Caderno 1

1. A linha 13 do Triângulo de Pascal tem 14 elementos, sendo que o primeiro e último têm valor 1, e o segundo e penúltimo têm valor 13.

Os únicos pares de elementos cujo produto é inferior ou igual a 13 são os pares constituídos entre o primeiro, segundo, penúltimo e último elementos. Existem então ${}^4C_2 = 6$ pares nestas condições. Contudo, o par formado pelo segundo e penúltimo elemento leva a um produto de valor superior a 13, pelo que existem então 5 pares de elementos cujo produto é inferior ou igual a 13.

Vem então que a probabilidade pedida é $p = \dfrac{{}^{14}C_2 - 5}{{}^{14}C_2} = \dfrac{86}{91}$.

Resposta: (D)

2.

2.1. Se uma diagonal e uma coluna ficam preenchidas com bolas da mesma cor, então terão de ser preenchidas com bolas amarelas.

Deve ser escolhida a diagonal e a coluna em que ficarão dispostas as bolas amarelas: ${}^2C_1 \times {}^5C_1 = 10$.

Repare-se que restam colocar 1 bola amarela e 5 bolas azuis nas 16 casas do tabuleiro que ainda não foram preenchidas: ${}^{16}C_1 \times {}^{15}C_5 = 48\,048$

Desta forma, o valor pedido é $10 \times 48\,048 = 480\,480$.

2.2. O valor de $P(A|B)$ representa, no contexto da situação descrita, a probabilidade de todas as bolas extraídas serem da mesma cor, sabendo que todas as bolas extraídas estão numeradas com um número par.

Se todas as bolas extraídas estão numeradas com um número par, então foram extraídas 4 das 7 bolas pares do saco. Destas 7 bolas, apenas 2 delas têm cor azul, pelo que só é possível extrair 4 bolas da mesma cor entre as bolas amarelas. Destas bolas amarelas, existem 5 bolas pares.

O número de casos possíveis corresponde então à escolha das 4 bolas entre as 7 bolas pares: ${}^7C_4$; e o número de casos favoráveis corresponde então à escolha das 4 bolas entre as 5 bolas amarelas pares: ${}^5C_4$.

O valor de $P(B|A)$ é então $P(B|A) = \dfrac{{}^5C_4}{{}^7C_4} = \dfrac{1}{7}$.

3. Como p, p^2 e q são três termos consecutivos de uma progressão geométrica tem-se $\dfrac{p^2}{p} = \dfrac{q}{p^2} \Leftrightarrow q = p^3$.

A razão, r, da progressão aritmética (u_n) é tal que $r = q - 3p = p^2 - q$.

Desta forma:

$$q - 3p = p^2 - q \Leftrightarrow p^3 - 3p = p^2 - p^3 \Leftrightarrow 2p^3 - p^2 - 3p = 0 \Leftrightarrow p\left(2p^2 - p - 3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2p\left(p - \frac{3}{2}\right)(p+1) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee p = \frac{3}{2} \vee p = -1$$

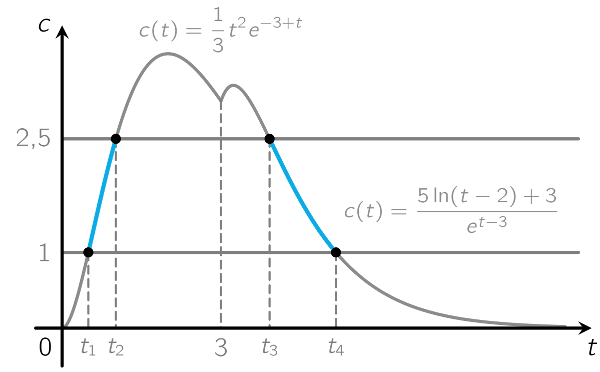
Caso $p = 0$, tem-se $r = 0$; caso $p = \dfrac{3}{2}$, tem-se $r = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 - 3 \times \dfrac{3}{2} = -\dfrac{9}{8}$, e caso $p = -1$, vem que $r = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.

Como a progressão aritmética (u_n) é crescente, a sua razão é positiva, pelo que vem $r = 2$, e $p = -1$.

Desta forma, o primeiro termo de (u_n) é $u_1 = 3p = -3$, e a razão é $r = 2$, de onde vem que o termo geral da progressão é $u_n = -3 + 2(n-1) = 2n - 5$.

4. Representando na calculadora gráfica o gráfico da função c, seja para $0 \leq t \leq 3$ ou $3 < t \leq 10$, e as retas de equação $c = 1$ e $c = 2{,}5$ podemos determinar a solução do problema.

Tal como a figura ao lado sugere, o gráfico de c interseta a reta de equação $c = 1$ duas vezes e a reta de equação $c = 2{,}5$ também duas vezes.
A resposta ao problema é o valor de $t_2 - t_1 + t_3 - t_4$. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se $t_1 \approx 0{,}495$, $t_2 \approx 1{,}015$, $t_3 \approx 3{,}917$ e $t_4 \approx 5{,}171$, de onde vem que o valor pretendido é $1{,}015 - 0{,}495 + 5{,}171 - 3{,}917 = 1{,}774$, o que corresponde a 1 hora e 46 minutos, isto é, o Vasco não sentiu os sintomas provocados pela contaminação durante 1 hora e 46 minutos após ter tomado os medicamentos.



5.

5.1. A superfície esférica tem raio $\sqrt{8}$, pelo que como $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm sentidos opostos vem:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos(180°) = -\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = -\sqrt{8} \times \sqrt{8} = -8$$

Resposta: (B)

5.2. O plano pretendido é paralelo a β, então o seu vetor normal tem a mesma direção do vetor normal ao plano β. Desta forma, a equação do plano pode ser escrita como $2x - y + z + d = 0$.
O ponto E tem coordenadas $(-1, -1, -4)$, e uma vez que pertence ao plano pretendido, obtém-se: $2 \times (-1) - (-1) - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$, e uma equação do plano é $2x - y + z + 5 = 0$.

5.3. O ponto F tem coordenadas $(0, y_F, 3)$ e pertence à superfície esférica, logo:
$0^2 + (y_F + 2)^2 + (3-1)^2 = 8 \Leftrightarrow (y_F + 2)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow (y_F + 2)^2 = 4 \Leftrightarrow y_F + 2 = \pm 2 \Leftrightarrow y_F = -2 \pm 2$
de tal forma que as soluções possíveis são $y_F = -4 \vee y_F = 0$. Contudo, como $y_F < 0$, vem que F tem coordenadas $(0, -4, 3)$.
A reta OF tem como vetor diretor $\overrightarrow{OF} = F = (0, -4, 3)$, pelo que pode ser descrita pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, -4, 3), k \in \mathbb{R}$, e as coordenadas genéricas de um ponto P da reta são dadas por $(x, y, z) = (0, -4k, 3k)$.
A área do quadrado que tem como lado o segmento $[PC]$ é 5, tem-se $\overline{PC} = \sqrt{5}$. Como o ponto C tem coordenadas $(0, -2, 1)$, e o ponto P pode ser descrito pelas coordenadas $(0, -4k, 3k)$ para um dado valor de k, tem-se:

$$\overline{PC} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x_F - x_C)^2 + (y_F - y_C)^2 + (z_F - z_C)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 0^2 + (-4k+2)^2 + (3k-1)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 16k^2 - 16k + 4 + 9k^2 - 6k + 1 = 5 \Leftrightarrow 25k^2 - 22k = 0 \Leftrightarrow k\,(25k - 22) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{22}{25}$$

para $k = 0$, o ponto P seria a origem, pelo que a solução obtém-se para $k = \frac{22}{25}$, de tal forma que as coordenadas de P são $\left(0, -\frac{88}{25}, \frac{66}{25}\right)$.

6. Pela Lei dos Cossenos:
$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(29°) = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos(29°) \approx 19{,}03$
de onde vem que $\overline{BC} \approx \sqrt{19{,}03} = 4{,}36$

Resposta: (A)

7. Tem-se $\lim f(x_n) = \lim\limits_{x \to \lim u_n} f(x)$, pelo que vem:

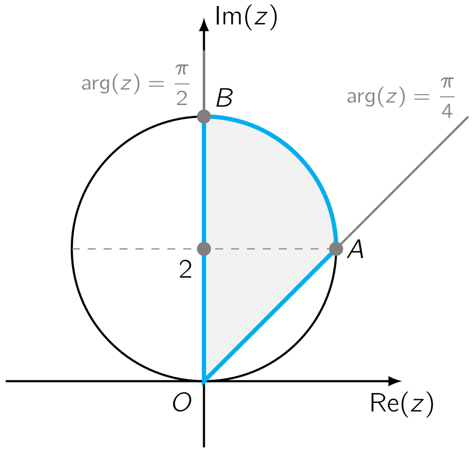
$$\lim x_n = \lim \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{-n} = \lim \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e}$$

Logo, conclui-se que: $\lim f(x_n) = \lim\limits_{x \to 1/e} f(x) = e + \frac{1}{1/e} = e + e = 2e$

Resposta: (D)

Caderno 2

8. A região definida pela condição $|z-2i| \leq 2 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ está representada na figura ao lado.



Repare que $|z-2i| \leq 2$ representa o círculo de raio 2 centrado no afixo do número complexo $2i$. A semireta definida por $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ passa no afixo do número complexo $2+2i$.

Tal como a figura sugere, a região definida é constituída por um triângulo de altura e base igual a 2 e um quarto de círculo de raio 2.

A área do triângulo é $\frac{2\times 2}{2} = 2$, e a área do quarto de círculo é $\frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$.

A área da região é então $2+\pi$.

Resposta: (D)

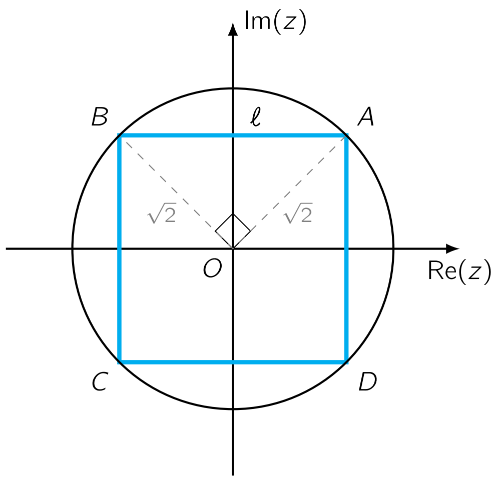
9. Como $i^{30} = i^{28} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$, tem-se:

$$z = \frac{(1+3i)\times i^{30}}{2+i} = \frac{(1+3i)(-1)}{2+i} = \frac{-1-3i}{2+i} = \frac{(-1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-2+i-6i+3i^2}{2^2-i^2} = \frac{-5-5i}{5} = -1-i$$

De tal forma que $|z| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, e $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \tan^{-1}(1) \overset{z\in 3^{o}Q}{=} -\frac{3\pi}{4}$.

Tem-se então que $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ e, portanto, $\overline{z} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

As restantes raízes quartas de w, designadas aqui por z_1, z_2 e z_3, podem ser obtidas através de $\overline{z}$, considerando que raízes consecutivas obtêm-se através da rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos em relação à origem. Tem-se:



- $z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$
- $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$
- $z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Na figura ao lado estão representados os afixos de z, z_1, z_2 e z_3. Repare-se então que o lado do quadrado, ℓ, pode ser obtido tendo em conta que o triângulo $[AOB]$ é retângulo. Logo:

$\ell^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

De onde vem que o perímetro do quadrado é 8.

10. O ponto A tem coordenadas $\left(\sin\frac{3\pi}{4}, f\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, e o ponto B tem coordenadas $(0,g(0))$.

Como a reta AB é paralela ao eixo Ox, tem-se que a ordenada de A é igual à ordenada de B. Desta forma:

$$f\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = g(0) \Leftrightarrow k\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \pi - \arccos(0) \Leftrightarrow k\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: (D)

11. O ponto $(2\log_2 p, 3)$ pertence ao gráfico de f, logo $f(2\log_2 p) = 3$, vindo que:

$$f(2\log_2 p) = 3 \Leftrightarrow 2^{2\log_2 p+1} - 1 = 3 \Leftrightarrow 2^{2\log_2 p+1} = 4 \Leftrightarrow 2^{2\log_2 p+1} = 2^2 \Leftrightarrow 2\log_2 p + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

Resposta: (C)

12.

12.1. A função f será contínua no ponto de abcissa 0 se e só se $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Tem-se que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0\times\left(e^{-0}+2\right)+1 = 0\times 3+1 = 1$, pelo que f é contínua em $x=0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$. Vem que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(3x)}{x^2+3x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(3x)}{x(x+3)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(3x)}{x}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x+3} = 3\underbrace{\lim_{3x\to 0^-}\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\text{Limite Notável}}\times\frac{1}{0+3}$$
$$= 3\times 1\times\frac{1}{3} = 1$$

em que se utilizou o facto de se $x\to 0^-$, então $3x\to 0^-$.

Conclui-se então que f é contínua no ponto de abcissa 0.

12.2. De forma a averiguar a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f em $\mathbb{R}^+$, tenha-se em conta que essa assíntota, caso exista, será definida pela equação $y = mx+b$, em que $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$ são constantes reais.

Tem-se então:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(e^{-x}+2)+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2+\frac{1}{x}\right) = e^{-\infty}+2+\frac{1}{+\infty} = 0+2+0 = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{-x}+2\right)+1-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}+2x+1-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+1$$
$$= \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Limite Notável}}}+1 = \frac{1}{+\infty}+1 = 0+1 = 1$$

de onde se conclui que a reta de equação $y = 2x+1$ é assíntota oblíqua do gráfico de f em $\mathbb{R}^+$.

13. A função g é uma função quadrática que não tem zeros e admite um máximo no ponto de abcissa 1, logo tem concavidade voltada para baixo e é sempre negativa. Desta forma, tem-se que $g(1) < 0$.

Como a função h é decrescente à esquerda do ponto de abcissa 1 e $h(1) = 0$, tem-se que $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = 0^+$.

Vem então que $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\overbrace{g(1)}^{<0}}{0^+} = -\infty$.

Resposta: (A)

14. Tem-se:

$$g''(x) = \left(\sqrt{3}x - 2\sin^2 x\right)' = \sqrt{3}-2\cdot 2\cdot\sin x\cdot(\sin x)' = \sqrt{3}-4\sin x\cos x = \sqrt{3}-2\sin(2x)$$

Em $\mathbb{R}$ tem-se:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}-2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3}+2\pi k \vee 2x = \frac{2\pi}{3}+2\pi k$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}+\pi k \vee x = \frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{R}$$

pelo que, em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, têm-se duas soluções: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

Estudando o sinal de g'':

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	n.d	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d
$g(x)$	n.d	$\cup$	p.inf.	$\cap$	p.inf.	$\cup$	n.d

Conclui-se que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0,\frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$, e tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$, e admite dois pontos de inflexão correspondentes aos pontos de abcissa $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$.

15. Tem-se:

$$h'(x) = (x)' f(\ln x) + x\left(f(\ln x)\right)' = f(\ln x) + x(\ln x)' f'(\ln x) = f(\ln x) + x \cdot \frac{1}{x} \cdot f'(\ln x) = f(\ln x) + f'(\ln x)$$

A função f é contínua e diferenciável em $[1,e]$, pelo que f' existe e é também contínua neste intervalo. A função $\ln x$ é também contínua em $[1,e]$. Logo, a função h', que resulta da soma de duas funções compostas de funções contínuas, é também contínua em $[1,e]$.

Repare-se que:

$h'(1) = f(\ln 1) + f'(\ln 1) = f(0) + f'(0) = 0 + f'(0) < 0$, uma vez que f é decrescente no ponto de abcissa 0.

$h'(e) = f(\ln e) + f'(\ln e) = f(1) + f'(1) = 1 + f'(1) > 0$, uma vez que f é crescente no ponto de abcissa 1.

Desta forma, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, uma vez que h' é contínua em $[1,e]$, e $h'(1) \times h'(e) < 0$, vem que $\exists c \in]1,e[: h'(c) = 0$, como se pretendia provar.