Caderno 1

1. Como o valor do eixo maior da elipse é o dobro do valor do eixo menor da mesma tem-se $2a = 2\times(2b) \Leftrightarrow a = 2b$.

Uma vez que o valor da distância focal da elipse é $8\sqrt{3}$, tem-se $c = 4\sqrt{3}$.

Desta forma: $a^2 = b^2+c^2 \Leftrightarrow (2b)^2 = b^2+c^2 \Leftrightarrow 4b^2 = b^2+c^2 \Leftrightarrow 3b^2 = c^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{c^2}{3} \overset{b>0}{\Leftrightarrow} b = \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$.

Logo $a = 2b \Leftrightarrow a = 2\times 4 = 8$, e o valor do eixo maior da elipse é $2a = 2\times 8 = 16$.

Resposta: (C)

2.

2.1. O ponto P é o simétrico do ponto F relativamente ao plano xOy, pelo que as suas coordenadas são $(3{,}0{,}-1)$.

O ponto A pertence ao eixo coordenado Oz, logo tem coordenadas $(0{,}0{,}z_A)$. Uma vez que pertence ao plano ABC tem-se $-0+2\times 0+2z_A = 8 \Leftrightarrow z_A = 4$. As coordenadas do ponto A são $(0{,}0{,}4)$.

Seja θ a amplitude do ângulo POA, tal que $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}$.

Tem-se:

- $\overrightarrow{OP} = P-O = P = (3{,}0{,}-1)$, logo $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{3^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$.
- $\overrightarrow{OA} = A-O = A = (0{,}0{,}4)$, logo $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 4$.
- $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} = (3{,}0{,}-1)\cdot(0{,}0{,}4) = 3\times 0+0\times 0+(-1)\times 4 = -4$.

Portanto $\cos\theta = \dfrac{-4}{4\times\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, de onde vem que $\theta \approx 108^o$.

2.2. O ponto E corresponde ao ponto de interseção do plano DEF com a reta AE. Repare que DEF é um plano paralelo a ABC e que contém o ponto F, e que a reta AE é uma reta perpendicular a ABC e que contém o ponto A.

O vetor normal ao plano DEF tem a mesma direção do vetor normal ao plano ABC, pelo que pode ser descrito pelas coordenadas $(-1{,}2{,}2)$. Desta forma, a equação do plano DEF é da forma $-x+2y+2z+d = 0$, e uma vez que passa no ponto F de coordenadas $(3{,}0{,}1)$ vem $-3+2\times 0+2\times 1+d = 0 \Leftrightarrow d = 1$. Conclui-se então que uma equação do plano DEF é $-x+2y+2z+1 = 0$.

O vetor diretor da reta AE tem a mesma direção do vetor normal ao plano ABC, e passa em A, pelo que uma equação vetorial que a descreve é $(x,y,z) = (0{,}0{,}4)+k(-1{,}2{,}2)$, $k\in\mathbb{R}$, e as coordenadas genéricas de um ponto da reta são $(x,y,z) = (-k{,}2k{,}4+2k)$.

O ponto E corresponde então ao ponto que respeita as coordenadas genéricas AE e a equação de DEF, vindo: $-(-k)+2\times 2k+2\times(4+2k)+1 = 0 \Leftrightarrow k+4k+8+4k+1 \Leftrightarrow 9k = -9 \Leftrightarrow k = -1$.

Desta forma, as coordenadas do ponto E são $\big(-(-1){,}2(-1){,}4+2(-1)\big) = (1{,}-2{,}2)$.

2.3. Tem-se:

- a escolha das duas faces que ficarão pintadas com a mesma cor e a escolha dessa mesma cor pode-se fazer de ${}^5C_2\times 8 = 80$ maneiras diferentes.
- pode-se pintar as restantes três faces com cores diferentes entre si, tendo em conta que a cor utilizada para as duas faces anteriormente pintadas não pode ser usada, de ${}^7A_3 = 210$ maneiras diferentes.

Desta forma, pode-se pintar o prisma de $80\times 210 = 16\,800$ maneiras diferente respeitando as condições do enunciado.

3. Sabe-se que $u_{10} = 4u_8$, pelo que como (u_n) é uma progressão geométrica, pode-se escrever

$$u_8 \times r^2 = 4u_8 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = \pm 2$$

em que r é a razão da progressão geométrica. Como (u_n) não é monótona, a sua razão é necessariamente negativa, pelo que $r = -2$, isto é, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -2$.

Da definição por recorrência de (v_n), pode-se concluir que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = k + \frac{u_{n+1}}{u_n} = k - 2$, que corresponde a um valor real para todo o $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, (v_n) é uma progressão geométrica, cuja razão é $k-2$, e será limitada caso $|k-2| \leq 1$.

Desta forma $|k-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq k-2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 3$, pelo que $k \in [1,3]$ assegura que (v_n) é limitada.

4. A reta AB tem declive $\sqrt{15}$, pelo que a sua inclinação, α, é tal que $\tan\alpha = \sqrt{15}$. Repare-se que o ângulo BAC tem amplitude α, pois AB é paralela ao eixo Ox.

O valor de $\overline{BC}$ pode ser obtido recorrendo à Lei dos Cossenos: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\alpha$.

O valor de $\cos\alpha$ pode ser obtido através do valor de $\tan\alpha$, vindo

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} \overset{\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{15}\right)^2}} = \frac{1}{4},$$

tal que $\overline{BC}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{4} = 24$, e $\overline{BC} = \sqrt{24} \approx 4{,}9$.

Resposta: (C)

5.

5.1. Repare-se que como $[ABCDEFGH]$ é um octógono regular centrado na origem, os vértices desse mesmo correspondem aos afixos das raízes de índice 8 de um mesmo número complexo. Desta forma, a título de exemplo, o ângulo AOB tem amplitude $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Seja θ um argumento de z_1. Repare-se que $w = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, vindo $z_2 = \frac{z_1}{w} = |z_1|e^{i\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)}$, pelo que z_2 corresponde a uma rotação de $-\frac{3\pi}{4}$ radianos do afixo de z_1 em torno da origem. Desta forma, o afixo de z_2 é o ponto G, pois o ângulo BOG tem amplitude $\frac{3\pi}{4}$ radianos.

Resposta: (D)

5.2. Podem-se escolher os dois vértices entre os oito do octógono de ${}^8C_3 = 56$ formas distintas.

De forma a que o segmento que une os dois vértices escolhidos seja um diâmetro, devemos atentar ao facto de existirem apenas 4 formas de fazer essa escolha, respetivas à escolha dos vértices A e E, B e F, C e G, e D e H. Após a escolha de qualquer um destes pares de vértices, deve-se ainda escolher um qualquer vértice entre os 6 restantes. Existem então $4 \times 6 = 24$ maneiras distintas de escolher três pontos de forma a que o triângulo que os une tenha um lado que constitua um diâmetro da circunferência.

A probabilidade pedida é então $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

Resposta: (B)

6. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O cliente está categorizado como propenso a acidentes."

B: "O cliente teve um acidente no período de cobertura do seguro."

Do enunciado vem que $P(B) = 0.25$, $P(B|\overline{A}) = 0.05$, e $P(B|A) = 0.8$.

Pretende-se determinar o valor de $P(A)$.

Tem-se que

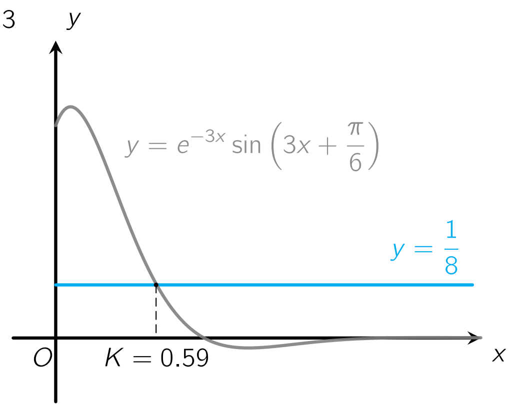
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\overline{A}) \times P(\overline{A}) = 0.8P(A) + 0.05 \times (1 - P(A))$$

vindo então

$$0.25 = 0.8P(A) + 0.05 - 0.05P(A) \Leftrightarrow 0.75P(A) = 0.20 \Leftrightarrow P(A) = \frac{0.20}{0.75} = \frac{4}{15}.$$

7. O engenheiro pretende escolher o valor de K, tal que o ângulo de rolamento aumentou, em média, 1 grau por segundo nos primeiros três segundos após o início do movimento do leme, isto é, pretende-se determinar o valor de K tal que a taxa média de variação do ângulo de rolamento nos primeiros três segundos seja igual a 1. Desta forma, a equação que deverá ser resolvida é:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(3) - \phi(0)}{3 - 0} = 1 &\Leftrightarrow \phi(3) - \phi(0) = 3 \\
&\Leftrightarrow 5 - 8e^{-3K} \sin\left(3K + \frac{\pi}{6}\right) - \underbrace{\left[5 - 8e^{-0} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]}_{\phi(0) = 5 - 8 \times \frac{1}{2} = 1} = 3 \\
&\Leftrightarrow 5 - 8e^{-3K} \sin\left(3K + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 3 \\
&\Leftrightarrow -8e^{-3K} \sin\left(3K + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \\
&\Leftrightarrow e^{-3K} \sin\left(3K + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$



Tal como a figura ao lado sugere, a solução obtém-se intersetando os gráficos da curva $y = e^{-3x} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ e da reta $y = \frac{1}{8}$, de onde se conclui que o valor do fator de controlo que o engenheiro deve escolher é $K = 0{,}59$.

Caderno 2

8. Tendo em conta que a fase de um oscilador harmónico deve ser um valor em $[0, 2\pi[$, e que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, tem-se:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 4 \sin\left(-\frac{\pi}{2}t - \frac{5\pi}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}t - \frac{5\pi}{3}\right)\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{13\pi}{6}\right) \\
&= 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + 2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

pelo que a fase do oscilador harmónico é $\frac{\pi}{6}$.

Resposta: (A)

9. Repare que $a = \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$, pelo que se conclui que:

$$\begin{aligned}
f(a) = f\left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right) &= \arccos\left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) \\
&= \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{2\pi}{5}
\end{aligned}$$

Resposta: (A)

10. Tem-se que:

$$w_1 = 6i^{4n+3} + \frac{(1-i)^6 + 12i}{2-i} = 6(-i) + \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^6 + 12i}{2-i}$$

$$= -6i + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^6 e^{i\left(-\frac{6\pi}{4}\right)} + 12i}{2-i} = -6i + \frac{8i+12i}{2-2i} = -6i + \frac{20i}{2-i}$$

$$= -6i + \frac{20i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -6i + \frac{20i^2+40i}{2^2-i^2} = -6i + \frac{-20+40i}{5}$$

$$= -6i - 4 + 8i = -4 + 2i$$

$$i^{4n+3} = i^{4n} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(1-i) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = \tan^{-1}(-1) \overset{4^{\text{o}}Q}{=} -\frac{\pi}{4}$$

$$e^{i\left(-\frac{6\pi}{4}\right)} = e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i$$

de tal forma que $w_2 = 2 + \frac{\overline{w_1}}{2} = 2 + \frac{\overline{-4+2i}}{2} = 2 + \frac{-4-2i}{2} = 2 - 2 - i = -i$.

A circunferência de centro no afixo de w_1 e que passa no afixo de w_2 tem raio igual a $|w_1 - w_2|$, tal que:

$|w_1 - w_2| = |-4+2i-(-i)| = |-4+2i+i| = |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

e a equação da circunferência pedida é $|z - w_1| = 5 \Leftrightarrow |z-(-4+2i)| = 5 \Leftrightarrow |z+4-2i| = 5$.

11. As soluções da inequação $\log_2(2x-4) \leq 2\log_2(4-x)+1$ devem pertencer ao conjunto D tal que

$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x-4 > 0 \wedge 4-x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \wedge x < 4\} =]2,4[$

Em D tem-se que:

$$\begin{aligned}\log_2(2x-4) \leq 2\log_2(4-x)+1 &\Leftrightarrow \log_2(2x-4) \leq \log_2\left((4-x)^2\right) + \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(2x-4) \leq \log_2\left(2(4-x)^2\right)\\ &\Leftrightarrow 2x-4 \leq 2(4-x)^2 \Leftrightarrow 2x-4 \leq 2\left(x^2-8x+16\right)\\ &\Leftrightarrow 2x-4 \leq 2x^2-16x+32 \Leftrightarrow 2x^2-18x+36 \geq 0\\ &\Leftrightarrow x^2-9x+18 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-6) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \vee x \geq 6\end{aligned}$$

e o conjunto-solução da inequação é $(x \leq 3 \vee x \geq 6) \wedge x \in D = 2 < x \leq 3 =]2,3]$.

12. Repare-se que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, uma vez que $x^2+2 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

A existência de uma reta tangente ao gráfico de f paralela à bissetriz dos quadrantes pares pressupõe que existe um ponto do gráfico de f' de ordenada -1, o que é falso, visto que f' é positiva em $\mathbb{R}$.

A função f' está definida em $\mathbb{R}$, pelo que se pode concluir que f é contínua nesse domínio. Desta forma, o gráfico de f não pode admitir qualquer assíntota vertical.

Como f' é positiva em $\mathbb{R}$, função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, logo é injetiva e, consequentemente, invertível.

Uma vez f é estritamente crescente em todo o seu domínio e $f(1) = 0$, então para todo e qualquer a real e menor que 1 tem-se que $f(a) < 0$. Desta forma, o contradomínio de f não pode ser $\mathbb{R}_0^+$.

Resposta: (D)

13. A área do pentágono $[ABCDE]$ é dada por $A_{[ABCDE]} = 2 \times A_{[CDEG]}$, em que G é a projeção ortogonal de A no eixo Ox, de tal forma que $A_{[CDEG]} = \frac{\overline{CG}+\overline{DE}}{2} \times \overline{EG}$.

O ponto D tem coordenadas $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, em que $\cos\alpha < 0$ e $\sin\alpha < 0$, pelo que se pode concluir que $\overline{EG} = -y_D = -2\sin\alpha$ e $\overline{DH} = -x_D = -2\cos\alpha$, em que H é a projeção ortogonal de D no eixo Oy.

Repare ainda que como $[DE]$ é paralelo ao eixo Ox, tem-se $\overline{DE} = 2 \times \overline{DH} = -4\cos\alpha$.

Finalmente, é trivial concluir que $\overline{CG} = \overline{OC} + \overline{HE} = 2 - x_D = 2 - 2\cos\alpha$.

Desta forma:

$$A_{[ABCDE]} = 2\times A_{[CDEG]} = 2\left(\frac{\overline{CG}+\overline{DE}}{2}\times\overline{EG}\right) = 2\left(\frac{1-2\cos\alpha+(-4\cos\alpha)}{2}\times(-2\sin\alpha)\right)$$
$$= 2\left(\frac{2-6\cos\alpha}{2}\times(-2\sin\alpha)\right) = (2-6\cos\alpha)\times(-2\sin\alpha) = -4\sin\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= -4\sin\alpha+6\,(2\sin\alpha\cos\alpha) = -4\sin\alpha+6\sin(2\alpha)$$

Resposta: (B)

14.

14.1. Assíntotas Verticais

A função g é contínua em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ e em $]-\infty,0[$, pois em ambos os intervalos é definida por operações básicas entre funções contínuas (polinómios, funções trigonométricas e função exponencial). Desta forma, resta averiguar a existência de uma assíntota vertical ao gráfico de g nos pontos de abcissa 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Como a função f está definida à direita de zero, basta determinar o valor do limite $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ para concluir o pretendido.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1-e^{-2x}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{e^{-2x}-1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{-2x\to 0^+}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}}_{\text{Limite Notável }=\ 1}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

onde se utilizou o facto de se $x\to 0^-$, então $-2x\to 0^+$. Uma vez que o limite calculado tem valor finito, $x=0$ não é assíntota vertical do gráfico de g.

Como f está definida apenas à esquerda de $\frac{\pi}{2}$, determine-se o valor do limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)$ para concluir o pretendido.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x-2}{\cos x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-2}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^-\right)} = \frac{1-2}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

de onde se conclui que a reta de equação $x=\frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical do gráfico de g.

Assíntotas Horizontais

A função g está definida em $\left]-\infty,\frac{\pi}{2}\right[$, pelo que deve-se averiguar a existência de uma assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x\to-\infty$, determinando o valor do limite $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-e^{-2x}} \overset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{-y}{1-e^{2y}} = -\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{y}-\frac{e^{2y}}{y}} = -\frac{1}{\lim\limits_{2y\to+\infty}\frac{1}{y}-2\underbrace{\lim\limits_{2y\to+\infty}\frac{e^{2y}}{2y}}_{\text{Limite Notável}=+\infty}}$$
$$= -\frac{1}{\frac{1}{+\infty}-2\times(+\infty)} = -\frac{1}{0-\infty} = 0$$

onde se utilizou a mudança de variável $y=-x$, tal que se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$. Repare ainda que se $y\to+\infty$, então $2y\to+\infty$. Conclui-se que $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de g quando $x\to-\infty$.

14.2. Em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se:

$$g'(x) = \left(\frac{\sin x-2}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{(\sin x-2)'\cos x-(\sin x-2)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x)\cos x-(\sin x-2)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}.$$

Vindo que:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{\text{Universal em } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

pelo que, em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se uma única solução: $x = \frac{\pi}{6}$.

Estudando o sinal de g':

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	n.d	$+$	0	$-$	n.d
$g(x)$	n.d	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d

Conclui-se então que a função g é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$, é decrescente em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, e admite um máximo no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$ tal que $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.

14.3. Repare que:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\pi - 3x}{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 3\pi \Leftrightarrow -3 \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{x - \frac{\pi}{3}}{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}} = -\pi \Leftrightarrow \frac{1}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\pi$$

de onde vem que $h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\pi}$.

Desta forma, a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$ tem declive $-\frac{1}{\pi}$, pelo que a sua equação é da forma $y = -\frac{1}{\pi}x + b$.

Como esta reta tangente interseta o gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$, esta reta contém o ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, tal que:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sqrt{2}.$$

Desta forma tem-se $1 - 2\sqrt{2} = -\frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{4} - 2\sqrt{2}$, concluindo-se então que a equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$ é $y = -\frac{1}{\pi}x + \frac{5}{4} - 2\sqrt{2}$.

15. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, uma vez que resulta da soma de uma função contínua (função g) com a função composta de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (exponencial e trigonométrica).

Como g admite um máximo absoluto em $x = b$, sabe-se que $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \leq g(b)$. Uma vez que $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico de g, vem que $g(b) \geq 2$. De igual forma pode-se concluir que $g(a) \leq -2$, uma vez que $y = -2$ é assíntota horizontal do gráfico de g e g admite um mínimo absoluto em $x = a$.

Repare-se ainda que $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos x - 1 \leq 0$, pelo que se conclui que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2} \leq e^{\cos x - 1} \leq 1$.

Vem então que

- $f(a) = e^{\cos a - 1} + g(a) \leq 1 + (-2) = -1 < 0$
- $f(b) = e^{\cos b - 1} + g(b) \geq e^{-2} + 2 > 0$

logo $f(a) \times f(b) < 0$. Recordando que f é contínua em $[a,b]$, conclui-se pelo Teorema de Bolzano-Cauchy que a função f admite pelo menos um zero em $]a,b[$.