www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat
instagram.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 2 | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

---

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Só é permitido o uso de calculadora gráfica no Caderno 1.

Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o caderno e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se na margem de cada página.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no rodapé da prova. Prova realizada em junho de 2019. Última atualização às 23:16 de 18 de Junho de 2019.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Cotações

1. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher dois elementos ao acaso da linha 13 do Triângulo de Pascal. **8**

Qual é a probabilidade do produto desses elementos ser superior a 13 ?

(A) $\frac{12}{13}$ **(B)** $\frac{73}{78}$ **(C)** $\frac{85}{91}$ **(D)** $\frac{86}{91}$

2. Considere um saco com quinze bolas apenas distinguíveis pela cor: dez amarelas e cinco azuis.

2.1. Na Figura 1 está representado um tabuleiro com vinte e cinco casas. **12**

Pretende-se colocar neste tabuleiro as quinze bolas do saco, de forma a que cada bola ocupe uma e uma só casa.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as quinze bolas, de tal forma que uma diagonal e uma coluna fiquem preenchidas com bolas da mesma cor?

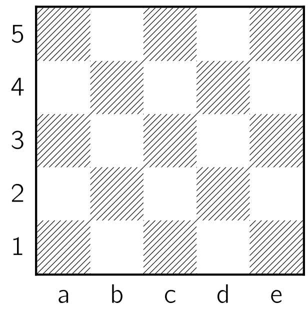

Figura 1

2.2. Considere agora que as quinze bolas vão ser **numeradas**, de tal forma que as dez bolas amarelas são numeradas de 1 a 10, e as bolas azuis são numeradas de 11 a 15. **13**

Vão ser extraídas, ao acaso, quatro bolas do saco.

Seja A o acontecimento "são extraídas bolas da mesma cor", e seja B o acontecimento "todas as bolas extraídas estão numeradas com um número par".

Determine o valor de $P(A|B)$, sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada.

Justifique a sua resposta numa composição, em que deve:

- explicar o significado de $P(A|B)$ no contexto da situação descrita;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor pedido na forma de fração irredutível.

3. Considere as constantes p e q, tais que $3p$, q e p^2 são os três primeiros termos, respetivamente, de uma progressão aritmética crescente (u_n) **12**

Sabe-se ainda que p, p^2 e q são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Determine o termo geral de (u_n)

12 **4.** Para recuperar da contaminação provocada por um vírus, o Vasco vai tomar dois medicamentos no mesmo dia. O medicamento A será tomado às 12 horas, e o medicamento B será tomado às 15 horas desse dia.

Os medicamentos A e B contém na sua composição uma mesma substância. Admita que, durante as primeiras dez horas ($0 \leq t \leq 10$) após as 12 horas desse dia, a concentração dessa substância, medida em miligramas por litro de sangue, é dada por:

$$c(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}t^2 e^{-t+3} & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ \dfrac{5\ln(t-2)+3}{e^{t-3}} & \text{se } 3 < t \leq 10 \end{cases}$$

Os sintomas provocados pela contaminação não são sentidos pelo Vasco quando o valor da concentração da substância está entre 1 e 2.5 miligramas por litro de sangue.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o período de tempo em que os sintomas provocados pela contaminação não foram sentidos pelo Vasco.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- apresentar o valor pedido em horas e minutos.

5. Considere, num referencial o.n $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 8$$

Seja β o plano definido pela equação $2x - y + z = 6$, e D o ponto de coordenadas $(1,1,4)$.

8 **5.1.** Seja C o centro da superfície esférica, da qual o segmento $[AB]$ é um diâmetro.

Qual é o valor de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) -64 **(B)** -8 **(C)** 8 **(D)** 64

12 **5.2.** Seja E o ponto simétrico do ponto D relativamente à origem.

Determine uma equação cartesiana do plano paralelo a β e que passa no ponto E

13 **5.3.** Seja F o ponto da superfície esférica de ordenada negativa pertencente aos planos yOz e $z = 3$

Considere o ponto P pertencente à reta OF, e tal que o quadrado cujo um lado é o segmento $[PC]$ tem área 5

Determine as coordenadas do ponto P

6. Na Figura 2, está representado um triângulo $[ABC]$ 8

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 5$
- $\overline{AC} = 8$
- $C\hat{A}B = 29°$

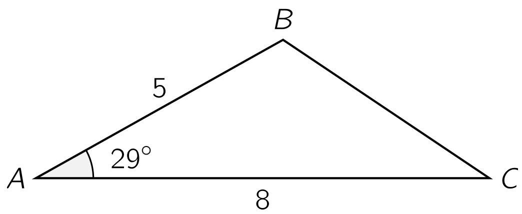

Figura 2

Qual é o valor de $\overline{BC}$, arredondado às centésimas ?

(A) 4,36 **(B)** 4,76 **(C)** 7,26 **(D)** 12,62

7. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ definida por 8

$$f(x) = \begin{cases} e + \dfrac{1}{x} & \text{se } \ 0 < x \leq e \\ \ln x & \text{se } \ x > e \end{cases}$$

Considere a sucessão convergente (x_n) definida por $x_n = \left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{-n}$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** $e + \dfrac{1}{e}$ **(D)** $2e$

Fim do Caderno 1

www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat
instagram.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 2 | Ensino Secundário | 2019

12º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2) : 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

---

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no rodapé da prova. Prova realizada em junho de 2019.

PÁGINA EM BRANCO

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a condição 8

$$|z-2i| \leq 2 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

(A) $1+\frac{\pi}{2}$ **(B)** $1+\pi$ **(C)** $2+\frac{\pi}{2}$ **(D)** $2+\pi$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{(1+3i)\times i^{30}}{2+i}$. 12

Sabe-se que o número complexo $\overline{z}$ é raiz quarta de um número complexo w.

Os afixos das raízes quartas de w formam um polígono regular centrado na origem.

Determine as restantes raízes quartas de w, apresentando-as na forma trigonométrica, e determine o perímetro do polígono.

10. Considere as funções f e g de domínio $[-1,1]$ definidas por 8

$$f(x) = k\arcsin(x) \qquad g(x) = \pi - \arccos(x)$$

em que k designa uma constante real não nula.

Seja A o ponto do gráfico de f de abcissa $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, e B o ponto do gráfico de g de abcissa 0.

Sabe-se que a reta AB é paralela ao eixo Ox.

Qual é o valor de k ?

(A) -2 **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** 2

11. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2^{x+1}-1$. 8

Sabe-se que o ponto de coordenadas $(2\log_2 p, 3)$ pertence ao gráfico de f.

Qual é o valor de p ?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 2

12. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x^2+3x} & \text{se } x < 0 \\ x\left(e^{-x}+2\right)+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

13 **12.1.** Averigue se a função f é contínua no ponto de abcissa 0.

13 **12.2.** Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico em $\mathbb{R}^+$.

8 **13.** Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $h(1) = 0$.

A tabela de variação de sinal da função h', primeira derivada de h, é a seguinte:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
h'	$+$	0	$-$	0	$+$

Seja g uma função quadrática que não tem zeros e admite um máximo no ponto de abcissa 1.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{g(x)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

13 **14.** Seja g uma função de domínio $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, cuja primeira derivada, g', de domínio $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, é dada por

$$g'(x) = \sqrt{3}\,x - 2\sin^2(x)$$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

15. Na Figura 3, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-3,3]$. 12

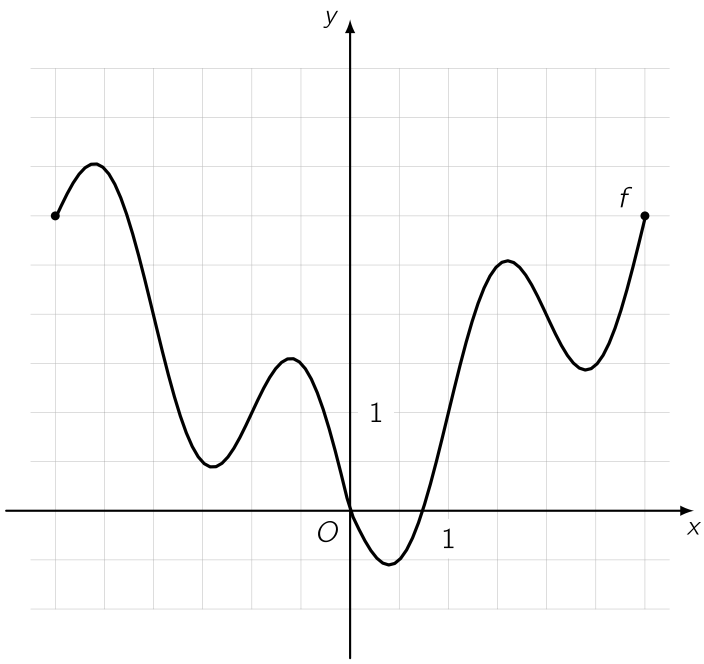

Figura 3

Seja h a função, de domínio $\left[\frac{1}{e^3}, e^3\right]$, definida por $h(x) = x\, f(\ln x)$.

Prove que a função h', primeira derivada de h, admite, pelo menos, um zero em $]1,e[$.

Fim do Caderno 2