Rightarrow x \in A$ é verdadeira.

b) Seja $x \in A \cap B$. Então, $x \in A$ e $x \in B$. Logo, $x \notin C$ pois, $B \cap C = \varnothing$, isto é, os conjuntos B e C não têm elementos em comum. Portanto, a proposição é $\exists\, x \in A \cap B : x \in C$ falsa.

6.2. Tem-se que $U \setminus (A \cup B \cup C) = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \{7,8,9\}$. Assim:

- se $n = 7$, então, $a(7): (7-8)^3 = 7 - 8 \Leftrightarrow (-1)^3 = -1 \Leftrightarrow -1 = -1$. Logo, $a(7)$ é uma proposição verdadeira.

- se $n = 8$, então, $a(8): (8-8)^3 = 8 - 8 \Leftrightarrow 0^3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Logo, $a(8)$ é uma proposição verdadeira.

- se $n = 9$, então, $a(9): (9-8)^3 = 9 - 8 \Leftrightarrow 1^3 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$. Logo, $a(9)$ é uma proposição verdadeira.

Logo, a proposição $\forall x \in \{7,8,9\}, a(n)$ é verdadeira e portanto a condição $a(n)$ é universal em $U \setminus (A \cup B \cup C) = \{7,8,9\}$.

Outra resolução: $a(n): (n-8)^3 = n - 8 \Leftrightarrow (n-8)^3 - (n-8) = 0 \Leftrightarrow (n-8)\left((n-8)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow n - 8 = 0 \vee (n-8)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = 8 \vee (n-8)^2 = 1 \Leftrightarrow n = 8 \vee n - 8 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow n = 8 \vee n - 8 = -1 \vee n - 8 = 1$$

$$\Leftrightarrow n = 8 \vee n = 7 \vee n = 9$$

José Carlos da Silva Pereira

Portanto, o conjunto solução da condição $a(n)$ é $\{7,8,9\}$, pelo que é universal em $U \setminus (A \cup B \cup C) = \{7,8,9\}$.

6.3. Tem-se que:

- $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ e $A = \{x \in U : x \text{ é divisor de } 12\}$. Portanto, $A = \{1,2,3,4,6,12\}$.

- $(x-4)(x-12) = 0 \Leftrightarrow x-4=0 \ \vee \ x-12=0 \Leftrightarrow x=4 \ \vee \ x=12$. Logo, $A \cap B = \{x \in U : (x-4)(x-12)=0\} = \{4,12\}$, pelo que 4 e 12 pertencem a A e a B.

Assim, como $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,10,11,12\}$, 0, 5, 10 e 11 são os restantes elementos do conjunto B. Portanto, $B = \{0,4,5,10,11,12\}$.

O conjunto $\{4,5,6,12\}$ não pode representar o conjunto $A \setminus C$, pois como 5 não é um elemento de A, também não pode ser um elemento de $A \setminus C$, pois todos os elementos de $A \setminus C$ são necessariamente elementos de A. Logo, a opção **A** não é a correcta. O conjunto $\{2,4,6\}$ também não pode representar o conjunto $A \setminus C$, visto que 12 pertence a A e, não pertencendo a $\{2,4,6\}$, teria de ser um dos elementos retirados, isto é, teria de pertencer a C. Mas *12* não pode pertencer a C, pois 12 pertence a B e $B \cap C = \varnothing$. Logo, a opção **C** não é a correcta. O número de elementos de $A \setminus C$ não pode ser superior ao número de elementos de A. Logo, o conjunto $\{0,1,2,3,4,6,12\}$ não pode representar o conjunto $A \setminus C$, pelo que a opção **D** não é a correcta.

A opção correcta é a **B**.

6.4. Como $A \setminus C = \{2,4,6,12\}$, tem-se que $C = \{1,3\}$. Assim, $\bar{A} \cap B = \{0,5,7,8,9,10,11\} \cap \{0,4,5,10,11,12\} = \{0,5,10,11\}$.

$\therefore \ (\bar{A} \cap B) \cup C = \{0,5,10,11\} \cup \{1,3\} = \{0,1,3,5,10,11\}$

José Carlos da Silva Pereira