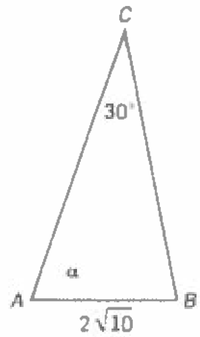
1. Na figura ao lado está representado o triângulo $[ABC]$.

   Designou-se por α a amplitude do ângulo BAC.

   Sabe-se que:

   - $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$
   - $A\hat{C}B = 30°$
   - $\operatorname{tg} \alpha = 3$

   Qual é o comprimento do segmento de reta $[BC]$?

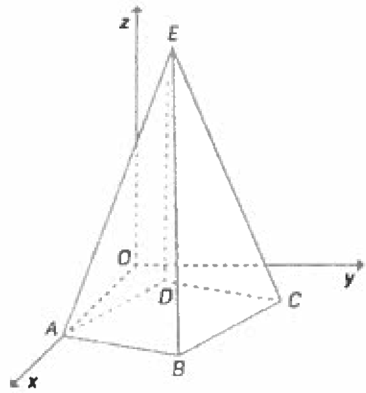


   (A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13

2. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$, cuja base está contida no plano xOy.

   Sabe-se que:

   - o vértice A pertence ao eixo Ox;
   - uma equação do plano ADE é $6x + 18y - 5z = 24$;
   - o ponto E pertence à reta r, de equação vetorial $(x, y, z) = (5, -4, 2) + k(-1, 3, 2), k \in \mathbb{R}$.



   2.1 Sejam F e G os pontos da reta r cujas cotas são, respetivamente, -2 e 4. Determina a amplitude, em graus, do ângulo FOG. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

   2.2 Determina o volume da pirâmide.

   2.3 Considera o prisma quadrangular regular em que uma das bases coincide com a base da pirâmide e a outra base tem por centro o ponto E. Seja α o plano que passa no ponto E e é paralelo à face lateral do prisma que contém o segmento de reta $[AB]$.

   Ao acaso, escolhe-se um vértice em cada base do prisma. Qual é a probabilidade de a reta definida pelos dois pontos escolhidos ser paralela ao plano α? Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

3. Uma turma de uma escola secundária tem 30 alunos. A Rita é a delegada e o Pedro é o subdelegado dessa turma.

   O professor de Matemática vai escolher um grupo de seis alunos para realizar um trabalho, mas pretende que a Rita e o Pedro não façam simultaneamente parte do grupo escolhido.

   Nestas condições, quantas comissões diferentes podem ser formadas?

   (A) 526 600 **(B)** 534 400 **(C)** 547 700 **(D)** 573 300

4. No baile de finalistas de uma escola estão presentes várias pessoas do sexo masculino (alunos e professores).

Sabe-se que:

- $\frac{4}{5}$ dessas pessoas são alunos (os restantes são professores);
- $\frac{2}{3}$ dessas pessoas vão de gravata (os restantes vão de laço).

Sabe-se também que $\frac{3}{4}$ dos alunos vão de gravata.

Entre todos os participantes do sexo masculino, escolhe-se um, ao acaso, para receber uma caneta oferecida pela organização.

Qual é a probabilidade de ser escolhido um professor que vai de laço?

Na tua resposta:

- designa por A o acontecimento «ser aluno» e por G o acontecimento «ir de gravata»;
- apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

5. Um paraquedista salta de um avião. Ao fim de algum tempo, o paraquedas abre. Admite que a distância, em metros, a que o paraquedista se encontra do solo, t segundos após a abertura do paraquedas, é dada por:

$$d(t) = 930 - 6t + 24e^{-1,7t}$$

No instante da abertura do paraquedas, o paraquedista está a uma certa distância do solo. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, quanto tempo demora o paraquedista a percorrer um terço dessa distância (desde o instante em que se dá a abertura do paraquedas).

Na tua resposta:

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às unidades.

6. Seja z um número complexo cujo afixo pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{3}$. Seja $w = |z|^2 + z - \overline{z}$.

Sabe-se que $\text{Re}(w) \times \text{Im}(w) = 9$.

Qual é a parte imaginária do número complexo z?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$

7. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que a razão é $-\frac{2}{3}$ e que, para um certo número natural m, maior do que 1, se tem $u_1 + u_m = 20$ e $\sum_{k=1}^{m} u_k = 220$.

Verifica que -203 é termo da sucessão (u_n) e indica a sua ordem.

8. Considera, em referencial o.n. xOy, o paralelogramo $[ABCD]$ em que o segmento de reta $[AC]$ é uma das diagonais. Seja E o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo.

Sabe-se que:

- o vetor $\overrightarrow{AE}$ tem coordenadas $(4,3)$;
- o vetor $\overrightarrow{CB}$ tem coordenadas $(-5,2)$;
- o ponto C tem coordenadas $(7,10)$.

Quais são as coordenadas do ponto D?

(A) $(4,1)$ **(B)** $(4,2)$ **(C)** $(6,1)$ **(D)** $(6,2)$

FIM DO CADERNO 1

9. Considera, em referencial o.n. xOy, uma elipse centrada no ponto O e cujos focos pertencem ao eixo Ox.

Seja F o foco de abcissa positiva.

A elipse interseta o eixo Ox em dois pontos. Seja A o que tem abcissa positiva.

Sabe-se que:

- F é o ponto médio do segmento de reta $[OA]$;
- o ponto de coordenadas $(-2,3)$ pertence à elipse.

Qual é a abcissa do ponto A?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera:

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{9}\right) \qquad z_2 = \cos\frac{\pi}{18} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{18} \qquad z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{12}\right)$$

Seja $w = -2 + \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{2+(z_3)^3}$. Escreve, na forma trigonométrica, o número complexo w.

11. Seja $a = \lim\left(\frac{n^2-n}{n^2+n}\right)^{2n}$. Qual é o valor de $\ln(a)$?

(A) -2 **(B)** -3 **(C)** -4 **(D)** -5

12. Determina o conjunto dos números reais tais que: $2\log_3(\sqrt{3}x) \geq 3 + \log_3(x-2)$

Apresenta a tua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

13. Seja f a função contínua, de domínio $\left]-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{kx} - (1+x)^2}{x} & \text{se } x < 0 \\ \mathrm{sen}\,x\,(1+\cos x) & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

(k designa um número real positivo)

13.1 Qual é o valor de k?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

13.2 O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua. Determina a equação reduzida dessa assíntota.

13.3 Estuda a função f quanto à monotonia no intervalo $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$ e determina, caso existam, os extremos relativos.

14. Considera, em referencial o.n. xOy , o gráfico da função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$g(x) = x\,(\ln x)^2$

Seja r a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{1}{e}$.

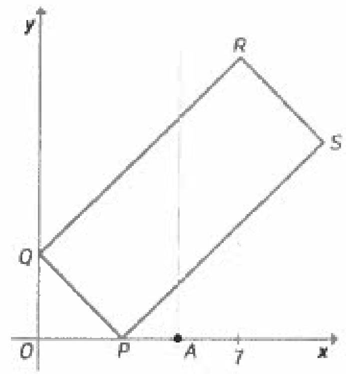
Seja B o ponto interseção da reta r com o eixo Oy .

Qual é a ordenada do ponto B ?

(A) $-\frac{2}{e}$ **(B)** $-\frac{1}{e}$ **(C)** $\frac{1}{e}$ **(D)** $\frac{2}{e}$

15. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy , o retângulo $[PQRS]$, em que:

- o ponto P tem coordenadas $(3, 0)$;
- o ponto Q tem coordenadas $(0, 3)$;
- o ponto R tem abcissa 7.



Considera que um ponto A se desloca ao longo do eixo Ox , entre a origem O do referencial e o ponto de abcissa 7, sem coincidir com o ponto O . Para cada posição do ponto A , seja a a sua abcissa e seja $f(a)$ a área da região sombreada (interseção do retângulo com o semiplano definido pela condição $x \leq a$).

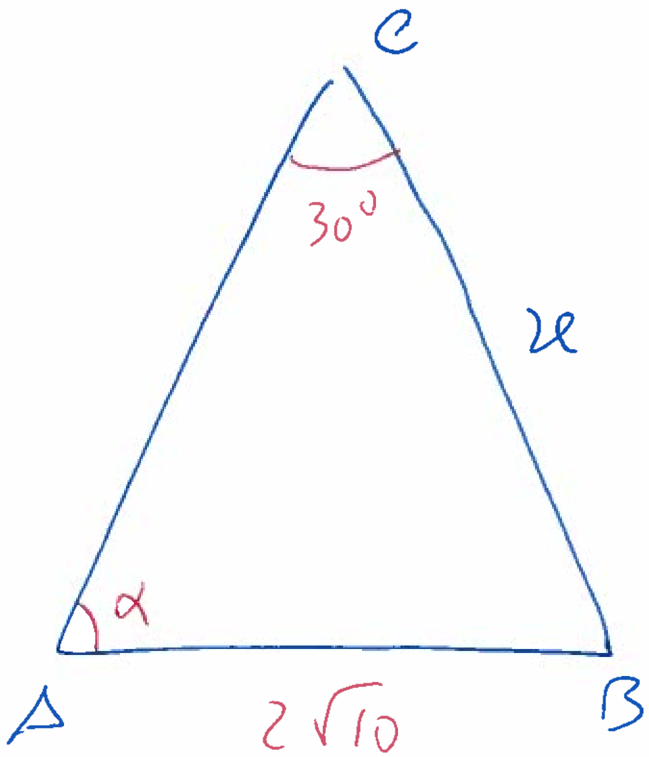
Define, por ramos, a função f .

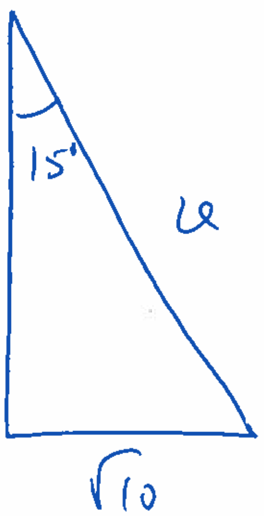
FIM

Prova Texto 2019

(1)

(1)





$$\text{Sen}(15) = \frac{\sqrt{10}}{x}$$

$$x = \frac{\sqrt{10}}{\text{Sen}(15)}$$

$$\text{Cos}(2\alpha) = \text{Cos}^2(\alpha) - \text{S}^2(\alpha)$$

$$\text{Cos}(30) = \text{Cos}^2(15) - \text{S}^2(15)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\,\text{S}^2(15)$$

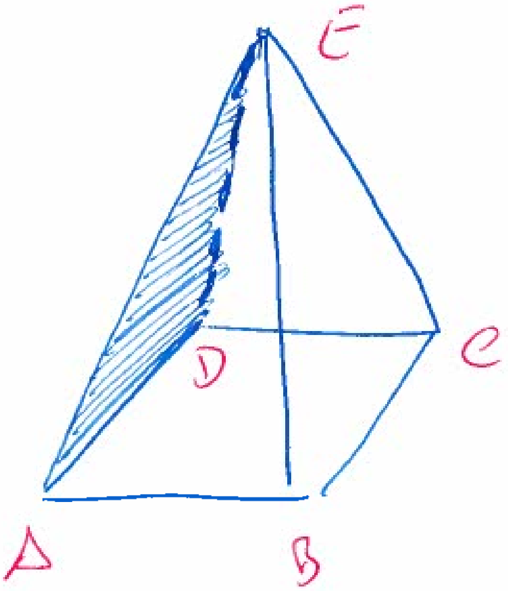
$$\text{S}^2(15) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{S}(15) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$x = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cong 12,$$

(C)

②



$A(x,0,0)$

$ADE:$ $\boxed{6x + 18y - 5z = 24}$

$E: (x,y,z) = (5,-4,2) + k(-1,3,2)$

$F(x,y,-2)$

$$\begin{cases} x = 5 - k \\ y = -4 + 3k \\ -2 = 2 + 2k \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = -10 \\ k = -2 \end{cases}$$

$\underline{\underline{F(7,-10,-2)}}$

$G(x, y, z)$

$$\begin{cases} x = 5 - k \\ y = -4 + 3k \\ z = 2 + 2k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ k = 1 \end{cases}$$

$G(4, -1, 4)$

2.2. $E = ?$

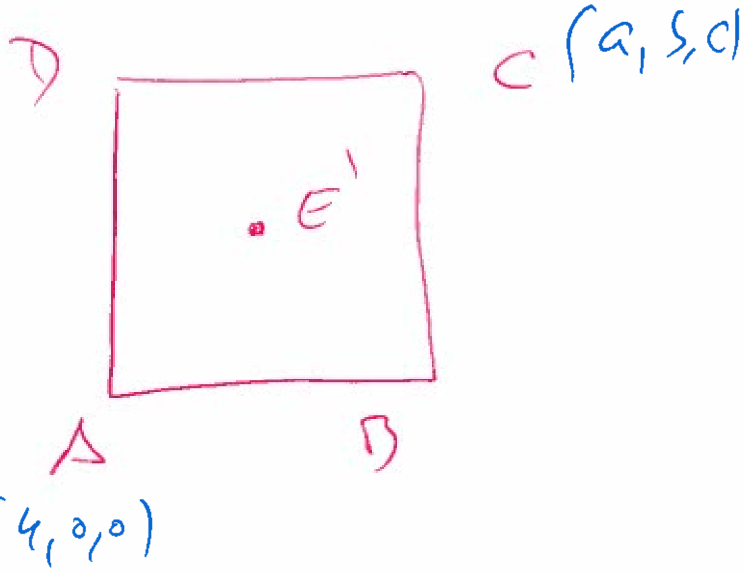
$$\begin{cases} 6x + 18y - 5z = 24 \\ x = 5 - k \\ y = -4 + 3k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$$

$6(5-k) + 18(-4+3k) - 5(2+2k) = 24$

$$\begin{cases} 30-6k-72+54k-10-10k=24 \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 38k=\cancel{7}6 \\ \text{——} \\ \text{——} \end{cases} \qquad \begin{cases} k=2 \\ x=3 \\ y=2 \\ z=6 \end{cases}$$

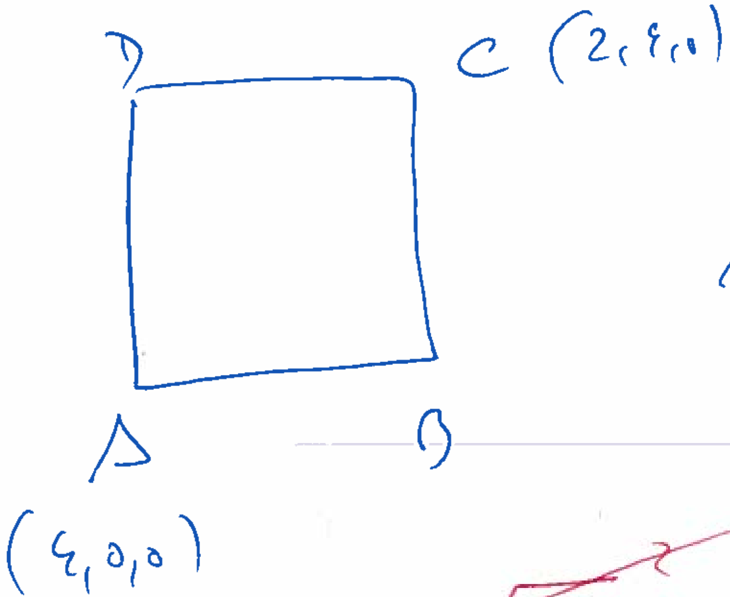
$E(3,2,6)$



$A(4,0,0)$

$E'(3,2,0)$

$$\begin{cases} \dfrac{4+a}{2}=3 \\ \dfrac{0+b}{2}=2 \\ \dfrac{0+c}{2}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases} \qquad C(2,4,0)$$



$$\overline{AC} = \sqrt{4 + 16 + 0}$$

$$= \sqrt{20}$$

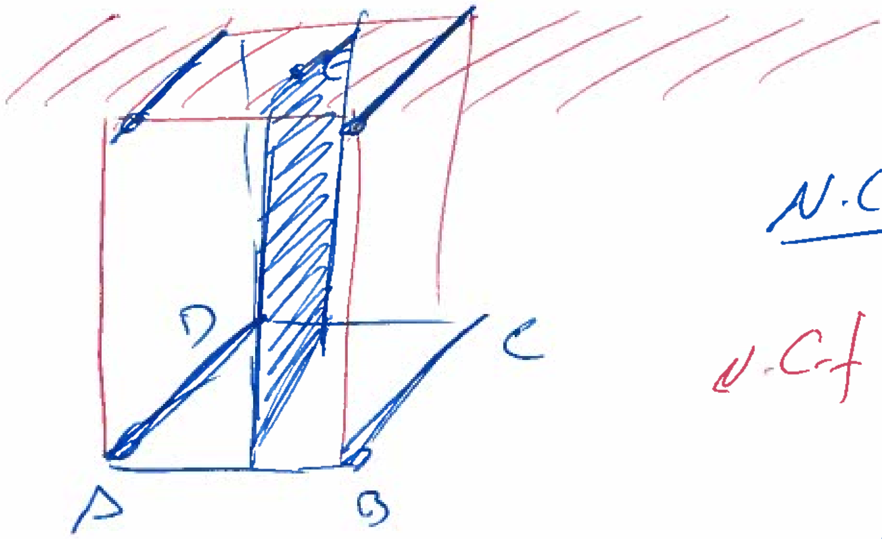
$$\sqrt{20}^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$20 = 2\ell^2$$

$$\ell^2 = 10$$

$$V = \frac{\ell^2 \times a}{3} = \frac{10 \times 6}{3} = 20 \text{ u.v.}$$

2.3.



$$N.C.P \quad C_1^4 \times C_1^4$$

$$N.C.F = 4$$

$$P = \frac{4}{C_1^4 \times C_1^4} = \frac{1}{4}$$

(3) (6)

30 alunos

Rita Pedro 28 alunos

Dell Sus

$\binom{30}{6}$ N.C.P.

R ~~P~~ S ou P ~~R~~ S ou ~~R~~ ~~P~~ 6

$\binom{1}{1} \times \binom{28}{5} + \binom{1}{1} \times \binom{28}{5} + \binom{28}{6}$

ou

$\binom{30}{6} - \binom{2}{2} \times \binom{28}{4}$

4

$P(A) = \frac{4}{5}$

$P(P) = \frac{1}{5}$

$P(G) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $P(L) = \frac{1}{3}$

$P(G|A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(G \cap A)}{P(A)} = \frac{3}{4}$

$P(G \cap A) = \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{5}$

$\boxed{P(G \cap A) = \frac{3}{5}}$

$P(P \cap L)$

ou $P(\overline{A} \cap \overline{G})$

$P(\overline{A \cup G})$

$= 1 - P(A \cup G) = 1 - \left(\underset{(3)}{\frac{4}{5}} + \underset{(5)}{\frac{2}{3}} - \underset{(3)}{\frac{3}{5}} \right) = 1 - \frac{13}{15}$

$= 2/15$

	A	P	
G	$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$
L		0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

(8)

(5) d – distância ao solo (m)

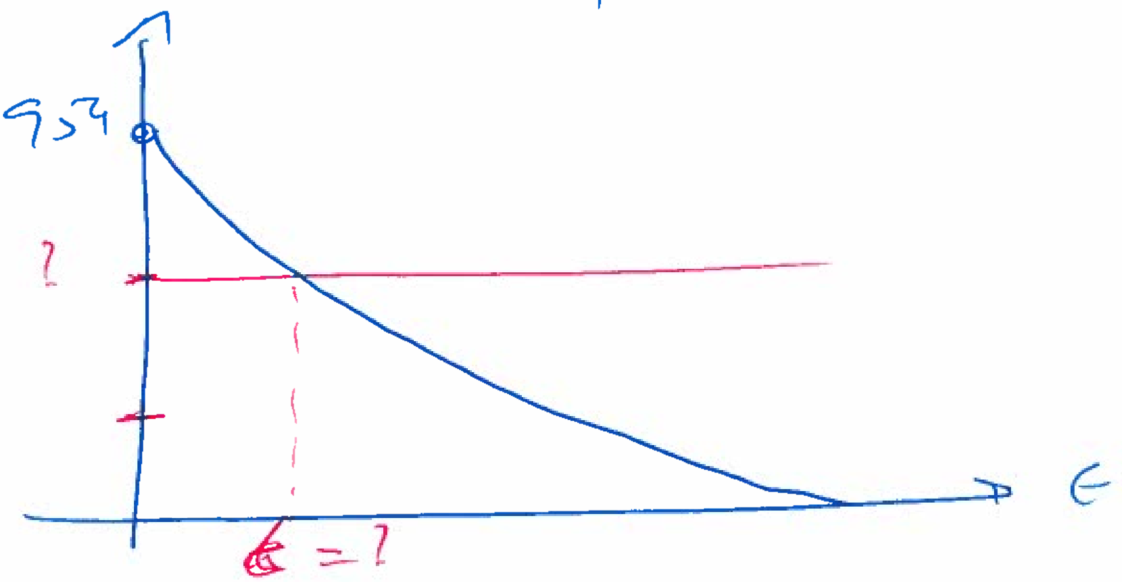
t – tempo (seg) após atingir o paraquedas

$$d(t) = 930 - 6t + 24e^{-1,4t}$$

$$d(0) = 930 + 24e^{0} = 954$$

$$d(t) = d(0) - \frac{1}{3}d(0) = \frac{2}{3}d(0)$$

$$\underbrace{930 - 6t + 24e^{-1,4t}}_{y_1} = \underbrace{\frac{2}{3}\times 954}_{y_2}$$



6 $\quad z \in \quad |z| = \sqrt{3}$ $\qquad$ 9

$$w = |z|^2 + z - \bar{z}$$

$$= \sqrt{3}^2 + a + yi - (a - yi)$$

$$= 3 + \cancel{a} + yi - \cancel{a} + yi$$

$$= 3 + 2yi$$

$$Re(w) + Im(w) = 9$$

$$3 \times 2y = 9$$

$$y = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

(B)

7 P.A. $r = -\frac{2}{3}$ 10

$$u_n = u_1 + r(n-1)$$

$$= u_1 - \frac{2}{3}(n-1)$$

$$u_n = u_1 - \frac{2}{3} n + \frac{2}{3}$$

$$u_1 + u_n = u_1 + u_1 - \frac{2}{3} n + \frac{2}{3}$$

$$\boxed{S_n = 220}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2u_1 - \frac{2}{3} n + \frac{2}{3}}{2} \times n = 220 \\ \\ 2u_1 - \frac{2}{3} n + \frac{2}{3} = 20 \end{cases}$$

11

$$\begin{cases} \dfrac{20 + \cancel{\frac{2}{3}n} - \cancel{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{2}{3}n} + \cancel{\frac{2}{3}}}{2} \times n = 220 \\ 2u_1 = 20 + \dfrac{2n}{3} - \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 22 \\ 2u_1 = 20 + \dfrac{42}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ u_1 = \dfrac{102}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} n = 22 \\ u_1 = \dfrac{51}{3} \end{cases}$$

$$u_n = u_1 + r(n-1)$$

$$= \frac{51}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)(n-1) = -203$$

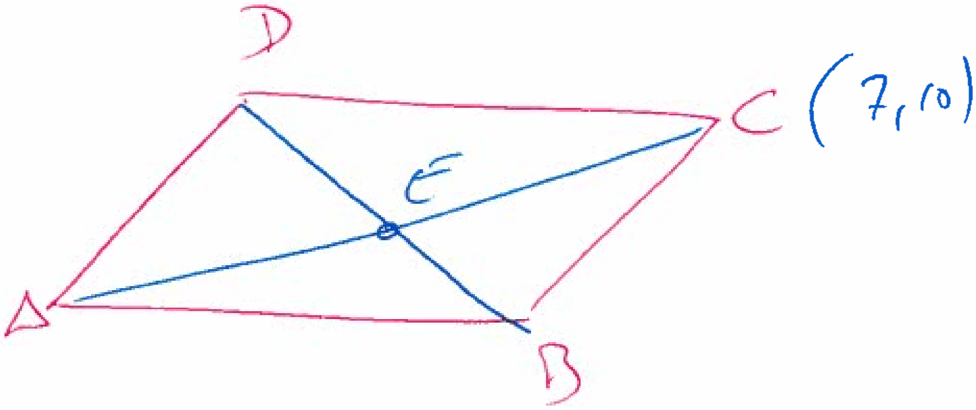
$$51 - 2n + 2 = -609$$

$$-2n = -609 - 53$$

$$-2n = -662$$

$$\boxed{n = 331}$$

8



$\overrightarrow{AE} = (4,3)$

$\overrightarrow{CB} = (-5,2) \Rightarrow B - C = (-5,2)$

$B = (-5,2) + (7,10)$

$B = (2,12)$

$D(a,y)$ então E é PM $[BD]$

$\begin{cases} \dfrac{2+a}{2} = 3 \\ \dfrac{12+y}{2} = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

$C = E + \overrightarrow{EC}$

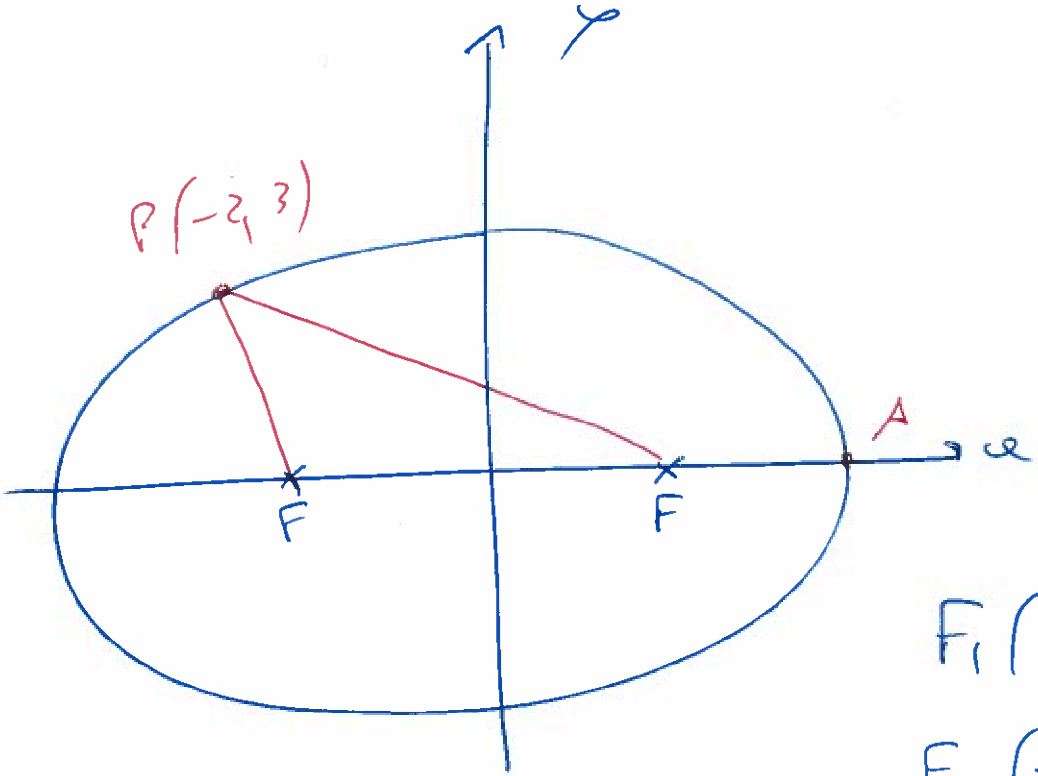
$E = C - \overrightarrow{EC}$

$= (7,10) - (4,3)$

$= (3,7)$

$D(4,2)$ (B)

9



$F_1\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

$F_2\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}+2\right)^2 + (-3)^2} + \sqrt{\left(-\frac{a}{2}+2\right)^2 + (-3)^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}+2\right)^2 + 9}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{\left(-\frac{a}{2}+2\right)^2 + 9}\right)^2$$

$$\cancel{\frac{a^2}{4}} + 2a + \cancel{4} + \cancel{9} = 4a^2 - 4a\sqrt{\left(-\frac{a}{2}+2\right)^2 + 9} + \cancel{\frac{a^2}{4}} - 2a + \cancel{4} + \cancel{9}$$

$$4a\sqrt{\frac{a^2}{4} - 2a + 4 + 9} = 4a^2 - 2a - 2a$$

$$4a\sqrt{\frac{a^2}{4}-2a+13} = 4a^2-4a$$

$$\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}-2a+13}\right)^2 = (a-1)^2$$

$$\frac{a^2}{4}-2a+13 = a^2-2a+1$$

$$a^2-\cancel{8a}+52 = 4a^2-\cancel{8a}+4$$

$$3a^2 = 48$$

$$a^2 = \frac{48}{3}$$

$$a^2=16$$

$$a = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$$

(e)

10.

$$z_1 = 4\, e^{i\left(2\pi/9\right)}$$

$$z_2 = 1\, e^{i\left(\pi/18\right)}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\left(5\pi/12\right)}$$

$$w = -2 + \frac{4\, e^{i\left(2\pi/9\right)} \cdot 1\, e^{i\left(-\pi/18\right)}}{2 + \left(\sqrt{2}\, e^{i\left(5\pi/12\right)}\right)^3}$$

$$= -2 + \frac{4\, e^{i\left(2\pi/9_{(2)} - \pi/18\right)}}{2 + \sqrt{2}^3\, e^{i\left(15\pi/12\right)}}$$

$$= -2 + \frac{4\, e^{i\left(\pi/6\right)}}{2 + 2\sqrt{2}\, e^{i\left(5\pi/4\right)}}$$

$$w = -2 + \frac{4\, e^{i(\pi/6)}}{2 + \cancel{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\, i\right)}$$

$$= -2 + \frac{4\, e^{i(\pi/6)}}{\cancel{2} - \cancel{2} - 2i}$$

$$= \frac{-2(-2i) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right)}{-2i}$$

$$= \frac{4i + 2\sqrt{3} + 2i}{-2i}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 6i}{-2i}$$

$$= \frac{\cancel{2}(\sqrt{3} + 3i)}{\cancel{2}(-i)} = \frac{2\sqrt{3}\, e^{i(\pi/3)}}{1\, e^{i(3\pi/2)}}$$

$$= 2\sqrt{3}\, e^{i(\pi/3 - 3\pi/2)}$$

17

11

$$a = \lim \frac{\left(1 - \frac{2\times 1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1 + \frac{2\times 1}{2n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{e^{-2}}{e^{2}} = e^{-4}$$

$$\ln(a) = \ln(e^{-4}) = -4$$

(C)

12 $2\log_3(\sqrt{3}x) \geq 3 + \log_3(x-2)$

$D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3}x > 0 \wedge x - 2 > 0\}$

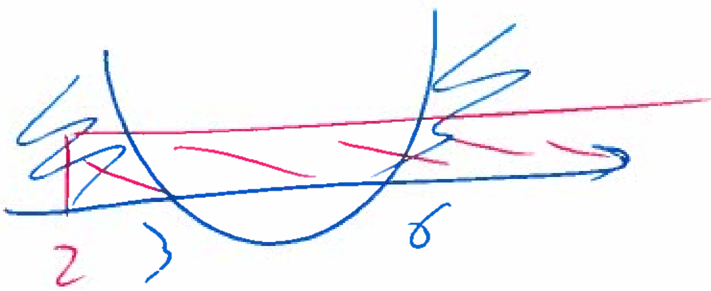
$=]2; +\infty[$

$$\log_3 (\sqrt{3}x)^2 \geq \log_3 (3^3) + \log_3 (x-2)$$

$$\log_3 (3x^2) \geq \log_3 (27(x-2))$$

$$3x^2 \geq 27x - 54 \quad \wedge \quad x \in D$$

$$x^2 - 9x + 18 \geq 0 \quad \wedge \quad x \in D$$



$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2}$$

$$= \frac{9 \pm 3}{2} \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$$

$$C.S.\ ]2,3] \cup [6,+\infty[$$