www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat
instagram.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 4 | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

---

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Só é permitido o uso de calculadora gráfica no Caderno 1.

Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o caderno e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se na margem de cada página.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no rodapé da prova. Prova realizada em junho de 2019. Última atualização às 11:37 de 21 de Julho de 2019.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Cotações

1. Na Figura 1 está representado, num referencial o.n $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- O ponto F tem coordenadas $(0, -1{,}5)$;
- A superfície esférica cujo centro é o centro da base $[ABCD]$ e que passa em A é definida por

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$$

- O ponto A pertence ao eixo Ox e tem abcissa inferior a 3.

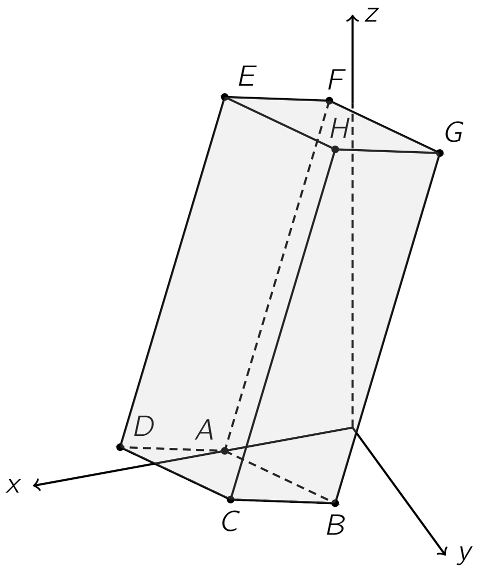

Figura 1

1.1. Mostre que $A(2,0,0)$ e determine as coordenadas do ponto médio do segmento $[EG]$. **12**

1.2. Seja P o ponto simétrico do ponto C relativamente à origem. **12**

Determine uma equação cartesiana do plano paralelo a EFG que passa em P.

2. Considere a linha do Triângulo de Pascal tal que o nono elemento tem igual valor ao décimo quarto elemento. **8**

Qual é a soma de todos os elementos da linha anterior ?

(A) 262 144 **(B)** 524 288 **(C)** 1 048 576 **(D)** 2 097 152

3. Considere um grupo de seis amigos constituído pelo António, o Guilherme, o Nuno, o Rodrigo, o Tomás e o Vasco.

3.1. O Nuno e o Vasco registaram os resultados de todas as suas partidas de ténis durante o ano de 2018. Essas partidas foram jogadas em piso rápido ou em terra batida. **13**

Sabe-se que:

- o Nuno venceu três em cada cinco partidas disputadas;
- o Vasco venceu três em cada cinco partidas disputadas em terra batida;
- três em cada quatro partidas que o Nuno venceu foram disputadas em piso rápido.

É escolhida, ao acaso, uma partida disputada entre os dois amigos.

Qual é a probabilidade dessa partida ter sido disputada em piso rápido?

3.2. Considere agora que os seis amigos vão a um bar e terão de se dispôr numa mesa com oito lugares. **12**

As cadeiras estão dispostas de modo que existem duas filas de quatro cadeiras.

De quantas maneiras podem os amigos se dispôr, sabendo que o António ficará sentado ao lado do Guilherme, e o Tomás ficará à frente do Vasco?

12 **4.** O Tomás organiza dois churrascos em sua casa por ano, um no inverno e um outro no verão. Nesses churrascos, o Tomás tem por hábito grelhar tomates, aqui assumidos como esféricos.

O tempo que os tomates demoram a atingir a temperatura T, quando retirados a uma temperatura T_i do grelhador e deixados a arrefecer ao ar livre a uma temperatura T_∞, como representado na Figura 2, é dado, em segundos, por:

$$t = 48{,}8 \ln\left(\frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}\right)$$

Todas as temperaturas mencionadas acima são medidas em graus Celsius, $^\circ$C.

Em ambos os churrascos, o Tomás tira os tomates do grelhador quando estão a 80°C, e cronometra o tempo t, em segundos, até atingirem os 40°C.

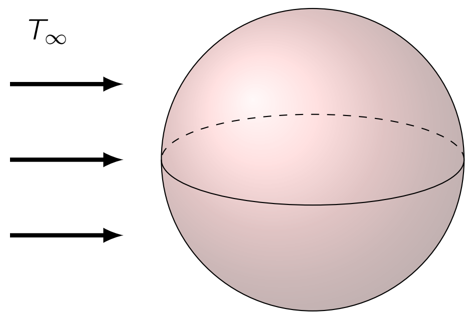

Figura 2

Sabe-se que no churrasco de Verão, os tomates foram deixados ao ar livre a uma temperatura três vezes maior do que a respetiva ao churrasco de Inverno. Relativamente ao tempo que o tomate demorou a atingir os 40°C, o Tomás reparou que no churrasco de Verão o tomate demorou o quádruplo do tempo respetivo ao churrasco de Inverno.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a temperatura do ar no churrasco de Inverno.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- apresentar o valor pedido em graus Celsius ($^\circ$C), com arredondamento às unidades.

8 **5.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2 + 4i$.

Sejam A, B, C e D vértices consecutivos de um polígono regular de 14 lados centrado na origem do referencial, como representado na Figura 3, tal que que A é afixo de z_1, e D é afixo de z_2.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, de $\text{Im}(z_2)$?

(A) 1,06

(B) 2,73

(C) 2,84

(D) 3,45

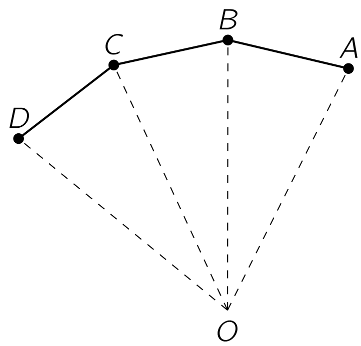

Figura 3

6. A primeira derivada de uma função f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ é dada por $f'(x) = e^{2x} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$. 8

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 passa no ponto de coordenadas (3,1).

Qual é o valor de $f(0)$?

(A) -6 **(B)** -5 **(C)** -4 **(D)** 1

7. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o valor da soma dos seus primeiros cinco termos é o dobro do valor da soma dos cinco termos consecutivos, a partir do sexto, incluindo-o. 12

Determine qual a ordem do termo nulo da progressão.

8. Considere que um ponto P se desloca na reta numérica durante um intervalo de tempo I. 8

Na Figura 4, está representado num referencial o.n xOy o gráfico do seu movimento respetivo ao movimento de um oscilador harmónico.

Sabe-se que:

- $x(0) = x(4) = 1$
- o valor mínimo que a função x toma é -3

Qual é o valor da pulsação e fase (em radianos, com arredondamento às centésimas), respetivamente, deste oscilador harmónico?

(A) $\dfrac{\pi}{2}$, 1,23 **(B)** $\dfrac{\pi}{2}$, 1,40

(C) π, 1,23 **(D)** π, 1,40

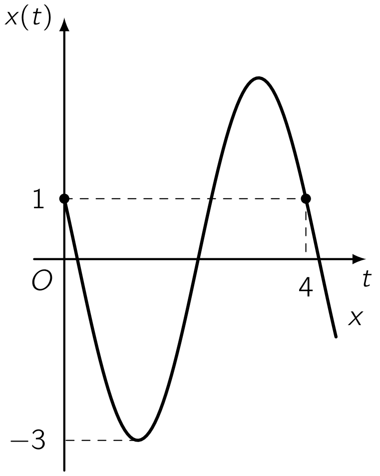

Figura 4

Fim do Caderno 1

www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat
instagram.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 4 | Ensino Secundário | 2019

12º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no rodapé da prova. Prova realizada em junho de 2019.

PÁGINA EM BRANCO

9. Qual é o valor de $\sin\left(\arcsin\dfrac{\pi}{8}\right)-\arcsin\left(\sin\dfrac{9\pi}{8}\right)$? 8

(A) $-pi$ **(B)** $-\dfrac{3\pi}{4}$ **(C)** 0 **(D)** $\dfrac{\pi}{4}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=1+\dfrac{i^{22}+3i}{3+i}$ e $z_2=\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$. 13

Seja A o afixo do número complexo $\overline{z_1}$, e B o afixo de $(z_2)^8$.

Seja w um número complexo imaginário puro que pertence à mediatriz do segmento $[AB]$.

Determine w, e apresente o resultado na forma algébrica.

11. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x)=\log_2(x)$. 8

Seja g uma função cujo gráfico é obtido através de uma translação vertical do gráfico de f de duas unidades no sentido negativo.

Qual pode ser a expressão analítica de g ?

(A) $g(x)=\log_2(x+2)$ **(B)** $g(x)=\log_2(x-2)$

(C) $g(x)=\log_2(2x)$ **(D)** $g(x)=\log_2\left(\dfrac{x}{4}\right)$

12. Considere a função h definida por $h(x)=\tan(2x)$. 8

Qual pode ser o domínio de h ?

(A) $\left]-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[$ **(B)** $\left]-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right[$ **(C)** $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ **(D)** $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right[$

13. Seja f uma função, de domínio $]-3,+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln^2 x+x^2} & \text{se } x>0\\ (x+3)\ln(x+3)-2x & \text{se } -3<x\leq 0\end{cases}$$

13.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados em $\mathbb{R}^+$. 14

13.2. Estude a função f quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos em $]-3,0[$. 13

13 **14.** Resolva a inequação $2^x \leq \left(\sqrt{2}\right)^{x+4} - 3$.

Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

8 **15.** Na Figura 5, está representada, num referencial o.n xOy, parte do gráfico da função f'', segunda derivada de f, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que f'' admite zeros em $x = -1$ e em $x = 2$, e que $f'(0) \times f'(1) < 0$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) O gráfico de f admite um ponto de inflexão em $]-1{,}2[$.

(B) A função f admite um mínimo relativo em $]-1{,}2[$.

(C) A função f admite um máximo relativo em $]-1{,}2[$.

(D) O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-1{,}2[$.

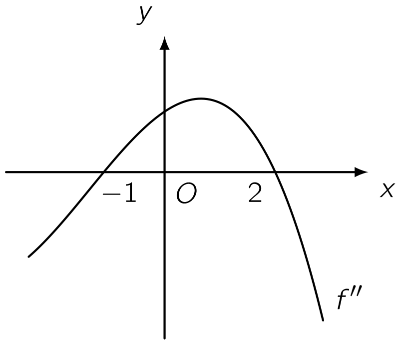

Figura 5

10 **16.** Na Figura 6 estão representados um quadrilátero $[ABCD]$, uma circunferência e uma reta r.

Sabe-se que:

- os pontos B, C e D pertencem à circunferência de centro em O;
- o segmento de reta $[BD]$ é um diâmetro da circunferência;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B e contém o ponto A.

Prove que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$.

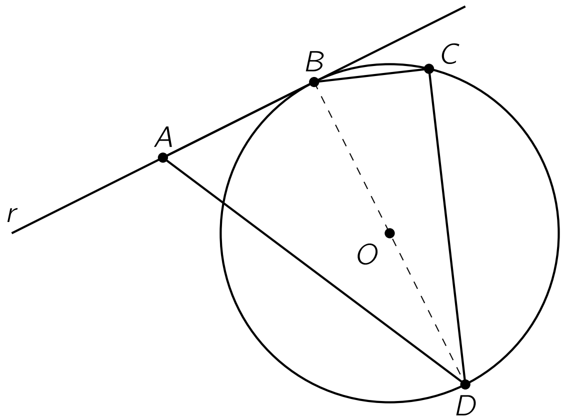

Figura 6

Fim do Caderno 2